ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 6, No. 4, 2013

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 6, No. 4, 2013

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 6, No. 4, 2013

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Vol. 6, No. 4, 2013

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2013

Засновники:
Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеської національної академії харчових технологій
(№ 1 від 3.09.2013р)

Зміст

Повний геодезичний скрут та деформації мінімальної поверхні

Т. Ю. Подоусова Л. Л. Безкоровайна

Анотація В даній роботі досліджується задача про існування А-деформацій мінімальної поверхні зі стаціонарним повним геодезичним скрутом, поняття якого введено в [1]. Знайдені умови, за яких будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальні А-деформації зі стаціонарним повним геодезичним скрутом.

Ключові слова повний геодезичний скрут, нескінченно малі ареальні деформації поверхні

УДК 514.76

§1. Повний та середній геодезичні скрути поверхні

1.1. ***Поняття повного та середнього геодезичного скрутів поверхні.***

Нехай регулярна поверхня S класу C^4 в просторі E_3 задана рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$.

Як відомо, значення нормальної кривини, яка задається формулою

$$k_s = \frac{b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta}$$

у даній точці поверхні залежить від напряму. Тут $g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta$ і $b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ - перша та друга основні квадратичні форми поверхні S відповідно. Відштовхуючись від цієї властивості, в теорії поверхонь вводяться поняття головних напрямів у точці поверхні, головних кривин, поняття повної та середньої кривин, ліній кривини, сітки ліній кривини.

Об'єктом дослідження в даній роботі є геодезичний скрут поверхні, формулу якого подамо у вигляді [3]:

$$\tau_s = \frac{\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta}, \tag{1.1}$$

де $\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ - четверта квадратична форма поверхні S,

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(c_{\alpha i} b^i_\beta + c_{\beta i} b^i_\alpha\right), \tag{1.2}$$

$b^i_\alpha = b_{\alpha k} g^{ik}$, $g^{\alpha\beta} = c^{\alpha\gamma} c^{\beta k} g_{\gamma k}$, $g_{i\alpha} g^{\alpha k} = \delta^k_i$, $c_{\alpha j}$ - дискримінантний тензор поверхні S $\left(c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, g = g_{11} g_{22} - g^2_{12}\right)$. Надалі всі індекси набуватимуть значень 1,2.

Як випливає з формули (1.1), значення геодезичного скруту в даній точці поверхні також залежить від напряму. Тому для геодезичного скруту в роботі [1] введені поняття, аналогічні до тих, які вводяться для нормальної кривини, але пов'язаних виключно з формулою (1.1). Наприклад, поняття головних напрямів геодезичного скруту, головних скрутів, поняття повного та середнього геодезичних скрутів, LGT-ліній (line of geodesic torsion).

Далі коротко викладемо теорію, пов'язану з цими поняттями.

Напрям в даній точці поверхні, у якому геодезичний скрут набуває екстремального значення, в [1] названо *головним напрямом геодезичного скруту*.

Для того, щоб знайти аналітичний вираз для головних напрямів геодезичного скруту учинимо так. Продиференціюємо рівність $\rho_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \tau_s g_{\gamma\vartheta} dx^\gamma dx^\vartheta$ спочатку по dx^1, потім по dx^2, вважаючи, що похідні від τ_s по цих змінних дорівнюють нулеві. Матимемо:

$$\begin{cases} (\rho_{11} - g_{11}\tau_s) dx^1 + (\rho_{12} - g_{12}\tau_s) dx^2 = 0, \\ (\rho_{12} - g_{12}\tau_s) dx^1 + (\rho_{22} - g_{22}\tau_s) dx^2 = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

З цих рівностей можна визначити як головні напрями геодезичного скруту, так і відповідні екстремальні значення геодезичного скруту. Виключимо τ_s з (1.3), тоді отримаємо рівняння для головних напрямів геодезичного скруту:

$$(\rho_{11} g_{12} - \rho_{12} g_{11}) {dx^1}^2 + (\rho_{11} g_{22} - \rho_{22} g_{11}) dx^1 dx^2 + (\rho_{12} g_{22} - \rho_{22} g_{12}) {dx^2}^2 = 0. \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) в тензорному вигляді можна представити так:

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0, \tag{1.5}$$

де $h_{\alpha\beta} = (\rho_{\alpha i} c_{\beta j} + \rho_{\beta i} c_{\alpha j}) g^{ij}$ або, інакше,

$$h_{\alpha\beta} = 2\left(H g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}\right), \tag{1.6}$$

H - середня кривина поверхні S.

Легко пересвідчитись, що умовою $h_{\alpha\beta} = 0$ характеризуються омбілічні точки поверхні. Отже, в омбілічних точках, і тільки в них, будь-який напрям є головним напрямом геодезичного скруту. В подальшому ці точки будемо виключати з розгляду.

У будь-якій точці регулярної C^3-поверхні, за виключенням омбілічних точок, існує два різних дійсних головних напрями геодезичного скруту, до того ж вони завжди ортогональні [1].

Головними геодезичними скрутами називаються екстремальні значення геодезичного скруту в даній точці поверхні [1].

Визначимо їх аналітично в даній точці поверхні. Для цього із (1.3) виключимо dx^1, dx^2:

$$(g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2){\tau_s}^2 - (\rho_{11}g_{22} + \rho_{22}g_{11} - 2\rho_{12}g_{12})\tau_s + (\rho_{11}\rho_{22} - {\rho_{12}}^2) = 0. \quad (1.7)$$

Дістанемо квадратне алгебраїчне рівняння відносно τ_s, корені якого водночас є головними геодезичними скрутами. За теоремою Вієта, матимемо

$$2\widetilde{H} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\rho_{11}g_{22} - 2\rho_{12}g_{12} + \rho_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \qquad \widetilde{K} = \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Функції $\tilde{H}$ і $\tilde{K}$ називаються *середнім і повним геодезичними скрутами* поверхні відповідно. Представимо їх у тензорному вигляді:

$$2\widetilde{H} = \rho_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \rho_\alpha^\alpha, \quad (1.8)$$

$$\widetilde{K} = \frac{1}{2}c_{\alpha\beta}c^{\lambda\gamma}\rho_\lambda^\alpha\rho_\gamma^\beta. \quad (1.9)$$

Середній і повний геодезичні скрути поверхні, які ми ввели, виходячи з поняття геодезичного скруту, є аналогами середньої та повної кривин поверхні, які, як ми вже відмічали, вводяться, виходячи з поняття нормальної кривини.

Зокрема, в [1] доведено, що середній геодезичний скрут $\tilde{H}$ на будь-якій регулярній поверхні тотожно дорівнює нулю, а повний геодезичний скрут $\tilde{K}$ можна подати через ейлерову різницю E ($E = H^2 - K$) у вигляді

$$\tilde{K} = -E. \quad (1.10)$$

Лінія на поверхні, напрям якої в кожній точці збігається з головним напрямом геодезичного скруту, називається *лінією геодезичного скруту* *(LGT-лінією).*

Доведено [1], що LGT-лінії утворюють на поверхні сітку ліній геодезичного скруту (*LGT-сітку*), яка існує на будь-якій регулярній C^3-поверхні без омбілічних точок, і є дійсною, регулярною та ортогональною.

1.2. *Окремі питання А-деформацій поверхонь.* Розглянемо нескінченно малу (н.м.) деформацію першого порядку поверхні S з полем зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2) \in C^4$ і параметром деформації $t \to 0$:

$$\mathbf{r}^*(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + t\mathbf{y}(x^1, x^2).$$

Припустимо, що при н.м. деформації "в головному"зберігається елемент площі поверхні $d\sigma = \sqrt{g}dx^1dx^2$, тоді перша варіація елемента площі дорівнює нулю: $\delta d\sigma = 0$.
Н.м. деформація поверхні з стаціонарним елементом площі називається н.м. ареальною деформацією (коротко, А-деформацією) [3].

Розкладемо деформуюче поле $\mathbf{y}_i$ за базисом $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}$ у вигляді:

$$\mathbf{y}_i = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\mathbf{n}, \tag{1.11}$$

де $\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}$, $\mathbf{n}$ - одиничний вектор нормалі S, $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$- деякі тензорні поля на S. У випадку А-деформації вони є розв'язками системи рівнянь (див., напр.,[3]):

$$T^{\alpha k}_{,\alpha} - b^k_\alpha T^\alpha = 0,\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0,\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0. \tag{1.12}$$

(1.12) являє собою необхідну і достатню умову для існування векторного поля $\mathbf{y}(x^1, x^2)$, як розв'язку системи рівнянь (1.11).

Під дією н.м. деформації квадрат елемента дуги ds^2 кривої у загальному вигляді на поверхні отримує ненульовий приріст

$$(ds^*)^2 - ds^2 = t2\varepsilon_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + O(t^2),$$

де

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = T^{\gamma\delta}(c_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}) \tag{1.13}$$

- варіації метричного тензора поверхні.

Необхідною і достатньою умовою того, щоб н.м. деформація була ареальною, є умова [3]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0. \tag{1.14}$$

Оскільки варіація елемента площі $d\sigma = \sqrt{g}\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}dx^1dx^2$, то н.м. деформація буде зберігати елемент площі тоді і лише тоді, коли виконується рівність (1.14).

У монографії [2], Векуа І.Н. вводить до розгляду н.м. згинання (при яких зберігається елемент дуги на поверхні) з вектором обертання $\mathbf{y}(x^1, x^2)$, частинні похідні якого представлені так: $\mathbf{y}_i = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta$. Основна система рівнянь н.м. згинань там має вигляд:

$$T^{\alpha k}_{,\alpha} = 0,\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0,\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0.$$

Якщо у деякій точці (області) поверхні деформуюче поле $\mathbf{y}$ ареальної н.м. деформації виявиться полем зміщень н.м. згинання, то таку А-деформацію називають тривіальною у цій точці (області).

Очевидно, клас н.м. згинань входить у клас н.м. ареальних деформацій, як окремий випадок. Необхідною і достатньою умовою того, щоб ареальна н.м. деформація з вектором зміщення $\mathbf{y}$ (1.11) була тривіальною А-деформацією є умова

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.15}$$

В даній роботі будемо досліджувати А-деформації поверхонь, при яких зберігається повний геодезичний скрут поверхні. Для цього попередньо визначимо варіації деяких геометричних характеристик поверхні.

1.3. ***Варіації четвертого фундаментального тензора.*** Шляхом варіювання формули (1.2) отримаємо

$$\delta\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(b^i_\beta\delta c_{\alpha i} + c_{\alpha i}\delta b^i_\beta + b^i_\alpha\delta c_{\beta i} + c_{\beta i}\delta b^i_\alpha\right).$$

В [3] були знайдені варіації наступних геометричних величин при А-деформаціях першого порядку поверхні S:

$$\delta c_{\alpha i} = 0, \qquad \delta g^{ij} = -2g^{i\alpha}g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \delta b_{ij} = \beta_{ij} = \mathbf{y}_{i,j}\mathbf{n},$$

$$\delta b^k_i = \beta_{ij}g^{jk} + 2b_{ij}c^{j\alpha}c^{k\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad 2\delta H = \beta_{ij}g^{ij} - 2\varepsilon_{ij}b^{ij}, \quad b^{ij} = b^i_\alpha g^{\alpha j},$$

$$\delta K = K\beta_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}.$$

Беручи до уваги (1.11)-(1.14), представимо їх через тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$:

$$\delta g^{\alpha\beta} = -\left(c_{i\gamma}g^{\alpha i}T^{\gamma\beta} + c_{j\gamma}g^{\beta j}T^{\gamma\alpha}\right), \tag{1.16}$$

$$\delta b_{ij} = \beta_{ij} = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T^\alpha_{,j}, \tag{1.17}$$

$$\delta b^i_\alpha = c_{\alpha k}T^{k\rho}b_{\rho s}g^{si} + c_{\alpha k}g^{si}T^k_{,s} - c_{t\gamma}b^t_\alpha T^{\gamma i} - b_{\alpha s}g^{i\delta}c_{\delta\gamma}T^{\gamma s}, \tag{1.18}$$

$$2\delta H = c_{ik}b^k_j T^{ij} + c_{mi}g^{sm}T^i_{,s}, \tag{1.19}$$

$$\delta K = b_{\alpha\beta}c^{j\beta}T^\alpha_{,j}. \tag{1.20}$$

Варіація четвертого фундаментального тензора при А-деформації через тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ після певних перетворень виразиться у вигляді:

$$2\delta\rho_{\alpha\beta} = 2g_{k\gamma}T^{k\gamma}b_{\alpha\beta} - (b_{\gamma\beta}g_{\alpha k} + b_{\gamma\alpha}g_{\beta k})\, T^{k\gamma} - \left(g_{\alpha k}T^{k}_{,\beta} + g_{\beta k}T^{k}_{,\alpha}\right). \quad (1.21)$$

1.4. *Варіації повного та середнього геодезичних скрутів поверхні.* Варіюванням формул (1.8), (1.10) дістанемо:

$$\delta\tilde{K} = -2H\delta H + \delta K, \quad (1.22)$$

$$2\delta\tilde{H} = \rho_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta\rho_{\alpha\beta}. \quad (1.23)$$

Підставимо відповідні значення з формул (1.16)-(1.21) та остаточно отримаємо вирази для варіацій повного та середнього геодезичних скрутів при А-деформаціях поверхні:

$$2\delta\tilde{K} = Hc_{\alpha i}b^{\alpha}_{j}T^{ij} - (Hg_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, c^{j\beta}T^{\alpha}_{,j}, \quad (1.24)$$

$$2\delta\tilde{H} = 0.$$

§2. А-деформації мінімальної поверхні, при яких зберігається повний геодезичний скрут

2.1. *Постановка задачі для довільної регулярної поверхні.* Будемо розглядати А-деформацію довільної регулярної поверхні, при якій зберігається повний геодезичний скрут, тобто за умови $\delta\tilde{K} = 0$.

Мають місце теореми

Теорема 2.1. *Необхідною і достатньою умовою того, щоб при А-деформації довільної регулярної поверхні зберігався повний геодезичний скрут є умова*

$$Hc_{\alpha i}b^{\alpha}_{j}T^{ij} - (Hg_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, c^{j\beta}T^{\alpha}_{,j} = 0. \quad (2.1)$$

Теорема 2.2. *Для існування А-деформації довільної регулярної поверхні з стаціонарним повним геодезичним скрутом необхідно і достатньо, щоб існував ненульовий розв'язок ($T^{11}, T^{12}, T^{22}, T^{1}, T^{2}$) системи рівнянь:*

$$T^{\alpha k}_{,\alpha} - b^{k}_{\alpha}T^{\alpha} = 0, \qquad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^{\alpha}_{,\alpha} = 0,$$

$$c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0, \quad Hc_{\alpha i}b^{\alpha}_{j}T^{ij} - (Hg_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, c^{j\beta}T^{\alpha}_{,j} = 0. \quad (2.2)$$

Це є система чотирьох диференціальних рівнянь відносно п'яти невідомих функцій - симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$ та компонентів вектора T^{α}. Її дослідження в загальному вигляді зводиться до досить складних рівнянь, тому в цій роботі ми обмежимося розглядом мінімальної поверхні.

2.2. Постановка задачі для мінімальної поверхні. З теореми 2.1. та теореми 2.2. для мінімальної поверхні випливають наступні твердження:

Теорема 2.3. *Необхідною і достатньою умовою того, щоб при А-деформації мінімальної поверхні зберігався повний геодезичний скрут є умова*

$$b_{\alpha\beta}c^{j\beta}T^{\alpha}_{,j} = 0. \tag{2.3}$$

Теорема 2.4. *Для існування А-деформації мінімальної поверхні зі стаціонарним повним геодезичним скрутом необхідно і достатньо, щоб існував ненульовий розв'язок ($T^{11}, T^{12}, T^{22}, T^{1}, T^{2}$) системи рівнянь:*

$$T^{\alpha k}_{,\alpha} - b^{k}_{\alpha}T^{\alpha} = 0, \quad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^{\alpha}_{,\alpha} = 0, \quad c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta}c^{j\beta}T^{\alpha}_{,j} = 0. \tag{2.4}$$

Зауваження. У відповідності з формулою (2.3) з рівності (1.20) випливає умова стаціонарності повної кривини поверхні, тобто

$$\delta K = 0.$$

Отже, при А-деформації мінімальної поверхні з стаціонарним повним геодезичним скрутом зберігається також повна кривина поверхні. Тому в подальшому всі наступні результати також справедливі, якщо слова "повний геодезичний скрут"замінити словами "повна кривина"поверхні.

Таким чином, задача про існування А-деформації мінімальної поверхні, при якій зберігається повний геодезичний скрут, аналітично зводиться до дослідження системи чотирьох диференціальних рівнянь відносно п'яти невідомих функцій - симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$ та компонентів вектора T^{α}.

Розв'язок системи рівнянь (2.4) будемо шукати у вигляді:

$$T^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta}m + Kd^{\alpha\beta}\mu, \tag{2.5}$$

де $m(x^1, x^2)$ і $\mu(x^1, x^2)$ - деякі функції, $\rho^{\alpha\beta} = \frac{1}{\tilde{K}}c^{\alpha i}c^{\beta j}\rho_{ij}$ - елементи матриці, оберненої до $\|\rho_{\alpha\beta}\|$, $d^{\alpha\beta} = \frac{1}{K}c^{\alpha i}c^{\beta j}b_{ij}, \quad K \neq 0$ - елементи матриці, оберненої до $\|b_{\alpha\beta}\|$. При цьому поставлена задача стане визначеною, тому що вона зводиться до дослідження системи семи диференціальних рівнянь (2.4), (2.5) відносно семи невідомих функцій.

2.3. *Випадок тривіальних деформацій.* Перевіримо для яких функцій m та μ А-деформація мінімальної поверхні, при якій зберігається повний геодезичний скрут, буде тривіальною з вектором зміщення $\mathbf{y}$ з (1.11).

Лема 2.1. *А-деформація мінімальної поверхні з стаціонарним повним геодезичним скрутом в даній точці буде тривіальною тоді і лише тоді, коли ця точка є омбілічною.*

Доведення. Підставимо вираз для тензора $T^{\alpha\beta}$ в (1.13). Після деяких нескладних перетворень знайдемо, що:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} m - \rho_{\alpha\beta}\mu. \tag{2.6}$$

Нехай точка поверхні є омбілічною. Тоді $h_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} = 0$. З (2.6) випливає, що $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$.

Отже, А-деформація поверхні є тривіальною.

Навпаки, якщо $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$, то

$$h_{\alpha\beta} m - \rho_{\alpha\beta}\mu = 0.$$

Звідси випливають рівності

$$\frac{h_{11}}{\rho_{11}} = \frac{h_{12}}{\rho_{12}} = \frac{h_{22}}{\rho_{22}}. \tag{2.6$'$}$$

З урахуванням формул (1.1) і (1.4) для $h_{\alpha\beta}$ та $\rho_{\alpha\beta}$ можна переконатися, що умова (2.6') характеризує омбілічні точки поверхні. Лему доведено

Лема 2.2. *Якщо $m = \mu = 0$, то А-деформація, при якій зберігається повний геодезичний скрут мінімальної поверхні, буде тривіальною.*

З наведених лем робимо висновок, що в будь-якій неомбілічній точці за умови $\mu^2 + m^2 \neq 0$, А-деформація з стаціонарним повним геодезичним скрутом буде нетривіальною.

2.3. *Аналіз основної системи рівнянь (2.4).* Підставимо вираз (2.5) для тензора $T^{\alpha\beta}$ у алгебраїчне рівняння $(2.4)_2$ і одержимо:

$$T^{\alpha}_{,\alpha} = -2K\mu. \tag{2.7}$$

Тензор деформації $T^{\alpha\beta}$ з (2.5) повинен також задовольняти систему рівнянь $(2.4)_1$. Тому знайдемо коваріантну похідну від $T^{\alpha\beta}$ і підставимо її в $(2.4)_1$, матимемо:

$$b^{\beta}_{\alpha} T^{\alpha} = c^{\alpha i} b^{\beta}_{i} m_{\alpha} - b^{\alpha\beta}\mu_{\alpha}.$$

Далі, помноживши цю рівність на $d^{k}_{\beta} = d^{k\alpha} g_{\alpha\beta}$, отримаємо вираз тензорного поля T^{α} через дві функції m та μ:

$$T^{\alpha} = c^{k\alpha} m_k - g^{k\alpha}\mu_k. \tag{2.8}$$

Підставимо спочатку (2.8) у (2.7), а потім у $(2.4)_4$. Отримаємо систему двох диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними відносно двох невідомих функцій m та μ:

$$\begin{cases} g^{k\alpha}\mu_{k,\alpha} - 2K\mu = 0, \\ \\ b^{kj}m_{k,j} - \rho^{kj}\mu_{k,j} = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Перше рівняння цієї системи є диференціальним рівнянням другого порядку еліптичного типу (оскільки його дискримінант додатний) відносно функції μ. Друге рівняння цієї системи є диференціальним рівнянням другого порядку гіперболічного типу (наприклад, в асимптотичних лініях, коли $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} \neq 0$, його дискримінант є від'ємним) відносно функції m. Отже, має місце

Теорема 2.5. *Якщо функції $\mu(x^1, x^2)$ та $m(x^1, x^2)$ за умови $\mu^2 + m^2 \neq 0$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь (2.9), то існує нетривіальна А-деформація зі стаціонарним повним геодезичним скрутом мінімальної поверхні. При цьому тензори деформації $T^{\alpha\beta}$, T^α через функції μ та m класу C^2 виражаються у явному вигляді за формулами (2.5), (2.8) відповідно.*

2.4. *Механічний зміст поставленої задачі.* Відомо [3], що А-деформація поверхні моделює безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки за умови, що її поверхневе навантаження X має дві степені свободи:

$$X = (T^\alpha \mathbf{n})_{,\alpha}.$$

З попереднього випливає, що А-деформація мінімальної поверхні зі стаціонарним повним геодезичним скрутом описує безмоментний напружений стан рівноваги оболонки з поверхневим навантаженням, яке визначається тензорним полем (2.8)

$$X = ((c^{k\alpha}m_k - g^{k\alpha}\mu_k)\mathbf{n})_{,\alpha} = -b_\alpha^\beta(c^{k\alpha}m_k - g^{k\alpha}\mu_k)\mathbf{r}_\beta - 2K\mu\mathbf{n}.$$

В роботі [3] (с.35) доведена формула:

$$2Hc_{ij} = b_i^\alpha c_{\alpha j} + b_j^\alpha c_{i\alpha}. \tag{2.10}$$

Підставляючи вираз $b_i^\alpha c_{\alpha j}$ у (1.2), отримаємо:

$$\rho_{\alpha\beta} = c_{\alpha k} b_\beta^k - Hc_{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

Згідно з (2.11) остаточно для оболонки з серединною мінімальною поверхнею поверхневе навантаження матиме вигляд:

$$X = -(\rho^{k\beta} m_k + K d^{k\beta} \mu_k)\mathbf{r}_\beta - 2K\mu\mathbf{n}.$$

2.5.*Про існування окремих розв'язків поставленої задачі.*

1. Доведемо, що рівняння $(2.9)_1$ завжди допускає ненульовий розв'язок.

Лема 2.3. *Функція*

$$\mu = \mathbf{n}\mathbf{c}, \tag{2.12}$$

де $\mathbf{c} = \mathbf{const}$ *- будь-який сталий вектор,* $\mathbf{n}$ *- орт нормалі поверхні, є розв'язком рівняння* $(2.9)_1$.

*Доведення.*Скористаємось дериваційними рівняннями теорії поверхонь [4]

$$\mathbf{r}^\beta_{,\alpha} = b^\beta_\alpha \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}_k = -b^\alpha_k \mathbf{r}_\alpha.$$

Тоді, із (2.12) матимемо

$$\mu_k = \mathbf{n}_k \mathbf{c} = -b^\alpha_k \mathbf{r}_\alpha \mathbf{c}. \tag{2.13}$$

Підставимо значення (2.12), (2.13) для μ та μ_k у ліву частину першого рівняння системи (2.9) та зробимо відповідні перетворення:

$$\left(g^{k\alpha}\mu_k\right)_{,\alpha} - 2K\mu = -\left(g^{k\alpha} b_{k\beta}\mathbf{r}^\beta \mathbf{c}\right)_{,\alpha} - 2K\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} = -\left(b^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta \mathbf{c}\right)_{,\alpha} - 2K\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} =$$

$$= -2H_\beta \mathbf{r}^\beta \mathbf{c} - b^\alpha_\beta b^\beta_\alpha \mathbf{n}\cdot\mathbf{c} - 2K\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}.$$

Відомо [3], що

$$b^\alpha_\beta b^\beta_\alpha = 4H^2 - 2K,$$

тоді для мінімальної поверхні остаточно отримаємо:

$$\left(g^{k\alpha}\mu_k\right)_{,\alpha} - 2K\mu = 2K\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} - 2K\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} = 0.$$

Отже, функція μ задовільняє рівняння $(2.9)_1$. Лему доведено.

Оскільки рівняння $(2.9)_1$ задовольняється розв'язком $\mu = \mathbf{n}\mathbf{c}$,, то система рівнянь (2.9) зводиться до одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функції m з відомою правою частиною:

$$b^{kj} m_{k,j} = \rho^{kj}\mu_{k,j}.$$

Далі розглянемо вираз $\rho^{kj}\mu_{k,j}$ за умови, що $\mu = \mathbf{n}\mathbf{c}$:

$$\rho^{kj}\mu_{k,j} = -\rho^{kj}\left(b_{k\beta}\mathbf{r}^\beta \mathbf{c}\right)_{,j} =$$

$$= -\rho^{kj}\left(b_{k\beta,j}\mathbf{r}^\beta\mathbf{c} + b_{k\beta}b_j^\beta\mathbf{nc}\right) = -\rho^{kj}\left(b_{k\beta,j}\mathbf{r}^\beta\mathbf{c} + (2Hb_{kj} - Kg_{kj})\mathbf{nc}\right).$$

Для довільної поверхні справджується тотожність $\rho^{kj}g_{kj} = 0$. Тоді при $H = 0$,будемо мати

$$\rho^{kj}\mu_{k,j} = -\rho^{kj}b_{kj,\beta}\mathbf{r}^\beta\mathbf{c}.$$

Тоді рівняння $(2.9)_2$ в розгорнутому вигляді матиме вигляд:

$$b^{kj}m_{kj} - b^{kj}\Gamma_{kj}^\alpha m_\alpha = -\rho^{kj}b_{kj,\beta}\mathbf{r}^\beta\mathbf{c}, \tag{2.14}$$

де Γ_{kj}^α - символи Христофеля другого роду, $m_\alpha = \frac{\partial m}{\partial x^\alpha}$, $\quad m_{kj} = \frac{\partial^2 m}{\partial x^\alpha \partial x^j}$.

Віднесемо поверхню до асимптотичних ліній ($b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} \neq 0$). У зв'язку з цим (2.14) набуде канонічного вигляду:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^1 \partial x^2} - \Gamma_{12}^1\frac{\partial m}{\partial x^1} - \Gamma_{12}^2\frac{\partial m}{\partial x^2} = F(x^1, x^2), \tag{2.15}$$

де $F(x^1, x^2) = -\frac{1}{b^{12}}\rho^{kj}b_{kj,\beta}\mathbf{r}^\beta\mathbf{c}$ - відома функція, $b^{12} = \frac{b_{12}}{g}$.

Розглянемо задачу Дарбу [5] для лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.15) відносно функції $m(x^1, x^2)$. Будемо знаходити такий інтеграл, який набуває певних значень на характеристиках $x^1 = x_0^1, \quad x^2 = x_0^2$

$$m(x^1, x_0^2) = \lambda(x^1), \qquad m(x_0^1, x^2) = \tau(x^2).$$

Оскільки кожній парі функцій $\lambda(x^1), \tau(x^2)$ відповідає єдиний розв'язок $m(x^1, x^2)$ рівняння (2.15) для даної правої частини, то має місце

Теорема 2.6. *Будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальні А-деформації зі стаціонарним повним геодезичним скрутом у класі C^4. При цьому тензори деформації виражаються через дві функції, кожна від однієї змінної, у наступному явному вигляді:*

$$T^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta}m + Kd^{\alpha\beta}\mathbf{cn}, \qquad T^\alpha = c^{k\alpha}m_k + b_s^\alpha\mathbf{cr}^s$$

2. Розглянемо тепер частинний випадок $\mu = 0$. Тоді з системи рівнянь (2.9) дістанемо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу відносно функції m:

$$b^{kj}m_{k,j} = 0. \tag{2.16}$$

Це рівняння допускає розв'язки (див. приклад у наступному пункті). Справедлива

Теорема 2.7. *Будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальні А-деформації зі стаціонарним повним геодезичним скрутом в класі C^4.*

При цьому тензори деформації виражаються через одну функцію $m(x^1, x^2)$, яка є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку (2.16):

$$T^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta} m, \qquad T^{\alpha} = c^{k\alpha} m_k.$$

3. Розглянемо А-деформації із стаціонарним повним геодезичним скрутом для ***прямого гелікоїда*** за умови $\mu = 0$. Запишемо його рівняння у вигляді:

$$\mathbf{r} = \{x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, x^2\}.$$

Обчислимо:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (x^1)^2 + 1, \quad b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = -\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}},$$

$$\rho_{11} = -\frac{1}{(x^1)^2 + 1}, \quad \rho_{12} = 0, \quad \rho_{22} = 1, \quad h_{11} = h_{22} = 0, \quad h_{12} = \frac{2}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}},$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{sinx^2}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}}, -\frac{cosx^2}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}}, \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + 1}} \right),$$

$$\rho^{11} = -\frac{1}{(x^1)^2 + 1}, \quad \rho^{22} = \frac{1}{((x^1)^2 + 1)^2}, \quad \rho^{12} = 0,$$

$$2H = 0, \quad K = \widetilde{K} = -\frac{1}{((x^1)^2 + 1)^2}, \quad 2\widetilde{H} = 0.$$

Рівняння (2.16) в асимптотичній системі координат набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{x^1}{1 + (x^1)^2} \frac{\partial m}{\partial x^2} = 0. \tag{2.17}$$

Введемо функції

$$\frac{\partial m}{\partial x^2} = \varphi(x^1, x^2); \quad \xi(x^1) = \frac{x^1}{1 + (x^1)^2}.$$

Тоді з (2.17) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \varphi(x^1, x^2)\xi(x^1). \tag{2.18}$$

Його загальний розв'язок виразимо через довільну функцію $c(x^2)$:

$$m(x^1, x^2) = c(x^2)\sqrt{1 + (x^1)^2}. \tag{2.19}$$

Остаточно тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ для гелікоїда набувають вигляду:

$$T^{11} = -\frac{c(x^2)}{\sqrt{(x^1)^2+1}}, \quad T^{22} = \frac{c(x^2)}{\sqrt{((x^1)^2+1)^3}}, \quad T^{12} = T^{21} = 0,$$

$$T^1 = -c'(x^2), \quad T^2 = \frac{x^1 c(x^2)}{1+(x^1)^2}. \tag{2.20}$$

Для випадку $c(x^2) = 1$ отримаємо

$$T^{11} = -\frac{1}{\sqrt{(x^1)^2+1}}, \quad T^{22} = \frac{1}{\sqrt{((x^1)^2+1)^3}}, \quad T^{12} = T^{21} = 0,$$

$$T^1 = 0, \quad T^2 = \frac{x^1}{1+(x^1)^2}. \tag{2.21}$$

Тоді вдається знайти явний вираз вектора зміщення $\mathbf{y}$. Справді, підставивши компоненти $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ з (2.21) в (1.11), дістанемо :

$$\mathbf{y}_1 = \{0, 0, 1\},$$

$$\mathbf{y}_2 = \{\cos x^2, \sin x^2, 0\}.$$

Тоді явний вираз вектора зміщення для прямого гелікоїда остаточно запишеться так:

$$\mathbf{y} = \{\sin x^2, -\cos x^2, x^1\}. \tag{2.22}$$

Тепер пересвідчимося в тому, що A-деформація зі стаціонарним повним геодезичним скрутом для гелікоїда є нетривіальною. Справді, варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми відмінні від нуля:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \qquad \varepsilon_{12} = c(x^2).$$

Отже, справджується

Теорема 2.8. *Поверхня прямого гелікоїда допускає нетривіальні A-деформації зі стаціонарним повним геодезичним скрутом. Тензори деформації виражаються у вигляді (2.21), а вектор зміщення має вигляд (2.22).*

Література

1.*Безкоровайная Л.Л.,Вашпанова Т.Ю.* LGT-сеть поверхности и ее свойства //Вестник Киевского нац. универ. им.Т.Шевченка,Сер.физ.-мат. науки, вып.2, 2010, с.7–12.
2.*Векуа И.Н.*, Обобщенные аналитические функции, Москва, Физматгиз, 1988.
3. *Безкоровайна Л.Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки: Навчальний посібник. - Одеса: Астропринт, 1999. - 168 с
4.*Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. – М.-Л.: Гостехиздат. – т. I. – 1947. – 512 с; т. II. – 1948. – 407 с.
5.*Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных, М., 1957.

Т. Ю. Подоусова
ОДАБА, Одеса, Україна
E-mail: tatyana_top@mail.ru

Tetyana Podousova
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine.
Lilia Bezkorovajna
Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine.

Complete geodesic torsion and deformations of minimal surface

In the given work probed about existence of A-deformations of minimal surface with the stationary complete geodesic torsion the concept of which is entered in [1]. Terms at which any minimal surface assumes non-trivial A-deformations with the stationary complete geodesic torsion are found.

Геометрическая структура совместно порожденная метрикой и кручением

Н.И. Яременко

Аннотация В данной статье рассматривается геометрия, которая порождена совместно и согласовано метрическим тензором и тензором кручения. Изучены свойства пространства описанного при помощи задания метрики и кручения; при этом исследован тензор кривизны, получены аналоги тождества Риччи – Якоби, уравнения геодезических линий.

Ключевые слова метрический тензор,тензор кручения, связность, геодезические линии, кривизна, кручение, аффинное пространство

УДК 514.1

Введение

В данной работе исследуются свойства пространств с аффинной связностью при наличии метрического тензора, получены результаты о структуре тензора кривизны, рассмотрено построение геодезических линий и получена оценка зазора который возникает при обходе контура параллелограмма в этих пространствах.

Исследование свойств метрических и пространств аффинной связности началось, приблизительно, в начале 20-го века [6, 7] и продолжается и развивается до настоящего времени [1-5, 7-16].

Важность подобного рода исследований обуславливается с одной стороны внутренней логикой оснований математической науки [6, 7, 9, 13], с другой приложениями к задачам аналитической механике [1, 12], теории относительности [5, 14-16], механики сплошных сред, космологии [10].

Достаточно хорошо исследованы Римановы пространства [9], ввиду богатства геометрических свойств, менее изучены пространства аффинной связности [3] и не достаточно рассмотрена наиболее интересная геометрия, которая получается при объединении геометрий аффинной связности и порожденной метрическим тензором, именно этому и посвящена данная работа.

Основная цель данной работы – исследование тех геометрических свойств пространства аффинной связности, которые возникают при его погружении в метрическое пространство, то есть построить геометрию исходя из двух тензоров – метрики и кручения. В этом случаи с одной стороны сохраняются все свойства геометрии аффинного пространства, с другой появляются многие важные особенности, связанные с наличием метрики, при этом структура тензора кривизны имеет характерные особенности, а также появляется возможность оценить зазор, который возникает при переходе от оригинала к изображению и, наоборот, в случаи бесконечно малых контуров.

Основное естественное предположение, которое используется ниже для сохранения метрических свойств изучаемого пространства: скалярное произведение двух векторов при параллельном переносе вдоль произвольного пути не меняется.

Основные результаты и их доказательства

Можно по-разному представлять физическое четырехмерное пространство, в котором происходят события реальной действительности, с математической точки зрения возможны две принципиальные схемы построения геометрии пространства, которое можно бы было отождествить с наблюдаемым физическим пространством.

Первая схема это обобщение геометрии Эвклида – геометрия римановой метрики, то есть многообразие, в котором задано поле два раза ковариантного симметрического и невырожденного тензора $g_{ik}(M)$, где $Det|g_{ik}| \neq 0$ и $g_{ik} = g_{ki}$.

Заметим, что метрический тензор выбирается произвольно, кроме условий положенных выше и многообразие считается достаточно гладким.

Важным есть тот факт, что это определение можно переписать в виде: инвариантная дифференциальная квадратичная форма $g_{ik}\, dx^i dx^k$ удовлетворяющая условию $Det|g_{ik}| \neq 0$, $g_{ik} = g_{ki}$ определяем геометрию Римана.

Как следствие инвариантности формы:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \tag{1}$$

получим, что коэффициенты g_{ik}образуют тензорное поле.

В этой модели за длину дуги кривой можно принять интеграл:

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ik}\, dx^i dx^k.} \tag{2}$$

Вторая схема представляем обобщение аффинной геометрии – геометрия аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(M)$, построенная на базе n- мерного многообразия.

Система чисел $\Gamma^i_{jk}(M)$ подчинена закону преобразования от одной координатной системы x^i к другой $x^{i'}$ в виде:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{3}$$

причем функции Γ^i_{jk} достаточно гладкие.

Пусть вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $t \in [a, b] \subset R$ задано поле тензора $A^i = A^i(t)$, если при каждом бесконечно малом смещении по t координаты тензора $A^i(t)$ меняются по закону:

$$dA^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k, \tag{4}$$

тогда говорят, что тензор A^i переносится параллельно относительно кривой t.

В зависимости от поставленных целей выбирается та или иная геометрическая модель, но как внутренняя логика, так и здравый смысл требует, чтобы в физическом мире эти две модели сосуществовали совместно и дополняли друг друга, хорошо известный результат, что в произвольном римановом пространстве всегда можно построить связность $\Gamma^i_{jk}(M)$. Интересен вопрос единственности такого построения. В общем случае такое построение Γ^i_{jk}не единственно, но абсолютно естественным (с точки зрения математики и в большей мере физики), есть требования того, что всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся параллельно два вектора A^i и B^i (в силу наличия связности такое перенесение определено), их скалярное произведение не меняется (скалярное произведение определяется метрикой). Математически это записывается в виде равенства нулю дифференциала:

$$d(g_{ik} A^i B^k) = 0. \tag{5}$$

Если же потребовать симметричность коэффициентов Γ^i_{jk}, а именно, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ тогда связность определена, при помощи метрики, единственным образом.

Всегда ниже мы не будем требовать симметричности связности. И так если определена метрика g_{ik}, то на геометрический объект Γ^i_{jk} наложены определенные связи, но еще существует некоторый произвол в выборе связности пространства, а именно необходимо задать еще тензор кручения:

$$S^i_{jk} \equiv \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}, \tag{6}$$

тогда геометрический объект Γ^i_{jk}, что порождает связность, определен однозначно.

Теорема 1 (о построении связности при помощи метрики кручения) *Пусть задано Риманово пространство с метрикой g_{ik} и в этом пространстве задан тензор кручения S^i_{jk} - кососимметрический, тогда связность пространства (геометрический объект, определяющий ее) Γ^i_{jk} задана однозначно. Если требовать $d(g_{ik}A^iB^k) = 0$ для произвольных A^i и B^k.*

Доказательство Показать истинность этого утверждения само по себе довольно просто, для дальнейшего более важно те обозначения и значения, что касаются природы введенных величин.

Для произвольных A^i и B^k, перепишем равенство $d(g_{ik}A^iB^k) = 0$, в следующем виде $(g_{ik,l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl})\, A^iB^kdx^l = 0$, в силу того, что $dA^i = -\Gamma^i_{pl}A^pdx^l$, где Γ^m_{il} - коэффициенты искомой связности – геометрический объект; dx^l - дифференциалы координат точки при бесконечно малом смещении пути; $g_{ik,l} \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ik}$.

Так как A^i, B^k, dx^l - произвольны, то равенства должны представлять собой тождества относительно A^i, B^k, dx^l. Круговой подстановкой получаем систему равенств:

$$g_{ik,l} = g_{mk}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{kl}$$

$$g_{li,k} = g_{mi}\Gamma^m_{lk} + g_{lm}\Gamma^m_{ik}$$

$$g_{kl,i} = g_{ml}\Gamma^m_{ki} + g_{km}\Gamma^m_{li}.$$

Поскольку техника аналогична классической, дальше мы приводим формулы без обоснований:

$g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i} = g_{mk}S^m_{il} + g_{ml}S^m_{ik} + g_{im}\Gamma^m_{kl} + g_{mi}\Gamma^m_{lk}$, где

$$S^m_{il} = \Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}$$

- тензор кручения,

$$g_{im}\left(\Gamma^m_{kl}+\Gamma^m_{lk}\right)=g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}+g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki},$$

$$\Gamma^p_{kl}+\Gamma^p_{lk}=g^{pi}\left(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}+g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right),$$

и дополняя очевидным равенством – определением $\Gamma^p_{kl}-\Gamma^p_{lk}=S^p_{kl}$, получаем:

$$\Gamma^p_{kl}=\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}+g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right)+\frac{1}{2}S^p_{kl}. \tag{7}$$

Вводя обозначения и анализируя последнюю формулу видим, что

$$\mathrm{P}^p_{kl}=\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{ik,l}+g_{li,k}-g_{kl,i}\right) \tag{8}$$

есть геометрический объект.

$$L^p_{kl}\equiv\frac{1}{2}S^p_{kl}+\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right) \tag{9}$$

составляет тензор.

И так, геометрический объект Γ^p_{kl} порождающий связность пространства полностью определяется тензорами g_{ik} и S^m_{ik} - имеет вид суммы геометрического объекта P^p_{kl} составленного из производных метрического тензора g_{ik} и тензора L^p_{kl}, составленного как из g_{ik} так и из тензора S^m_{kl}, а именно:

$$\Gamma^p_{kl}=\mathrm{P}^p_{kl}+L^p_{kl}. \tag{10}$$

Замечание 1. Тензор L^p_{kl} представляем в виде суммы двух тензоров симметрического $\frac{1}{2}g^{pi}\left(g_{km}S^m_{li}+g_{lm}S^m_{ki}\right)$ и кососимметрического $\frac{1}{2}S^p_{kl}$.

Замечание 2. Несложно показать, что имеет место соотношение:

$$\Gamma^p_{pl}=\frac{1}{2}g_{ip,l}g^{ip}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l},$$

где $g=\det|g_{ik}|$.

Следующим шагом построения геометрической теории есть рассмотрение параллельного переноса тензора-вектора A^i, который задается формулой:

$$dA^i=-\Gamma^i_{pl}A^p dx^l.$$

Коэффициенты Γ^i_{pl} - это связность пространства.

Поскольку дальнейшие рассуждения близки к классическим , а часто и повторяют их, то изложение промежуточных результатов будет носить схематический характер.

Пусть ковариантная производная по l по определению:

$$u_{i;l} \equiv u_{i,l} - \Gamma^k_{il} u_k,$$

$$u^i_{;l} \equiv u^i_{,l} + \Gamma^i_{kl} u^k,$$

тогда рассмотрим разность:

$$u_{i;l;k} - u_{i;k;l} = (u_{i,l} - \Gamma^p_{il} u_p)_{;k} - (u_{i,k} - \Gamma^p_{ik} u_p)_{;l} = u_{i,l,k} - \Gamma^p_{il,k} u_p - \Gamma^p_{il} u_{p,k} -$$

$$- \left(u_{q,l} - \Gamma^p_{ql} u_p\right) \Gamma^l_{ik} - \left(u_{i,q} - \Gamma^p_{iq} u_p\right) \Gamma^q_{lk} - u_{i,k,l} + \Gamma^p_{ik,l} u_p + \Gamma^p_{ik} u_{p,l} +$$

$$+ \left(u_{l,k} - \Gamma^p_{qk} u_p\right) \Gamma^q_{il} + \left(u_{i,q} - \Gamma^p_{iq} u_p\right) \Gamma^q_{kl} = \left(\Gamma^p_{ik,l} - \Gamma^p_{il,k}\right) u_p +$$

$$+ \left(\Gamma^p_{ql} \Gamma^q_{ik} + \Gamma^p_{iq} \Gamma^q_{lk} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^q_{il} - \Gamma^p_{iq} \Gamma^q_{kl}\right) u_p + \left(-\Gamma^p_{lk} + \Gamma^p_{kl}\right) u_{i,p} =$$

$$= \left(\Gamma^p_{ik,l} - \Gamma^p_{il,k} + \Gamma^p_{ql} \Gamma^q_{ik} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^q_{il}\right) u_p + \Gamma^p_{iq} S^q_{lk} u_p - S^q_{lk} u_{i,q} =$$

$$= R^p_{kli} u_p + S^q_{kl} u_{i;q},$$

а именно

$$u_{i;l;R} - u_{i;k;l} = R^p_{kli} u_p + S^q_{kl} u_{i;q} \tag{11}$$

где

$$R^p_{kli} \equiv \Gamma^p_{ik,l} - \Gamma^p_{il,k} + \Gamma^p_{ql} \Gamma^q_{ik} - \Gamma^p_{qk} \Gamma^q_{il}. \tag{12}$$

R^p_{kli} - тензор кривизны, $S^q_{kl} = \Gamma^q_{kl} - \Gamma^q_{lk}$ - тензор.

Аналогично,получаем равенства:

$$u^i_{;l;k} - u^i_{;k;l} = \left(u^i_{,l} + \Gamma^i_{pl} u^p\right)_{;k} - \left(u^i_{,k} + \Gamma^i_{pk} u^p\right)_{;l} =$$

$$= u^i_{,l,k} + \Gamma^i_{pl,k} u^p + \Gamma^i_{pl,k} u^p_{,k} - \left(u^i_{,q} + \Gamma^i_{pq} u^p\right) \Gamma^q_{lk} + \left(u^q_{,l} + \Gamma^q_{pl} u^p\right) \Gamma^i_{qk} -$$

$$- u^i_{,k,l} - \Gamma^i_{pk,l} u^p - \Gamma^i_{pk} u^p_{,l} + \left(u^i_{,q} + \Gamma^i_{pq} u^p\right) \Gamma^q_{kl} - \left(u^q_{,k} + \Gamma^q_{pk} u^p\right) \Gamma^i_{ql} =$$

$$= \left(\Gamma^i_{pl,k} - \Gamma^i_{pk,l} - \Gamma^i_{pq} \Gamma^q_{lk} + \Gamma^q_{pl} \Gamma^i_{qk} + \Gamma^i_{pq} \Gamma^q_{kl} - \Gamma^q_{pk} \Gamma^i_{ql}\right) u^p + S^q_{kl} u^i_{,q} =$$

$$= - \left(\Gamma^i_{pk,l} - \Gamma^i_{pl,k} + \Gamma^i_{ql} \Gamma^q_{pk} - \Gamma^i_{qk} \Gamma^q_{pl}\right) u^p + S^q_{kl} \Gamma^i_{pq} u^p + S^q_{kl} u^i_{,q} =$$

$$= - R^i_{klp} u^p + S^q_{kl} u^i_{;q},$$

окончательно:

$$u^i_{;l;k} - u^i_{;k;l} = - R^i_{klp} + S^q_{kl} u^i_{;q} \tag{13}$$

Замечание 3. В математике, как правило, идут немного другим путем, а именно, сначала определяют абсолютный дифференциал DA^i с помощью формулы

$$DA^i \equiv\sim dA^i + \Gamma^i_{jk} A^j dx^k = \left(A^i_{,k} + \Gamma^i_{jk} A^j\right) dx^k, \tag{14}$$

Абсолютной производной считают коэффициент при dx^k, все полученные результаты при таком подходе к построению анализа тождественны приведенным выше. Тогда более наглядно следующее утверждение: для того чтобы пространство обладало абсолютным параллелизмом, необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль тензора кривизны (напомним, что пространство называется пространством с абсолютным параллелизмом, если результат параллельного перенесения произвольного тензора – вектора не зависит от выбора пути для любых точек пространства). Доказательство этой теоремы общеизвестно, заметим лишь, что оно следует из формулы:

$$\tilde{D}DA^i - D\tilde{D}A^i = -R^i_{klp}A^p\tilde{d}x^k dx^l, \tag{15}$$

которую мы могли бы получить, сворачивая (13) с $\tilde{d}x^k dx^l$.

Все построения, изложенные выше, носят общий характер никак не специфицируясь к заданию пространства, дальше мы исследуем структуру тензора R^p_{ikl}. И так, по определению из (12):

$$R^p_{ikl} = \Gamma^p_{li,k} - \Gamma^p_{lk,i} + \Gamma^p_{qk}\Gamma^q_{li} - \Gamma^p_{qi}\Gamma^q_{lk},$$

используя (10) получаем :

$$\begin{gathered}
R^p_{ikl} = \mathrm{P}^p_{li,k} + L^p_{li,k} - \mathrm{P}^p_{lk,i} + L^p_{lk,i} + \left(\mathrm{P}^p_{qk} + L^p_{qk}\right)(\mathrm{P}^p_{li} + L^q_{li}) - \\
- \left(\mathrm{P}^p_{qi} + L^p_{qi}\right)(\mathrm{P}^p_{lk} + L^q_{lk}) = \mathrm{P}^p_{li,k} - \mathrm{P}^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}\mathrm{P}^q_{li} - \mathrm{P}^p_{qi}\mathrm{P}^q_{lk} + \\
+ L^p_{li,k} - L^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}L^q_{li} + \mathrm{P}^q_{li}L^p_{qk} - \mathrm{P}^p_{qi}L^q_{lk} - \mathrm{P}^q_{lk}L^p_{qi} + \\
+ L^p_{qk}L^q_{li} - L^p_{qi}L^q_{lk}.
\end{gathered}$$

Перед тем, как сделать следующий шаг проанализируем результаты, для этого введем обозначения:

$$\mathrm{P}^p_{ikl} \equiv \mathrm{P}^p_{li,k} - \mathrm{P}^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}\mathrm{P}^q_{li} + \mathrm{P}^p_{qi}\mathrm{P}^q_{lk} - \tag{16}$$

- тензор подобный тензору кривизны Римана, составленный из метрического тензора и его производных.

Далее обозначаем:

$$Z^p_{ikl} \equiv L^p_{qk}L^q_{li} - L^p_{qi}L^q_{lk} \tag{17}$$

- тензор,

$$\mathrm{T}^p_{ikl} \equiv L^p_{li,k} - L^p_{lk,i} + \mathrm{P}^p_{qk}L^q_{li} + \mathrm{P}^q_{li}L^p_{qk} - \mathrm{P}^p_{qi}L^q_{lk} - \mathrm{P}^q_{lk}L^p_{qi} \tag{18}$$

- тензор.

Последнее утверждение очевидно, если принять во внимание тензорный характер величин R^p_{ikl}, но интересно получить этот важный результат другим путем, а именно:

$$\mathrm{T}^p_{ikl} = L^p_{li;k} - L^p_{lk;i} - L^q_{li}\Gamma^p_{qk} + L^p_{qi}\Gamma^q_{lk} + L^p_{lq}\Gamma^q_{ik} + L^q_{lk}\Gamma^p_{qi} - L^p_{qk}\Gamma^q_{li} - L^p_{lq}\Gamma^q_{ki} +$$
$$+\mathrm{P}^p_{qk}L^q_{li} + \mathrm{P}^q_{li}L^q_{qk} - \mathrm{P}^p_{qi}L^q_{lk} - \mathrm{P}^q_{lk}L^p_{qi} =$$
$$L^p_{li;k} - L^p_{lk;i} - L^q_{li}L^p_{qk} + L^p_{qi}L^q_{lk} + L^q_{lk}L^p_{qi} - L^p_{qk}L^q_{li} + L^p_{lq}S^q_{ik},$$

а это очевидно тензор, так как абсолютные производные имеют тензорный характер.

Обозначая:

$$\mathrm{M}^p_{ikl} \equiv \mathrm{T}^p_{ikl} + Z^p_{ikl}, \tag{19}$$

получаем:

$$\mathrm{M}^p_{ikl} = L^p_{li;k} - L^p_{lk;i} + L^p_{lq}S^q_{ik} + L^p_{qi}L^q_{lk} - L^p_{qk}L^q_{li}, \tag{20}$$

у новых обозначениях:

$$R^p_{ikl} = \mathrm{P}^p_{ikl} + \mathrm{M}^p_{ikl} \tag{21}$$

Из (21) видно, что тензор кривизны, в общем, случаи может быть представлен в виде суммы двух тензоров (такое представление не случайно оно связано с физическим описанием поля, грубо говоря, в случае отсутствия не гравитационных полей тензор M^p_{ikl} равен нулю). Хотя формула (20) и дает качественное представление о геометрической структуре она мало удобна, так как в нее снова входят величины Γ^i_{jk}.

Далее установим тождество аналогичное тождеству Риччи-Якоби:

$$R^p_{ikl} + R^p_{kli} + R^p_{lik} = S^p_{ik,l} + S^p_{kl,i} + S^p_{li,k} + \Gamma^p_{qk}S^q_{li} + \Gamma^p_{qk}S^q_{ik} + \Gamma^p_{qi}S^q_{kl} =$$
$$= S^p_{ik;l} + \Gamma^q_{il}S^p_{qk} + \Gamma^q_{kl}S^p_{iq} + S^p_{kl;i} + \Gamma^q_{ki}S^p_{ql} + \Gamma^q_{li}S^p_{kq} + S^p_{li;k} + \Gamma^q_{lk}S^p_{qi} + \Gamma^q_{ik}S^p_{lq} =$$
$$= S^p_{ik;l} + S^p_{kl;i} + S^p_{li;k} + S^p_{lq}S^q_{ik} + S^p_{kq}S^q_{li} + S^p_{iq}S^q_{kl} =$$
$$= R^p_{ikl} + R^p_{kli} + R^p_{lik};$$

В классическом Римановом пространстве геодезические линии обладают известными экстремальными свойствами, в данном случаи аналогические свойства геодезических требуют дополнительных исследований (их нет).

Итак, для неизотропной геодезической линии длина дуги s случай каноническим параметром, для геодезических отнесенных к s имеют место дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}.$$

Рассмотрим задачу о вычислении вариации длины дуги. Пусть задана неизотропная кривая

$$x^i = x^i(t), \quad t \in [t_1; t_2].$$

Вычислим вариацию δS длины кривой S:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)}{2\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}}dt$$

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = g_{ij}\tilde{D}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = 2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\tilde{D}\frac{dx^j}{dt}$$

$$\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = \delta\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^j_{pk}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k$$

$$D\frac{\delta x^j}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x^j + \Gamma^j_{kp}\frac{dx^k}{dt}\delta x^p$$

$$\tilde{D}\frac{dx^j}{dt} = D\frac{\delta x^j}{dt} + S^j_{pk}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k,$$

где через $\tilde{D}$ обозначен абсолютный дифференциал по параметру кривых семейства при постоянном значении t, а D - абсолютный дифференциал отвечающий малому смещению dt по кривой при постоянном параметре семейства, тогда

$$\delta\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right) = 2g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\left(D\frac{\delta x^j}{dt} + S^j_{pk}\frac{dx^p}{dt}\delta x^k\right),$$

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}\frac{dx^i}{ds}D\delta x^j + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}S^j_{pk}\frac{dx^i}{ds}dx^p\delta x^k =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} D\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\delta x^j\right) - \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta x^j + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}S^j_{pk}\frac{dx^i}{ds}dx^p\delta x^k,$$

если концы варьируемой кривой закреплены, тогда

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{ij}S^j_{pk}\ \frac{dx^i}{dt}dx^p\delta x^k - g_{ij}D\frac{dx^i}{dt}\delta\ x^j\right),$$

если, рассматриваемая кривая имеет стационарную длину (аналитически $\delta s = 0$), тогда получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} (g_{ij}\ S^j_{pk}\frac{dx^i}{ds}dx^p\delta x^k - g_{ij}D\frac{dx^i}{ds}\delta\ x^j) = 0.$$

Использую основную лемму вариационного исчисления, отсюда следует:

$$g_{ik}S^k_{pj}\frac{dx^i}{ds}dx^p - g_{ij}D\frac{dx^i}{ds} = 0.$$

Это равенство означает, что касательный вектор ξ^q к нашей кривой переносится по закону $D\xi^q g^{jq} g_{ik} S^k_{pj} \xi^i dx^p$, то есть кривая s не есть геодезической. Обратно, вариация длины геодезической линии с концами, равна:

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} g_{ij} S^j_{pk} \frac{dx^i}{dt} dx^p \delta x^k$$

.

Свойства геодезических в новой геометрии задаваемой с помощью двух тензоров g_{ik} и S^j_{ik} существенно отличаются от аналогичных свойств в геометрии Римана. Доказана теорема.

Теорема 2 (критерий геодезичности) *Для того чтобы не изотропная линия в пространстве заданном при помощи g_{ik} и S^j_{ik} была геодезической, необходимо и достаточно чтобы она имела вариацию дуги δs равную $\int_{t_1}^{t_2} g_{ij} S^j_{pk} \frac{dx^i}{dt} dx^p \delta x^k$.*

Замечание 1 *В случае пространства с аффинной связностью известно, что существует нарушение замкнутости при переходе от оригинала к изображению и, наоборот, в случаи бесконечно малых контуров определяется (с точностью 2 – го порядка относительно τ). Если задан тензором кручения S^k_{ij} в соответствующей точке, тогда если этот зазор обозначить через Ψ^k, то $\Psi^k = S^k_{ij} A^i B^j \tau^2$, где параллелограмм $A^i \tau$ и $B^j \tau$ стягивается в точку при $\tau \to 0$. В данном случаи можно не просто утверждать, что такой зазор существует, а подсчитать его квадрат длины (поскольку существует метрика):*

$$|\Psi|^2 = g_{pq} S^p_{ij} A^i B^j S^q_{kl} A^k B^l \tau^4.$$

Заключение

В работе исследуются свойства пространств аффинной связностью при наличии метрического тензора. Получены разложение связности в виде суму геометрического объекта и некоторого тензора, что позволило исследовать природу тензора кривизны, установить аналоги тождества Риччи – Якоби и рассмотреть построение геодезических линий.

Дальнейшее исследования возможны в направлении построение теории гиперплоскостей, гиперповерхностей и рассмотрения вложенных объектов низших размерностей.

Список литературы

1. Agricola I. Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory / I. Agricola // Communications in Mathematical Physics. – 2003. – V. 232. – P.535–563.
2. Agricola I. On the holonomy of connections with skew - symmetric torsion / I. Agricola, T.Friedrich // Mathematische Annalen. – 2004. – V. 328. – P.711–748.
3. Agricola I. A note on flat metric connections with antisymmetric torsion / I. Agricola, T. Friedrich // Differential Geometry and its Applications. – 2010. – V. 28. – P.480–487.
4. Alexandrov B. Vanishing theorems on Hermitian manifolds / B.Alexandrov, S.Ivanov // Differential Geometry and Applications. – 2001. V. 14(3). – P.251–265.
5. Bonneau G. Compact Einstein-Weyl four-dimensional manifolds / G. Bonneau // Classical and Quantum Gravity. – 1999. – V. 16. – P.1057–1068.
6. Cartan E. On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism / E. Cartan, J. Schouten // Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. – 1926. – V.29. – P.933–946.
7. Cartan E. On the geometry of the group manifold of simple and semisimple groups / E. Cartan, J. Schouten // Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings. Series A. – 1926. – V. 29. – P.803–815.
8. Cavalcanti G. Reduction of metric structures on Courant algebroids / G. Cavalcanti // Journal of Symplectic Geometry. – 2006. – V.4 (3). – P.317–343.
9. Jost J. Geometry and Geometric Analysis / J. Jost // Springer-Verlag, Berlin, 4th edition. – 2005.
10. Pedersen H. Riemannian submersions, four-manifolds and Einstein-Weyl geometry / H. Pedersen, A. Swann // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1993. – V. 66. – P.381–399.
11. Sean Dineen. Multivariate calculus and geometry. 3rd ed. Springer Undergraduate Mathematics Series. Berlin. – 2014.– Springer (ISBN 978-1-4471-6418-0/pbk; 978-1-4471-6419-7/ebook). xi, 259 p.
12. Vargas Josй G. Differential geometry for physicists and mathematicians. Moving frames and differential forms: From Euclid past Riemann (to appear). – 2014. – Zbl 06272954 Hackensack, NJ: World Scientific (ISBN 978-981-4566-39-1/ hbk; 978-981-4566-41-4/ebook).
13. Bredies Kristian. Symmetric tensor fields of bounded deformation. – 2013. – Zbl 06226689 Ann. Mat. Pura Appl. (4) 192, N. 5. - P.815-851.
14. Dereli T. An Einstein-Hilbert action for axi-dilaton gravity in four dimensions / T. Dereli, Tucker W. Robin // Class. Quantum Grav. – 1995. – 12 L31.
15. Alberto S. A geometrical action for dilaton gravity / S. Alberto // 1995 Class. Quantum Grav. 12 L85.
16. Manoff S. Frames of reference in spaces with affine connections and metrics / S. Manoff // 2001 Class. Quantum Grav. 18 1111.

Н.И. Яременко

ММЦ НАНУ

Киев, Украина

E-mail: math.kiev@gmail.com,tga_56@mail.ru

N.I. Yaremenko

Kyiv MMC NANU, Ukraine.

Geometric structure together generated by metric and torsion

This article discusses the geometry generated jointly and agreed by the metric tensor and the torsion tensor. The properties of the space described by means of the metric and torsion. The study of the curvature tensor has been made. Ricci – Jacobi identity analogs have been obtained. We have also researched the geodesic lines equation.
Metric tensor, torsion tensor, curvature tensor, Ricci – Jacobi identity, geodesic lines equation.

Q-алгебры основных типов почти эрмитовых и почти контактных метрических многообразий

О. Е. Арсеньева В. Ф. Кириченко

Аннотация Роботу присвячено дослідженню узагальнених майже ермітових многовидів з приєднаними Q-алгебрами, зокрема з абелевими, K- та A-алгебрами. Досліджено зв'язок між геометричним класом многовиду та приєднаної до нього Q-алгебри. Також вивчаються Q-алгебри на майже контактних многовидах.

Ключевые слова Узагальнений майже ермітовий многовид · Q-алгебры · майже контактні многовиди

УДК 514.7

1 Вступление

Понятия обобщенного почти эрмитова (короче, $GA\mathcal{H}$-) многообразия и присоединенной к нему Q-алгебры сформировались в 80-е годы минувшего столетия и изучались в ряде работ (см., например, [1] — [5]). Теория $GA\mathcal{H}$-структур представляет интерес потому, что позволяет с единых позиций взглянуть на такие, на первый взгляд, различные предметы, как, например, эрмитова и контактная геометрии.

Напомним определения $GA\mathcal{H}$-многообразия и присоединенной Q-алгебры [4].

Определение 1 *Обобщенной почти эрмитовой структурой ранга r на гладком (класса C^∞) многообразии M называется совокупность* $\{g =$

$\langle\cdot,\cdot\rangle; J_1,\ldots,J_r; T\}$, где g – псевдориманова метрика на M, $J_1,\ldots,J_r$ – линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа $(1,1)$ на M, называемые структурными эндоморфизмами, или структурными аффинорами, имеющие вещественные или чисто мнимые собственные значения, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным эндоморфизмом образующими некоторого подмодуля $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(J_1,\ldots,J_r)\subset\mathfrak{X}(M)$, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T – тензор типа $(2,1)$ на M, называемый композиционным тензором. При этом должны выполняться условия:

1. $\langle J_kX,Y\rangle+\langle X,J_kY\rangle=0$;
2. $T(J_kX,Y)=T(X,J_kY)=-J_kT(X,Y)$;
3. $\langle T(X,Y),Z\rangle+\langle Y,T(X,Z)\rangle=0$;
4. $\cap_{k=1}^{r}\ \mathit{ker}\ J_k\subset\ \mathit{ker}\ T$;
5. $J_i\circ J_j=J_j\circ J_i;\quad (i,j,k=1,\ldots,r)$.

Многообразие, на котором фиксирована $GA\mathcal{H}$-структура ранга r, называется $GA\mathcal{H}$-многообразием ранга r. Если $\mathfrak{M}=\cap_{i=1}^{r}\ker J_i$ – k-мерное распределение, число k называется дефектом $GA\mathcal{H}$-структуры и обозначается символом $\mathfrak{d}$.

2 Q-алгебры, присоединенные к $GA\mathcal{H}$-многообразиям

Пусть M – $GA\mathcal{H}$-многообразие. В $C^\infty(M)$-модуле $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей многообразия M вводится бинарная операция "*" по формуле

$$X*Y=T(X,Y);\qquad X,Y\in\mathfrak{X}(M).$$

Из Определения 1 легко следует, что

$$1.\ J_kX*Y=X*J_kY=-J_k(X*Y);\quad 2.\ \langle X*Y,Z\rangle+\langle Y,X*Z\rangle=0.$$

Таким образом, в модуле $\mathfrak{X}(M)$ возникает алгебраическая структура, называемая Q-алгеброй, присоединенной к $GA\mathcal{H}$-многообразию M, а также связность $\tilde{\nabla}=\nabla+T$, называемая *присоединенной связностью.* Кроме того, на многообразии M канонически определены r дифференциальных 2-форм

$$\Omega_i(X,Y)=\langle X,J_iY\rangle;\qquad i=1\ldots r,$$

. называемых фундаментальными формами структуры. Важнейшие примеры $GA\mathcal{H}$-структур на многообразии дает понятие метрической f-структуры Яно, т.е. пары $(f, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, где f – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – (псевдо)риманова метрика на M, причем

$$1.\ f^3 + f = 0; \qquad 2.\ \langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Такая пара канонически порождает $GA\mathcal{H}$-структуру $\mathcal{S} = (g, J, T)$ ранга 1 на M, где

$$g = \langle\cdot,\cdot\rangle; \quad J = f; \quad T(X,Y) = \frac{1}{4}(f\nabla_{fX}(f)fY - f\nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \tag{1}$$

или, (что равносильно): $T(X,Y) - T(Y,X) = -f^2N_f(f^2X, f^2Y)$, $\quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, где $N_f(X,Y) = \frac{1}{4}(f^2[X,Y] - f[fX,Y] - f[X,fY] + [fX,fY])$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма f. В случае $\mathfrak{d} = 0$ $GA\mathcal{H}$-структура $\mathcal{S}$ отождествляется с почти эрмитовой структурой $(\langle\cdot,\cdot\rangle, J)$, а в случае $\mathfrak{d} = 1$ – с почти контактной метрической структурой $(\xi, \eta, f, \langle\cdot,\cdot\rangle,)$, где ξ – единичный вектор подпространства $\mathfrak{M} = \ker f$, η – ковектор, дуальный вектору ξ (см. [4])

Определение 2 *Q-алгебра V называется:*

– *абелевой, или коммутативной Q-алгеброй, если $X * Y = 0 \quad (X, Y \in V)$;*
– *K-алгеброй, или антикоммутативной Q-алгеброй, если $X * Y = -Y * X \quad (X, Y \in V)$;*
– *A-алгеброй, или псевдокоммутативной Q-алгеброй, если*

$$\langle X * Y, Z\rangle + \langle Y * Z, X\rangle + \langle Z * X, Y\rangle = 0, \quad (X, Y, Z \in V).$$

Почти эрмитова структура (g, J); $J^2 = -\mathrm{id}$; $g(X,Y) = g(JX, JY)$ называется:

– эрмитовой, или интегрируемой, если $\nabla_X(f)Y - \nabla_{fX}(f)(fY) = 0$;
– G_1-структурой, если $\nabla_X(f)X - \nabla_{fX}(f)(fX) = 0$;
– G_2-структурой, если $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle - \langle Y, \nabla_{fX}(f)fZ\rangle) = 0$.

Теорема 1 *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с абелевой присоединенной Q-алгеброй совпадает с классом эрмитовых многообразий.*

Доказательство Пусть M – $GA\mathcal{H}$-многообразие указанного вида. Тогда, в прежних обозначениях, с учетом (1) имеем:

$$0 = T(X,Y) = \frac{1}{4}(f\nabla_{fX}(f)fY - f\nabla_{f^2X}(f)f^2Y),$$

С учетом невырожденности эндоморфизма f имеем отсюда:$\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y = 0$. Меняя здесь fX на X, а fY на Y, получаем, что

$$\nabla_X(f)Y - \nabla_{fX}(f)(fY) = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

а значит, M – эрмитово многообразие. Проводя выкладки в обратном порядке, убеждаемся, что если M – эрмитово многообразие, то Q-алгебра индуцированной на M $GA\mathcal{H}$-структуры абелева.

Аналогично доказываются следующие две теоремы:

Теорема 2 *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с присоединенной K-алгеброй совпадает с классом G_1-многообразий.*

Доказательство Дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы, если в нем положить $Y = X$.

Теорема 3 *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с присоединенной A-алгеброй совпадает с классом G_2-многообразий.*

Доказательство Пусть M – G_2-многообразие. Тогда $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle - \langle Y, \nabla_{fX}(f)fZ\rangle) = 0$. Заменив X на fX, Y на fY, а Z на fZ, после простых преобразований получим: $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, T(X, Z)\rangle = 0$. Следовательно, присоединенная Q-алгебра псевдокоммутативна.Очевидно, верно и обратное.

Почти эрмитова структура $(f, g = \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle)$ называется:

– квази-келеровой, если $\nabla_X(f)Y + \nabla_{fX}(f)fY = 0$;
– приближенно келеровой, если $\nabla_X(f)Y = -\nabla_Y(f)X = 0$;
– почти келеровой, если $d\Omega = 0$;
– келеровой, если $\nabla f = 0$; $\qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 4 *Квази-келерово многообразие имеет абелеву присоединенную Q-алгебру тогда и только тогда, когда оно является келеровым многообразием.*

Квази-келерово многообразие имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру тогда и только тогда, когда оно является приближенно келеровым многообразием.

Квази-келерово многообразие имеет псевдокоммутативную присоединенную Q-алгебру тогда и только тогда, когда оно является почти келеровым многообразием.

Доказательство Пусть M – квази-келерово многообразие. Согласно его определению,

$$\nabla_X(f)Y = -\nabla_{fX}(f)fY = \nabla_{f^2X}(f)f^2Y.$$

Поэтому

$$(4T(X,Y) = f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y) = -2f\nabla_X(f)Y,$$

и, значит,

$$T(X,Y) = -\frac{1}{2}f\nabla_X(f)Y. \tag{2}$$

В частности, $T(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \nabla_X(f)Y = 0; \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, что и доказывает первое утверждение.

Далее, хорошо известно, что классы приближенно келеровых и почти келеровых многообразий являются подклассами класса квази-келеровых многообразий (см., например, [9]), а значит, на этих многообразиях выполняется тождество (2), откуда сразу же следует второе утверждение теоремы.

Наконец, если $d\Omega = 0$, то по Теореме 9 присоединенная Q-алгебра псевдокоммутативна. Проделывая выкладки в обратном направлении, убеждаемся в справедливости обратного.

3 Q-алгебры и почти контактные структуры

Перейдем к рассмотрению основной цели нашего исследования – изучению Q-алгебр, присоединенных к $GA\mathcal{H}$-многообразиям ранга 1 дефекта 1, порожденным почти контактными метрическими структурами.

Определение 3 *Почти контактной метрической структурой на многообразии M называется четверка $(\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где ξ – векторное поле на M, называемое характеристическим, η – дифференциальная 1-форма на M, называемая контактной формой, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом, g – риманова метрика на M. При этом:*

$$1.\ \eta(\xi) = 1; \quad 2.\ \eta \circ \Phi = 0; \quad 3.\ \Phi(\xi) = 0;$$
$$4.\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \quad 5.\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y). \tag{3}$$

Существует в известном смысле полная классификация $\mathcal{AC}$-структур, содержащая 2048 классов этих структур. Эта классификация является контактным аналогом известной классификации Грея – Хервеллы почти эрмитовых структур, и содержащей всего 16 структур [9]. Но, несмотря на практическую необозримость классификации $\mathcal{AC}$-структур, фактическому изучению подвергаются в основном следующие 12 классов $\mathcal{AC}$-структур:

1. нормальная, если $N + \frac{1}{2} d\eta \otimes \xi = 0$;
2. контактная метрическая, если $d\eta = \Omega$;
3. K-контактная, если $(d\eta = \Omega)$ & (η – форма Киллинга);
4. квази-сасакиева, если она нормальна и имеет замкнутую форму Ω;
5. локально конформно квази-сасакиева;
6. сасакиева, если она нормальна и контактна, или, что равносильно, если $\nabla_X(f)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$;
7. приближенно сасакиева, $\nabla_X(f)X = g(X,X))\xi - \eta(X)X$;
8. структура Кенмоцу, если $\nabla_X(f)Y = g(fX,Y)\xi - \eta(Y)fX$;
9. косимплектическая, если $\nabla f = 0$;
10. почти косимплектическая, если $d\Omega = d\eta = 0$;
11. слабо косимплектическая, если $\nabla_X(f)X = 0$;
12. точнейше косимплектическая, если $\nabla_X(f)X = d\eta = 0$.

Определение 4 *$\mathcal{AC}$-структура, заданная на многообразии M, называется* локально конформно квази-сасакиевой *(короче, $LC\mathcal{QS}$-)* структурой, *если существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ многообразия M и система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}\}_{\alpha\in A}$ гладких функций такие, что $\{J|_{U_\alpha}, \tilde{g}_\alpha = e^{2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ – квази-сасакиева структура для любого $\alpha \in A$. Гладкое многообразие, на котором фиксирована $LC\mathcal{QS}$-структура, называется* $LC\mathcal{QS}$-многообразием.

Теорема 5 *Локально конформно квази-сасакиевы многообразия имеют абелеву присоединенную Q-алгебру и риманову присоединенную связность.*

Доказательство В [6] доказано, что для локально конформно квази-сасакиева многообразия

$$\nabla_X(f)Y = -\Omega(X,Y)\alpha^\sharp + \langle X,Y\rangle f(\alpha^\sharp) - \alpha(Y)fX + \alpha(fY)X +$$
$$+\langle CX,Y\rangle\xi - \eta(Y)CX,$$

где α – контактная форма Ли, $C(X) = \nabla_{fX}\xi - \alpha(\xi)fX$ – самосопряженный эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, коммутирующий со структурным эндоморфизмом f, $\sharp$ – оператор дуальности. Подставляя это соотношение в (1), с учетом того, что $f^3 = -f$, $f^4 = -f^2$, $f^5 = f$, получим:

$$\begin{gathered}
4T(X,Y) = f\nabla_{fX}(f)fY - f\nabla_{f^2X}(f)f^2Y = \\
= -\Omega(fX,fY)f(\alpha^\sharp) + \langle fX,fY\rangle f(\alpha^\sharp) - \alpha(fY)f^2X + \alpha(f^2Y)fX \\
+\langle CfX,fY\rangle\xi - \eta(fY)CfX, +\Omega(f^2X,f^2Y)\alpha^\sharp - \langle f^2X,f^2Y\rangle f(\alpha^\sharp) \\
+\alpha(f^2Y)f^3X - \alpha(f^3Y)f^2X - \langle Cf^2X,f^2Y\rangle\xi + \eta(f^2Y)Cf^2X.
\end{gathered} \tag{4}$$

Вычислим каждое слагаемое этой суммы, заметив, что слагаемые с номерами 5, 6, 11 и 12, в силу аксиом (3) почти контактной структуры, равны нулю:

1. $-\Omega(fX, fY)f(\alpha^\sharp) = -\langle f(X), f^2Y\rangle f(\alpha^\sharp) = -\langle X, fY\rangle f(\alpha^\sharp)$;
2. $\langle fX, fY\rangle f^2(\alpha^\sharp) = -\langle X, f^2Y\rangle f^2(\alpha^\sharp)$;
3. $-\alpha(fY)f^3X = \alpha(fY)fX$;
4. $\alpha(f^2Y)f^2X$;
7. $\Omega(f^2X, f^2Y)f(\alpha^\sharp) = \langle f^2X, f^3Y\rangle f(\alpha^\sharp) = \langle X, fY\rangle f(\alpha^\sharp)$;
8. $-\langle f^2X, f^2Y\rangle f^2(\alpha^\sharp) = \langle X, f^2Y\rangle f^2(\alpha^\sharp)$;
9. $\alpha(f^2Y)f^4X = -\alpha(f^2Y)f^2X$;
10. $-\alpha(f^3Y)f^3X = -\alpha(fY)fX$.

Складывая правые части этих соотношений, с учетом (4) получаем, что $T = 0$. Следовательно, присоединенная Q-алгебра – абелева, а присоединенная связность – риманова.

Поскольку класс квази-сасакиевых многообразий содержит класс сасакиевых и класс косимплектических многообразий и, в свою очередь, является подклассом класса $LC\mathcal{QS}$-многообразий, а, кроме того, в этот же класс $LC\mathcal{QS}$-многообразий входит класс многообразий Кенмоцу [8], справедливо

Следствие 1 *Квази-сасакиевы, в частности, сасакиевы и косимплектические многообразия, а также многообразия Кенмоцу, имеют абелеву присоединенную Q-алгебру и риманову присоединенную связность.*

Теорема 6 *Нормальная $\mathcal{AC}$-структура имеет абелеву присоединенную Q-алгебру и риманову присоединенную связность.*

Доказательство В [7] доказано, что $\mathcal{AC}$-структура (ξ, η, f, g) нормальна тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(f)(fY) - \nabla_{fX}(f)(f^2Y) = 0.$$

Заменяя здесь X на fX и действуя на обе части полученного тождества оператором f, с учетом (1) получаем, что $T = 0$.

Замечание 1 *Абелевость присоединенной Q-алгебры четырех типов $\mathcal{AC}$-структур, отмеченная в Следствии 1 и вытекающая из Теоремы 5, в равной мере вытекает и из Теоремы 6.*

Замечание 2 *Из пяти аксиом, определяющих $GA\mathcal{H}$-многообразие, в случае абелевости присоединенной Q-алгебры, для $GA\mathcal{H}$-многообразия ранга 1 дефекта 1 остается одна:*

$$\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0.$$

Таким образом, $GA\mathcal{H}$-геометрия каждого из шести рассмотренных классов AC-многообразий совпадает с геометрией риманова многообразия M^{2n+1}, оснащенного дифференциальной 2-формой Ω ранга $2n$.

Теорема 7 *Слабо косимплектическая, в частности, точнейше косимплектическая AC-структура имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Доказательство По определению, AC-структура слабо косимплектична тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(f)X = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом этого, $4T(X,X) = f(\nabla_{fX}(f)fX) - f(\nabla_{f^2X}(f)f^2X) = 0$. Поляризуя это тождество, получим, что

$$T(X,Y) + T(Y,X) = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 8 *Приближенно сасакиева структура имеет антикоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Доказательство По определению, AC-структура приближенно сасакиева тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X(f)X = g(X,X)\xi - \eta(X)X; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

С учетом этого,

$$\begin{aligned} 4T(X,X) &= f(\nabla_{fX}(f)fX) - f(\nabla_{f^2X}(f)f^2X) = \\ &= g(fX,fX)f(\xi) - \eta(fX)fX - g(f^2X,f^2X)f(\xi) + \eta(f^2X)f^2X = 0. \end{aligned}$$

Поляризуя это тождество, получим, что

$$T(X,Y) + T(Y,X) = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Теорема 9 *$GA\mathcal{H}$-многообразие ранга 1 дефекта (0 либо 1) с замкнутой фундаментальной формой имеет псевдокоммутативную присоединенную Q-алгебру.*

Доказательство Напомним, что $\Omega(X,Y)=\langle X, fY\rangle$, а значит,

$$\nabla_X(\Omega)(Y,Z)=\langle Y,\nabla_X(f)Z\rangle.$$

С учетом этого находим: $d\Omega(X,Y,Z) = \mathfrak{S}_{XYZ}\nabla_X(\Omega)(Y,Z) = \mathfrak{S}_{XYZ}\langle Y,\nabla_X(f)Z\rangle$. Пусть $d\Omega = 0$. Тогда $\mathfrak{S}_{XYZ}\langle Y,\nabla_X(f)Z\rangle = 0$. Подставим вместо $\{X,Y,Z\}$ сначала $\{fX,fY,fZ\}$, а потом $\{f^2X,fY,f^2Z\}$. Вычитая второй результат из первого, получим, что

$$\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle fY,\nabla_{fX}(f)fZ\rangle-\langle fY,\nabla_{f^2X}(f)f^2Z\rangle)=0,$$

или

$$\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y,f(\nabla_{fX}(f)fZ-\nabla_{f^2X}(f)f^2Z\rangle)=0.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y,T(X,Z)\rangle)=0$, т.е.

$$\langle T(X,Y),Z\rangle+\langle T(Y,Z),X\rangle+\langle T(Z,X),Y\rangle=0.$$

С учетом этой теоремы и перечня на стр. 39 получаем

Следствие 2 *Следующие АС-многообразия имеют псевдокоммутативную присоединенную Q-алгебру:*

- *Контактные метрические,*
- *K-конактные,*
- *Почти косимплектичекие.*

Список литературы

1. Кириченко В.Ф. Об однородных римановых пространствах с инвариантной тензорной структурой // Докл. АН СССР, т. 252, No 2, 1980, с.291-293.
2. Кириченко В.Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 47, No 6, 1983, с. 1208 - 1223.
3. Кириченко В.Ф. Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 48, No 4, 1984, с. 711-734.
4. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники ВИНИТИ СССР. Проблемы геометрии. Т. 18. 1986. С. 25-71.
5. Kiritchenko V.F. Sur le geometrie des varietes approximativement cosimplectiques // C.R. Acad.Sci., Paris, t.295, No 1, p. 673-676.
6. Кириченко В.Ф., Баклашова Н.С.Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты // Матем. заметки, т. 82, No 3, с. 347-365.
7. Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Матем. сб., т.8, No 193, 2002, с. 1173-1201.
8. Кириченко В.Ф. О геометрии мноогобразий Кенмоцу // Докл. РАН, т.380, No 5, 2001, с. 585-587.
9. Gray A., Hervella L. The sixteen classes of Almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. pure ed appl., v.123, No 4, 1980, p. 35-58.

О. Е. Арсеньева
Московский Педагогический Государственный университет, Москва,Россия.
E-mail: highgeom@yandex.ru

В. Ф. Кириченко
Московский Педагогический Государственный университет, Москва,Россия.
E-mail: highgeom@yandex.ru

Olga Arsenyeva & Vadim Kirichenko

Conformal Kahler spaces and conformal transformations preserving the stress-energy tensor

This paper is devoted to so called Generalized Almost Hermitian ($GA\mathcal{H}$-) manifolds with adjoint Q-algebras. We consider links between manifold's geometric class and adjoint Q-algebra. Particularly, we also explore Almost Contact ($A\mathcal{C}$-) manifolds with adjoint Q-algebras.

Топологія сім'ї векторних полів на поверхні

О.О. Пришляк, І.М. Іванюк

Анотація Досліджуються топологічні властивості сім'ї векторних полів загального положення на поверхнях використовуючи поняття атомів та молекул функції за А.Т.Фоменко, описано всі можливі переходи для атомів, складність яких не перевищує 3

Ключові слова Атоми та молекули функцій Морса · деформація векторного поля · f-граф · топологічна еквівалентність · топологічна класифікація

УДК 517.91

Вступ

В роботі досліджуються топологічні властивості сім'ї векторних полів. Поле на поверхні у загальному випадку є полем Морса-Смейла. Для задання цього поля використовуються атоми, уведені А.Т. Фоменком для функцій Морса. Виявляється, що вони є також повним топологічним інваріантом векторного поля Морса-Смейла без замкнених траєкторій на замкненій поверхні [1]. Різні застосування атомів і молекул містяться також у робтах А.В.Болсінова, С.В.Матвєєва, А.Т.Фоменка [2], В.В. Шарка та А.А.Ошемкова[3].

Основною метою роботи є дослідити топологічні властивості сім'ї векторних полів Морса-Смейла за допомогою атомів і молекул; показати, що деформації поля відповідають переходи між f-атомами за допомогою додавання та скорочення ручок; описати всі можливі переходи для атомів, складність яких не перевищує 3.

1 Атоми та f-графи за Фоменком

Означення 1 Атомом *називається окіл P^2 критичного шару, який задається нерівністю $c - \epsilon \leq f \leq c + \epsilon$ для достатньо малого ϵ, розшаровану на лінії рівня функції f і яка розглядається з точністю до пошарової еквівалентності $P^2 = \{x : -\epsilon \leq f(x) - c \leq \epsilon\}$. Атом називається простим, якщо функція Морса в парі - проста. Решта атомів називаються складними.*

Означення 2 *Скінченний зв'язний граф Γ називається* f-графом, *якщо він задовольняє наступні умови:*

1) Всі вершини графа Γ мають степінь 3.

2) Деякі із ребер графа Γ орієнтовані, причому до кожної вершини графа Γ прилягає рівно два орієнтованих ребра, із яких одне входить в вершину, а інше виходить з неї. Причому ця вершина може бути початком і кінцем одного і того ж орієнтованого ребра , якщо орієнтоване ребро є петлею.

Означення 3 *Два f-графи називаються* еквівалентними, *якщо один можна отримати з іншого послідовністю наступних операцій. Дозволяється замінювати орієнтації всіх ребер якогось циклу на протилежні. Класи еквівалентності f-графів називаються f-інваріантами.*

Існує взаємно однозначна відповідність між f-інваріантами і f-атомами.

Покажемо, як ідея атомів і молекул може бути застосована до траєкторної класифікації потоків Морса-Смейла на замкнених двовимірних поверхнях.

Векторні поля v_1 і v_2, задані на замкнених поверхнях M_1 і M_2, називаються *топологічно траєкторно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $h : M_1 \to M_2$, що переводить траєкторії векторного поля v_1 в траєкторії векторного поля v_2 зі збереженням орієнтації на траєкторіях.

Означення 4 *Векторне поле v на многовиді M називається* грубим, *якщо при малому збуренні поля v топологічна поведінка його траєкторій не змінюється, тобто після збурення поле топологічно траєкторно еквівалентне початковому.*

Згідно теореми М.Пейксото [4], [5], [6] грубими векторними на двовимірній поверхні є поля Морса-Смейла. У випадку двовимірної поверхні їх можна визначити наступним чином

Означення 5 *Векторне поле на замкненій двовимірній поверхні M^2 називається* полем Морса-Смейла, *якщо*

1) v має скінченне число особливих точок і періодичних траєкторій, причому всі вони гіперболічні;

2) не існує траєкторій, що йдуть із сідла в сідло;

3) для кожної траєкторії поля v її α-граничні і ω-граничні множини є або особливою точкою, або періодичною траєкторією, тобто граничним циклом.

Опишемо класифікацію потоків Морса-Смейла без періодичних траєкторій. Будемо називати їх потоками Морса.

Потоки Морса мають ще один природній опис. Це градієнтно-подібні потоки без сепаратрис, що йдуть із сідла в сідло. Тут потік називається градієнтно-подібним, якщо він топологічно-еквівалентний потоку $grad\ f$ для деякої функції Морса f і деякої рімановоі метрики g_{ij} на многовиді M.

Кожному потоку Морса на двовимірній поверхні M^2 можна природнім чином можна поставити у відповідність деякий f-граф, або f-атом, таким чином, що відповідність між f-атомами і класами топологічної траєкторної еквівалентності потоків Морса буде взаємно однозначною.

Опишемо цю конструкцію.

Всі особливі точки потоку Морса можна розділити на три типи: стоки, витоки в сідла. Крім того, потік має сепаратриси, що з'єднує стоки і витоки з сідлами. Кожному сідлу при цьому відповідає дві вхідні і дві вихідні сепаратриси.

Розглядаємо граф, вершинами якого є витоки, а ребрами стійкі многовиди сідлових точок. Замінимо кожну вершину колом, що є границею регулярного околу витоку. Отримаємо кола, які з'єднані відрізками стійких многовидів сідлових точок. Це і задає атом поля Морса-Смейла

2 Атоми полів Морса-Смейла

Ми розглядаємо тільки градієнтно-подібні поля Морса-Смейла, тобто поля без замкнених траєкторій.

Нехай M- замкнена двовимірна поверхня з деякою рімановою метрикою.

Поставимо у відповідність кожній функції f, сідлові точки якої лежать на одному рівні, її градієнтний потік відносно вибраної ріманової метрики. Це співставлення встановлює природню взаємно-однозначну відповідність між класами пошарової еквівалентності таких функцій на поверхні і класами топологічно траєкторної еквівалентності потоків Морса.

Ця взаємно-однозначна відповідність не залежить від вибору ріманової метрики на поверхні [1].

Класи пошарової еквівалентності функцій з вказаною властивістю взаємно-однозначно відповідають f-атомам.

Клас T_i векторного поля - це всі векторні поля, у яких не більше ніж "i" сідлових точок.

Означення 6 *Дві сім'ї X_t і Y_t* топологічно еквівалентні*, якщо існує гомеоморфізм $h:[0;1]\to[0;1]$ та існує сукупність гомеоморфізмів $\varphi_t : M \to M$, $t\in[0;1]$, таких що вони є топологічними еквівалентностями між векторними полями X_t та векторними полями $Y_{h(t)}$.*

Нехай M - n-вимірний многовид з краєм M

Означення 7 *n-вимірний диск H називається* ручкою індексу λ *(або λ-*ручкою*), якщо існує гомеоморфізм $\varphi : D^\lambda \times D^{n-\lambda} \to H$ такий, що $\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = H \cap M \subset \partial M$.*

Означення 8 Розкладом замкненого многовиду M на ручки *називається розклад $M = H_0 \bigcup H_1 \bigcup ... \bigcup H_m$ де H_0 - n-вимірний диск і H_i - ручка на $M_{i-1} = \bigcup_{j<i} H_j$.*

При роботі з ручками будемо використовувати операції ковзання ручок та скорочення ручок [8].

Заклеївши диском ручку на атомі B^1 ми отримаємо A.

A отримаємо з B^2 скороченням ручки.

B^1 отримаємо з D_1^1 заклеївши одну ручку диском.

B^2 отримаємо з D_1^2 застосувавши властивість скорочення ручок.

Від C_2 до D_2 можна перейти ковзанням ручки.

D_2 отримуємо з H_2^1 заклеївши ручку диском.

f-графи складності 1

Атом А - це просто точка

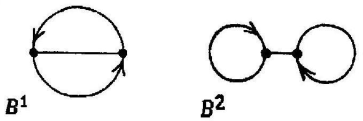

Рис. 1

f-графи складності 2

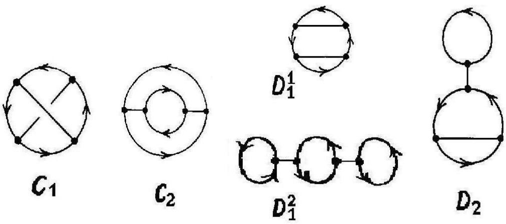

Рис. 2

Від H_2^1 переходимо до D_1^1 скоротивши ручку.

З H_2^1 отримується F_2^1 ковзанням ручки.

Аналогічно ковзанням ручки з H_2^1 ми отримуємо G_2^1.

Заклеївши диском ручку в атомі H_2^2 ми отримаємо D_1^2.

Використавши властивість скорочення ручок до H_2^2 ми отримаємо D_2.

Ковзанням ручки відбувається перехід від H_2^2 до F_2^2, а також від H_2^2 до G_2^2.

Таким чином, проводячи аналогічні міркування з рештою f-графів, отримаємо граф G, зображений на рис. 4. В ньому вершинам відповідають f-атоми, а ребрам – описані деформації атомів за допомогою ковзання або скорочення ручок.

Згідно [1] існує один атом (A), що відповідає локальному екстремуму для сідлових точок, існує два атоми складності 1, 4 атоми складності 2 і 10 атомів складності 3. Вони зображені на рис. 1-3.

3 Сім'я векторних полів

Теорема 1 *Якщо дві сім'ї топологічно еквівалентні в класі T_i, то вони задають однакові шляхи на графі G.*

Доведення. Кожному t відповідають вершини на графі G, крім скінченного числа t_k, в яких проходить зміна від однієї вершини до іншої, цим t_k

f-графи складності 3

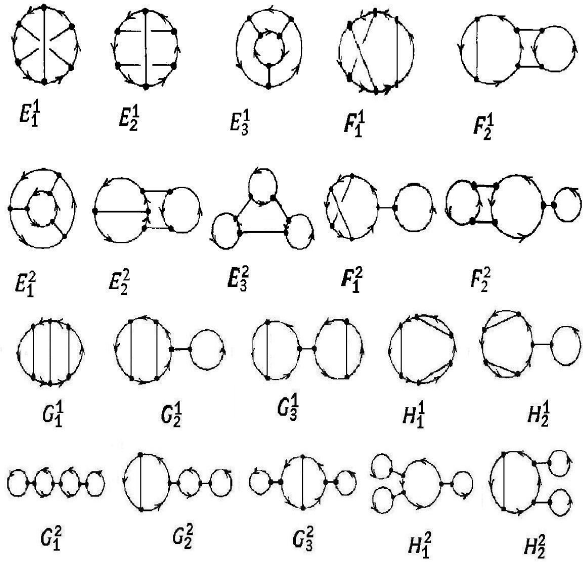

Рис. 3

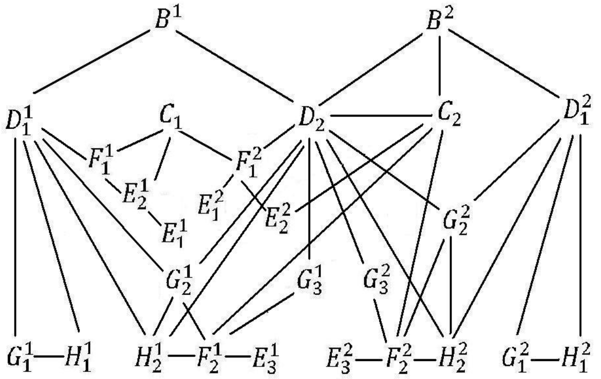

Рис. 4

відповідають ребра, що з'єднують ці вершини. Тоді оскільки $Y_{h(t)}$ топологічно еквівалентний X_t, то їм відповідають однакові вершини або ребра у випадку, коли $t = t_k$. Отже, у відповідних шляхів однакові вершини і ребра, тобто вони збігаються.

Проводячи міркування в зворотньому порядку ми отримаємо теорему 2.

Теорема 2 *Два поля класу T_i можна з'єднати шляхом (сім'єю векторних полів) в класі T_i, якщо існує шлях на графі G, який з'єднує відповідні вершини.*

Нехай кількість рухів від одного атома до іншого - n. Занумеруємо можливі рухи від одного атома до іншого цілими числами. Ці числа будемо називати оснащенням. Шлях на графі, у кожного ребра якого задане оснащення, будемо називати оснащенним.

Теорема 3 *Якщо двом сім'ям відповідають однакові оснащені шляхи на графі, то вони топологічно еквівалентні.*

Доведення. Ми можемо намалювати n кратних ребер, то тоді кожному шляху на графі буде відповідати одна сім'я векторних полів.

При деформації векторного поля можливі ситуації:

1) топологічний тип векторного поля не змінюється, тоді ця сім'я задається атомом за Фоменком;

2) проходить біфуркація, тобто змінюється топологічний тип. В цьому випадку ця деформація задається парою атомів, тобто якщо атоми розглядати як вершини деякого графа, то цю деформацію будемо зображати як ребро між відповідними вершинами. Далі зображаємо всі такі можливі біфуркації. Якщо відбувається послідовно декілька біфуркацій, то ця послідовність задає послідовність ребер, тобто шлях на побудованому графі.

Висновок

В роботі досліджені топологічні властивості сім'ї векторних полів, описано всі можливі переходи для атомів, складність яких не перевищує 3. Отримані результати можуть бути застосовані при вивченні контактних структур на 3-вимірних многовидах, а саме, якщо на такому многовиді задана функція Морса, то якщо між двома регулярними рівнями такої функції немає критичних рівнів, то виникає сім'я векторних полів на поверхні, що в загальному випадку є полями Морса-Смейла.

Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. - Ижевск: "Удмуртский университет 1999. - 444с.

2. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // УМН 1990, т. 45, №2. - с.49-77.
3. Ошемков А. А., Шарко В.В., О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях, Матем. сб., 1998, Т. 189, №8. - с. 93-140.
4. Peixoto M.M. On the classification of flows of 2-manifolds. // In: Dynamical System. Proc. Symp. Univ. of Bahia, New York-London: Acad. Press., 1973. - pp. 389-419.
5. Peixoto M.M. Structural stability on two-dimensional manifolds. I, II. // Topology, 1962, v.1, №2; Topology, 1963, v.2, №2. - pp. 179-180.
6. Peixoto M.C. Peixoto M.M. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions. // Anais Acad. Brasil. Ciencias, 1959, v.31, №2. - pp. 135-160.
7. Meyer K.R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math., 1968, v. 90, №4. - pp. 1031-1040.
8. Пришляк О.О. Теорія Морса. Київ, 2002. - 65с.

О.О. Пришляк, І.М. Іванюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: prishlyak@yahoo.com, ivong07@yandex.ru

Aleksandr Prishlyak, Ivanna Ivanyuk

Kyiv Taras Shevchenko National University, Kyiv, Ukraine

Topology of set of vector fields on surface

The topological properties of a family of vector fields in the general position on the surfaces are investigated in using atoms and molecules by Fomenko. We describe all possible transformations for atoms, complexity of which is less than 4.

Деформації замкнених 1-форм Морса на замкнених поверхнях

С.В. Білун, А.О. Гагай, О.О. Ворончук, М.В. Лосєва

Анотація Вивчаються топологічні властивості замкнених 1-форм Морса на замкнених поверхнях, використовуючи поняття атомів та молекул функції за А.Т.Фоменком. Отримано критерій існування деформації однієї такої 1-форми у іншу при умові, що вона має не більше 3 сідлових нулів, ці нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії – замкнені

Ключові слова Атоми та молекули функцій Морса · деформація 1-форми Морса

УДК 517.91

Нехай ω - зовнішня замкнена диференціальна 1-форма на замкненій двовимірній поверхні M. Інтеграл від замкненої 1-форми Морса можна розглядати як багатозначну функцію Морса. Теорія замкнених 1-форм Морса була започаткована С.П. Новіковим [1]. Було показано, що такі форми природньо виникають в фізичних задачах [1], а також при дослiджені мінімальних поверхонь, краєм яких є задана замкнена крива [2]. Серед подальших досліджень в цій теорії слід відмітити роботи Фарбера [3], Пажитного [4], Арнольда [5], Білун та Пришляка [6].

Позначимо $N(\omega)$ – множину нулів форми ω. Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається інтегральною траєкторією форми ω, якщо локально вона є рівнем функції f такої, що $\omega = df$. Ми будемо розглядати тільки максимальні траєкторії - які не є власними підмножинами інших траєкторій, і називати їх просто траєкторіями. Для незамкнених 1-форм інтегральна траєкторія визначаються як лінія, дотичні до якої лежать в ядрі 1-форми.

Для кожного досить малого околу U(x) точки x$\in$ M$\backslash$N(ω) траєкторія, що проходить через x, розбиває U(x) на дві частин: додатну {y: f(y)-f(x)>0} і від'ємну {y: f(y)-f(x)<0}.

Деформація 1-форми це сім'я 1-форм ω_t, де $t \in [0,1]$ і координати ω_t неперервно залежать від t.

Диференціальні 1-форми ω_1 і ω_2 на M називаються *траєкторно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $h : M \to M$, що відображає нулі в нулі, а траєкторії на траєкторії. При цьому h називається траєкторною еквівалентністю. Якщо крім того h зберігає розбиття кожного малого околу точки $x \in M\backslash N(\omega)$ на додатну і від'ємну частини, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні форми топологічно еквівалентними.

Нуль 1-форми $\omega = adu + bdv$ називається *невиродженим*, якщо матриця $\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial b} \end{pmatrix}$ невироджена, де (u, v) – деяка параметризація сфери. Форма називається *формою Морса*, якщо всі її нулі невироджені. Аналогічно функціям Морса можна показати, що в околі невиродженого нуля заміною координат форму можна звести до виду $\omega = \pm udu \pm vdv$. При цьому, якщо знаки при udu і vdv різні, то такий нуль будемо називати сідлом, а в інших випадках - центром.

Траєкторія, границя якої містить сідло, будемо називати вусом цього сідла. Таким чином, з кожного сідла виходять чотири вуса. Траєкторія, що з'єднує сідла – це та, для якої границя є одним або двома сідлами. В останньому випадку вона є вусом для двох сідел.

Поняття рекурентної траєкторії форми аналогічне до векторних полів.

В роботі [6] для класифікації замкнених 1-форм Морса на замкнених поверхнях, всі рекурентні траєкторії яких замкнені, використовуються НСС-графи.

Основна мета цієї роботи — дати топологічну класифікацію деформацій 1-форм Морса на замкнених поверхнях, у яких всі сідлові нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії – замкнені, використовуючи атоми та молекули за Фоменком.

Нехай ω і ω' - замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях M та M', всі рекурентні траєкторії яких замкнені. Для того щоб форми були траєкторно еквівалентні необхідно і достатньо, щоб існував гомеоморфізм $h : M \to M'$, обмеження якого на $G(\omega)$ задає ізоморфізм графів. Дві замкнені 1-форми Морса ω і ω' на замкнених поверхнях M та M', всі рекурентні траєкторії яких замкнені, будуть топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли існує така їх траєкторна еквівалентність, яка відображає додатні області та підобласті в додатні області та підобласті, а від'ємні – у від'ємні [6].

Вкладення графів $G(\omega)$ будемо задавати за допомогою атомів.

Нехай f - функція Морса на поверхні X^2, а g – функція Морса на іншій поверхні Y^2. Функції Морса будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм $\lambda : X^2 \to Y^2$, який переводить зв'язні компоненти лінії рівня функції f в зв'язні компоненти лінії рівня функції g. Також говорять, що пара (X^2, f) пошарово еквівалентна парі (Y^2, g).

Кожна функція Морса визначає шарування з особливостями на поверхні. Його шарами вважаються компоненти зв'язності рівня функції. В області кожного регулярного шару це шарування тривіальне – прямий добуток кола на відрізок. В області критичного шару шарування може бути влаштоване достатньо складно.

Атомом назвемо область P^2 критичного рівня, яка задається нерівністю $c-\epsilon < f < +\epsilon$ для достатньо малого ϵ, розшаровану на лінії рівня функції f і розглянуту з точністю до пошарової еквівалентності. Якщо критичне значення c – локальний мінімум або локальний максимум, то атом буде називатися А-атомом. Якщо критичне значення c – сідлове, то відповідний атом буде називатися *сідловим.* Атом буде називатися простим, якщо функція Морса f в парі (P^2, f) – проста (має одну критичну точку). Інші атоми будуть називатися *складними.* Складність атома – це число критичних точок в ньому. Атом буде називатися *орієнтованим або неорієнтованим* в залежності від того, чи є поверхня P^2 орієнтованою чи неорієнтованою.

В [7] були описані всі атоми, складність яких не перевищує 3. Вони позначаються $A, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, i = 1, 2, ...$ З урахуванням напрямку зростання функції кожному атому відповідає 2 f-атоми (які можуть бути однаковими). Ці f-атоми будемо відрізняти за допомогою верхнього індексу, що дорівнює 1 або 2. f-атоми можна розглядати як циліндри, до верхніх основ яких приклеєні декілька 1-ручок (стрічок). Нижніми циклами атома будемо називати нижні основи циліндрів, а верхніми циклами – компоненти краю, що отримані з верхніх основ циліндрів після приклеювання 1-ручок [8].

Якщо у 1-форми один критичний рівень, то, видаливши з поверхні його окіл (атом), отримаємо об'єднання циліндрів та 2-дисків. Складемо список пар циклів так, що в одну пару потрапляють один верхній та один нижній цикл, якщо вони є основами одного з отриманих циліндрів. З проведених побудов, уведених означень та роботи [6] випливає така

Теорема 1 *Дві 1-форми Морса на замкнених поверхнях, у яких всі сідлові нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії замкнені, будуть топологічно еквівалентними тоді та тільки тоді, коли у них однакові f-атоми і пари верхніх та нижніх циклів.*

З [9] випливає, що за допомогою додавання ручок можна здійснити такі переходи між f-атомами :

$A - A$, $B_1 - B_1$, $B_2 - B_2$, $C_1 - C_1$, $C_2 - C_2$, $D_1^1 - D_1^1$, $D_1^2 - D_1^2$, $D_1^1 - D_1^1$, $D_2 - D_2$, $E_1^1 - E_1^1$, $E_1^2 - F_2^1$, $E_2^1 - G_1^1$, $E_2^2 - F_1^2$, $E_3^1 - E_2^2$, $E_3^2 - F_2^2$, $F_1^1 - F_1^1$, $F_1^2 - E_2^2 - E_2^1$, $F_2^1 - G_2^1$, $F_2^2 - G_2^2 - G_3^2$, $G_1^1 - G_1^1 - H_1^1$, $G_1^2 - H_1^2$, $G_2^1 - F_2^1 - H_2^1$, $G_2^2 - F_2^2 - G_3^2 - H_2^2$, $G_3^1 - E_2^2 - F_2^1$, $G_3^2 - F_2^2$, $H_1^1 - G_1^1$, $H_1^2 - G_1^2$, $D_1^1 - D_1^1$, $H_2^1 - F_2^1 - G_2^1$, $H_2^2 - G_2^2$

Описані переходи будемо називати *допустимими*. Розглянемо деформацію 1-форми, що не змінює числа нулів форми і критичних рівнів. Тоді при такій деформації з атомами можливе лише перетворення, що відповідає додаванню ручок. Скорочення ручок неможливе, оскільки воно змінює число нулів 1-форми. Отже справедлива така

Теорема 2 *Дві 1-форми Морса на замкнених поверхнях, у яких сідлових нулів не більше 3, вони зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії замкнені, можна з'єднати шляхом у просторі таких форм тоді та тільки тоді, коли від f-атома однієї 1-форми можна перейти до f-атома іншої за допомогою допустимих переході, що зберігають пари верхніх та нижніх циклів.*

Висновок

В роботі досліджені топологічні властивості диференціальних 1-форм Морса на замкнених поверхнях, у яких всі сідлові нулі зв'язні траекторіями і всі рекурентні траєкторії замкнені, описано всі можливі деформації 1-форм з не більш ніж 3 нулями з використанням атомів за А.Т.Фоменком.

Література

1. Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса// УМН, 1982, т. 37, №5, 3-49.
2. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи. - М. 1984.
3. Farber M. Exactness of the Novikov inequalities, Functional Anal. Appl. 19 (1985), 40-48.
4. Pazhitnov A.V. Morse theory of closed 1-form, Lecture Notes in Math. 1474, 1991, Springer.
5. Арнольд В.И. Топологические иэргодические свойства замкнутых 1-форм с несоизмеримыми периодами// Функ.ан. и прил., 1991, т. 25, №2, 81-90.
6. Білун С.В., Пришляк О.О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях// Вісник Київського університету. Матем.Мех. No.8, 2002, с.77-81.
7. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. - Ижевск: "Удмуртский университет 1999. 444 с.
8. Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк О.О. Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. Праці Ін-ту математики НАН Укпаїни. - 2013. - Т.97. 500с.
9. Пришляк О.О., Іванюк І.М. Топологія сім'ї векторних полів на поверхні//Proc. Intern. Geom. Center, No.4, 2013

С.В. Білун, А.О. Гагай, О.О. Ворончук, М.В. Лосєва
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: balerynka@bigmir.net, mv.loseva@gmail.com

Svetlana Bilun, Anna Gagay, Alexandra Voronchuk, Maria Loseva
Taras Shevchenko national university of Kyiv
balerynka@bigmir.net, mv.loseva@gmail.com

Deformations of closed Morse 1-forms on closed surfeces

We study the topological properties of closed Morse 1-forms on closed surfaces using the concept of atoms and molecules of functions by A.T.Fomenko. The criterion of the existence of a deformation of one form to another, provided that they have no more then 3 saddle zeros, these zeros conneted by trajectory and recurrent trajectories are closed, is given.

Про поведінку неперервної функції та її ліній рівня в околі ізольованого локального екстремуму

А.О. Котляр

Анотація У статті описується дослідження поведінки неперервних функцій в околі ізольованих локальних екстремумів. Для наочності розглядаються лінії рівня функції в даному околі та виводяться умови їх гомеоморфності колам. Також у статті введене нове означення - поняття точки локальної зірковості, наведено декілька теорем , що пов'зані із цим поняттям.

Ключові слова Окіл ізольваного локального екстремуму · Лінії рівня функції · Точка локальної зірковості · Регулярна сім'я кривих

УДК 517.91

1 Вступ

Одним із досить актуальних напрямків топології сьогодення є теорія критичних точок а також дослідження неперервної функції в околі ізольованої критичної точки. Лінії рівня наочно характеризують поведінку функції в деякому околі. Тому, для вивчення характеру зміни функції в околі ізольованого локального екстремуму використовуємо саме лінії рівня. Вони є способом представлення скалярної функції двох змінних на площині. Зауважимо, що у даному дослідженні розглядаються лише ізольовані локальні максимуми та мінімуми.

Дана стаття складається із трьох розділів. У першому розділі статті розглядаються деякі функції, лінії рівня яких гомеоморфні колам та наводиться приклад функції, лінії рівня якої не гомеоморфні колам. Цей приклад є причиною застосування поняття регулярної сім'ї кривих. Разом із тим, у цьому розділі доведена теорема про необхідну і достатню умову гомеоморфності ліній рівня неперервної функції колам.

У другому розділі означення точки зірковості деякої області, введене Андріюк, узагальнюється більш широким - означенням точки локальної зірковості. Доводиться теорема про розбиття області на локально зіркові під області.

У третьому розділі окрім наведення теореми про конус, побудований над замкненою жордановою кривою, яка обмежує зіркову область, також описується її узагальнення, коли умови на криву суттєво послаблені.

2 Регулярна сім'я кривих

Нехай D - деяка область в $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ - деяка неперервна функція, а x_0 - її критична точка. Розглянемо множину $\{c \in R \mid f(x,y) = c\}$. Ця множина є множиною ліній рівня функції $f(x,y)$. Наприклад, якщо $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, то її лініями рівня будуть концентичні еліпси (рис.1).

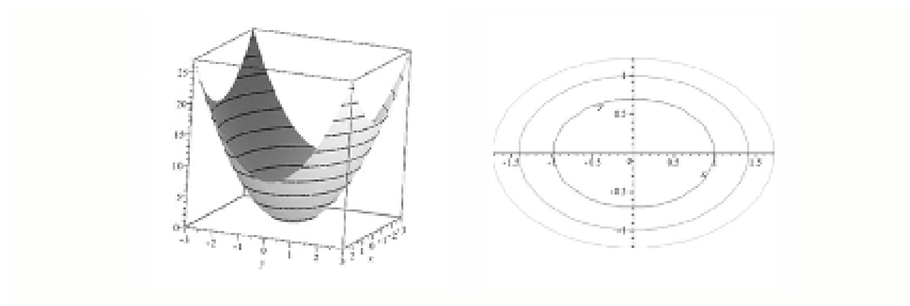

Рис. 1

На малюнку зліва видно, що точка (0;0) є екстремальною точкою (точкою мінімуму) малюнок справа це сукупність ліній рівня в околі критичної точки (0;0).

На рисунку 2 зображено графік і лінії рівня функції $f(x,y)=(x-2y)e^{-x^2-y^2}$.

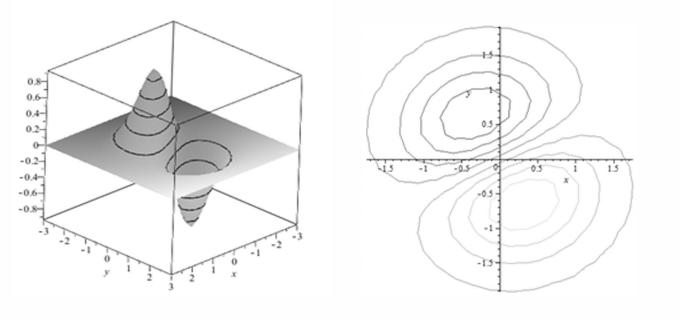

Рис. 2

У наведених прикладах лініями рівня є криві, гомеоморфні колам. Виникає питання: а чи завжди лінії рівня неперервної функції в околі критичної точки гомеоморфні колу? Розглянемо неперервну функцію двох змінних $f : D \to \mathbb{R}$ і припустимо, що для неї існують $\{c_i \mid i \in I \subset \mathbb{N}\}$ такі, що для кожного $i \in I$ лінії рівня $f^{-1}(f(c_i))$ не є гомеоморфними колам. На рисунку 3 зображено лінії рівня такої функції.

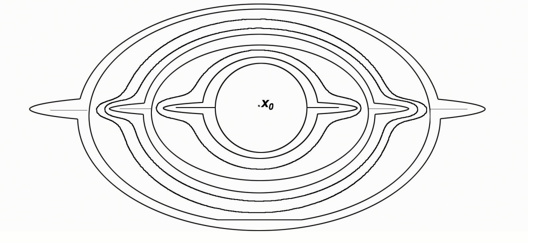

Рис. 3

Як бачимо, між двома лініями рівня $f^{-1}(f(c_1))$ і $f^{-1}(f(c_2))$ знаходяться лінії рівня, які гомеоморфні колу і нескінченно близько наближаються до даних. Аби виключити такі випадки, вводиться поняття регулярної сім'ї кривих. Нехай існує сім'я F кривих $\{C\}$ які лежать в області D.

Означення 1 *Сім'я кривих F називається регулярною в D, якщо для кожної дуги PQ кривої C і $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що якщо $\rho(P, P') < \epsilon$, де $P' \in C' \in F$, то $\sigma(P'Q', PQ) < \delta$.*

На рисунку 4 зображено регулярну (зліва) і нерегулярну (справа) сім'ї кривих.

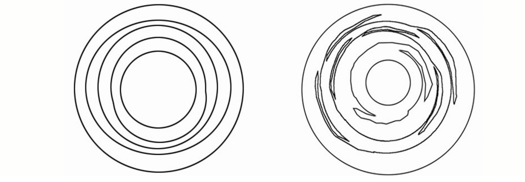

Рис. 4

Теорема 1 *Для того, щоб лінії рівня неперервної функції в околі ізольованого локального мінімума або максимума були гомеоморфні колам, необхідно і достатньо, щоб вони утворювали регулярну сім'ю кривих в околі цієї точки.*

Доведення Необхідність: Нехай $f : D \to \mathbb{R}$ - деяка неперервна функція, x_0 - її ізольований локальний мінімум (максимум), U - деякий окіл точки x_0. За умовою маємо, що лінії рівня функції f гомеоморфні колам. Отже маємо в околі точки x_0 сукупність концентричних кіл, яка, очевидно, утворює регулярну сім'ю кривих в U.

Достатність: Нехай лінії рівня функції $f : D \to \mathbb{R}$ утворюють регулярну сім'ю кривих F в околі U точки x_0.Доведемо тоді, що лінії рівня даної функції еквівалентні колам. На деякій кривій $C_1 \in F$ оберемо скінчене число точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, що для деякого досить малого $\epsilon > 0$, $\rho(x_i, x_{i+1}) = 2\sigma(x_1, x_0) - \epsilon$, $i = 1, \ldots, n-2$. Візьмемо окіл точки x_i: $U_{x_i} \cap U$, що є колом радіуса $\sigma(x_1, x_0) - \epsilon$. З означення регулярної сім'ї кривих випливає, що $\forall i = 1, \ldots, n-1$ такий окіл гомеоморфний квадрату, а криві, що містяться в околі, гомеоморфні відрізкам.

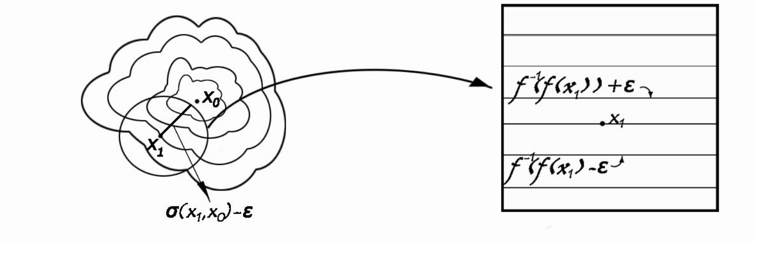

Рис. 5

Тоді $\cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ гомеоморфне концентричним n-кутникам, які в свою чергу гомеоморфні колам.

3 Зіркові та локально зіркові області

Для початку, ознайомимось із поняттям центру зірковості, що представлене у [1].

Означення 2 *Плоска замкнена жорданова крива γ обмежує зіркову область, якщо у замиканні області існує точка така, що кожен прямолінійний відрізок, який сполучає її з довільною точкою кривої повністю належить замиканню області.*

Точка з визначення2 називається *центром зірковості.*

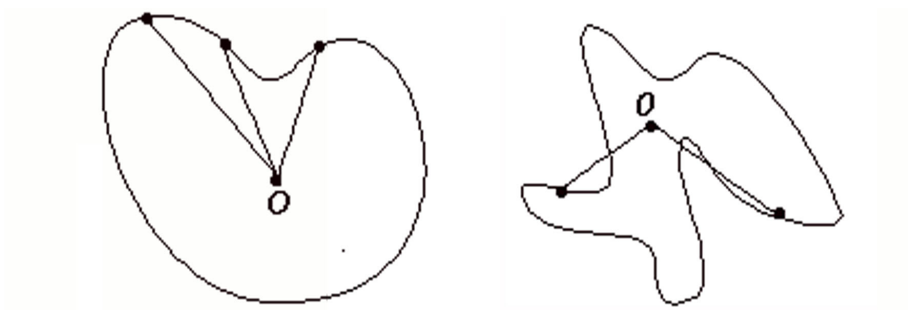

Рис. 6

На рисунку 6 зображено дві замкнені жорданові криві. Зліва крива обмежує зіркову область і точка O є центром зірковості даної області. Справа крива обмежує область, що не є зірковою, бо не існує в цій області точки, що була б центром зірковості.
Взагалі кажучи, клас кривих, що обмежують зіркову область є досить вузьким. Розширити його можна, якщо ввести поняття локальної зірковості.

Означення 3 *Точкою локальної зірковості назвемо таку точку $x_1 \in \Gamma$, для якої існує підмножина Γ_{α_1}, така, що x_1 є центром зірковості цієї області. Таку область Γ_{α_1} назвемо локально-зірковою областю.*

Очевидно, що кожна точка з області Γ є точкою локальної зірковості, бо в якості підмножини Γ_{α_1} з визначення3 може бути, наприклад ϵ-окіл даної точки (будь-яка внутрішня точка множини Γ входить туди із своїм околом). Якщо, в загальному випадку, замкнена жорданова крива обмежує область, що не є зірковою областю (тобто, не існує в цій області такої точки, що будь-який прямолінійний відрізок, який сполучає цю точку із довільною точкою кривої, перетинає цю криву), то доцільно було б розбити дану область на зіркові області.

Теорема 2 *Для області, що обмежена довільною замкненою жордановою кривою завжди існує розбиття скінченою кількістю локально-зіркових підмножин* $\{\Gamma_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Доведення Опишемо процедуру побудови такого розбиття. Розглянемо довільну замкнену жорданову криву γ, яка обмежує область Γ, що, взагалі кажучи, не є зірковою. Ця крива має опуклості всередину і опуклості назовні. На дузі кривої, що опукла назовні, оберемо довільну точку x_1. Побудуємо коло, що проходить через точку x_1 і, яке буде вписаним у фігуру, обмежену кривою γ. Із центру O_1 цього кола проведемо відрізки l_i, що лежать на дотичних до кривої γ у точки опуклості кривої всередину, але лише ті, які будуть лежати повністю всередині області Γ (не будуть мати із кривою більше 2 спільних точок - точки дотику і точки перетину). Тобто, якщо відрізок l_i спочатку перетинає криву, а потім дотикається до неї, такий відрізок не будується. Позначимо через T_i точки дотику відрізків l_i до кривої, і S_i - точки перетину відрізків l_i із кривою. Існує два варіанти: 1)була побудована лише одна дотична; 2) було побудовано більше ніж одна дотична.

1) Якщо була необхідність побудувати лише одну дотичну l_1, то область, обмежена відрізком T_1S_1 цієї дотичної і меншою дугою кривої, що мітиться між точками T_1 і S_1 цієї дотичної із кривою буде першим елементом розбиття, що будується. Назвемо її Γ_{α_1}.Ця область є локально-зірковою в силу побудови.
2) Нехай було побудовано більше ніж одна дотична. Покладемо надалі, що нумерація дотичних починається завжди зліва направо. Після побудови усіх дотичних до усіх опуклостей всередину кривої γ (із вказаним вище обмеженням), утвориться область, обмежена відрізками T_iS_i та меншими дугами $S_1S_2, T_{i-1}S_i$ і T_kT_1, $i \in \{1,\dots,k\}$, де k-кількість проведених відрізків l_i. Ця область буде локально-зірковою під-областю початкової області Γ в силу побудови і тому, отримана під-область є першою компонентою Γ_{α_1} розбиття, що будується.

   Отже, в будь-якому разі, було одержано область Γ_{α_1}, яка є зірковою областю і центром зірковості є центр вписаного кола O_1, тому, що будь-який відрізок, що сполучає точку O_1 із довільною точкою, що лежить на границі області Γ_{α_1} повністю належить цій області (за побудовою).

Очевидно, що відрізок T_1S_1 повністю належить області $\mathit{\Gamma}$ і є границею області $\mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$. Якщо $\mathit{\Gamma} \setminus \mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$ не є зірковою областю, то оберемо будь-який із відрізків, що є межею $\mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$ (наприклад, T_1S_1). На цьому відрізку виберемо довільну точку x_2 і проведемо аналогічну процедуру, що й для точки x_1. Зауважимо, що, аби розбиття мало менше елементів, точку x_2 необхідно обирати на найбільшому з відрізків, що є межею $\mathit{\Gamma}_{\alpha_1}$.Отримаємо область $\mathit{\Gamma}_{\alpha_2}$, яка також, виходячи з побудови, є зірковою і центром зірковості є точка O_2.

Таку процедуру побудови елементів розбиття $\mathit{\Gamma}_{\alpha_i}$ потрібно проводити допоки $\mathit{\Gamma} \setminus \{\cup_{i=1}^{m} \mathit{\Gamma}_{\alpha_i}\}$ не буде набором з l локально-зіркових під-областей. Тоді, назвавши ці області $\{\mathit{\Gamma}_{\alpha_{m+1}}, \mathit{\Gamma}_{\alpha_{m+2}}, \ldots, \mathit{\Gamma}_{\alpha_{m+l=n}}\}$ маємо розбиття області $\mathit{\Gamma}$ на n локально-зіркових під-областей $\{\cup_{i=1}^{n} \mathit{\Gamma}_{\alpha_i}\}$.

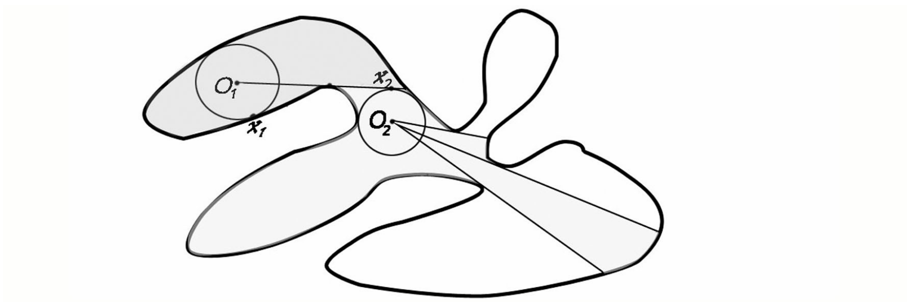

Рис. 7

На даному рисунку зображена процедура побудови розбиття області, обмеженої кривою γ, що не є зірковою, на локально-зіркові під-області.

4 Конус над кривою

Нехай на площині $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ задано замкнену жорданову криву $\gamma \in \pi_1 \subset \mathbb{R}^2$. Згідно теореми Жордана, замкнена жорданова крива ділить площину, у якій лежить, на дві множини $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, для кожної з яких γ є межею. В точності, одна з цих областей обмежена. Обмежену множину $\pi_1 \setminus \gamma$ позначимо через $O(\gamma) \subset \pi_1$. Розглянемо площину $\pi_1 \parallel \pi_2$ і криву $\gamma' \in \pi_2$, що є ортогональною проекцією кривої γ на площину π_2. Аналогічно до π_1, позначимо через $O(\gamma') \subset \pi_2$ замкнену множину із межею γ'. Побудуємо конус із основою $\gamma \in \pi_1$ і вершиною $A \in \pi_2$. Накладемо умову

$$A \in O(\gamma') \qquad (*)$$

Теорема 3 *Конус, побудований із умовою (*) над кривою γ, яка обмежує зіркову область, є графіком деякої неперервної функції.*

Доведення Отже, нехай побудовано конус із умовою (*) над кривою γ,яка обмежує зіркову область Γ. Тоді, виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб вершина А цього конуса співпала із початком координат, а площина $X0Y$ була паралельна площині π_1, у якій лежить γ. Внаслідок зірковості, довільна площина, що проходить через вісь OZ перетинає γ в двох точках, для кожної з яких існує твірна, яка проходить через вершину конуса. Отже, в перерізі маємо криві, що гомеоморфні відрізкам.

Узагальнюючи цю теорему до кривої γ, яка обмежує область Γ що не є зірковою, але має розбиття $\{\Gamma_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ на локально-зіркові під-області, можна над кожною локально-зірковою під-областю побудувати конус, який буде графіком деякої неперервної функції. Тоді й об'єднання цих конусів буде графіком неперервної функції. Насамкінець, хотілося б навести приклад функції, яка має ізольований локальний мінімум у нулі, а лінії рівня цієї функції в околі нуля мають вигляд так званих "польських"кіл, тобто є множинами вигляду $Y = A \cup B \cup C$, де $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 0, y = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{x}\}$ (мал.8)

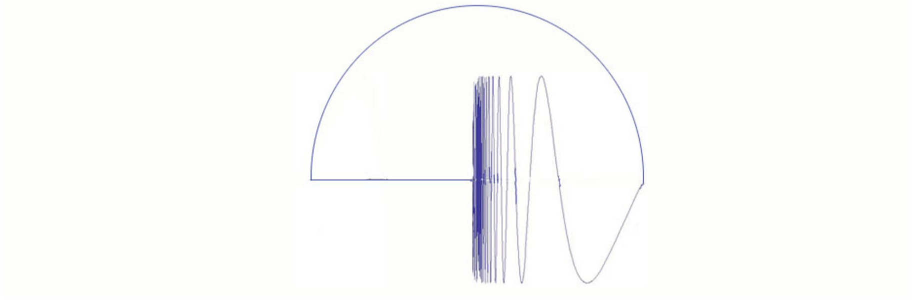

Рис. 8

Тобто, у множині С крива нескінченно наближається до нуля справа, і разом з тим ця крива у $\mathbb{R}^2$ є замкненою. Цей приклад показує, що поведінка неперервної функції в околі ізольованого локального екстремуму може бути досить непередбачуваною.

5 Висновки

У статті розглядаються ізольовані локальні мінімуми (максимуми) неперервних функцій та їх лінії рівня, для отримання топологічного інваріанту функції в околі цієї ізольованої локальної точки. В даній роботі наведено приклад неперервної функції, лінії рівня якої не гомеоморфні колам. В цьому випадку з'являється необхідність ввести поняття регулярної сім'ї кривих, яке допомагає отримати необхідну і достатню умову гомеоморфності ліній рівня неперервної функції колам. Це є одним з головних результатів статті. Іншими результатами є: введення поняття точки локальної зірковості; доведені теорема про розбиття замкненої жорданової кривої на локально-зіркові під області та теорема про конус, побудований над замкненою жордановою кривою .

Література

1. О.П.Андріюк, Функції на одновимірних многовидах: дис...канд.фіз.-мат.наук: 01.01.01 Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. - К., 2007. - 110 с.
2. К. Куратовский, Топология. - Т2. -М.:“МИР“, 1966 - 623с.

А.О. Котляр
Київський Національний Універсиет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: _kotliar@bigmir.net

Anastasija A. Kotliar
Department of Mechanics and mathematics of Taras Shevchenko National University of Kiev, Ukraine
student of post graduate courses

About the behaviour of a continuous function and it's equiscalar lines in the neighbourhood of isolated local extrema

The investigation of the behavior of continuous functions in the neighborhood of isolated local extrema is described in this paper. For obviousness, equiscalar lines of a function in the given neighborhood are regarded, there are derived conditions of when equiscalar lines are homeomorphic to circles. There also introduced a new definition - a concept of the point of local shapedness in the paper, and, at least, theorems connected with this concept are adduced.

Характеристичне рівняння в теорії інфінітезимальних деформацій з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок

Ігор Володимирович Потапенко

Анотація Для інфінітезимальних деформацій з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду в класі поверхонь обертання без омбілічних точок отримано характеристичне рівняння, розв'язок якого повністю характеризує деформуюче поле таких деформацій та є необхідною та достатньою умовою їх існування. Зясовано геометричний зміст цієї функції. Вона є варіацією середньої кривини з ваговою функцією.

Ключові слова інфінітезимальна деформація, поверхня обертання

УДК 514.76

Вступ

Теорія інфінітезимальних деформацій поверхонь містить різні типи деформацій (згинання, конформні, ареальні, геодезичні, поворотні тощо), які характеризуються певною геометричною властивістю. Особливе інтерес в даній теорії займають інфінітезимальні деформації поверхонь з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду і даній тематиці присвячено робота [4].

Зокрема, у роботі [4] автор показує, що цю варіацію не можна задавати довільно, вона повинна зодовольняти певним диференціальним умовам, а також з якою степіню довільності це можна зробити.

У даній роботі, використовуючи методику академіка І.Н. Векуа [1], [2] отримано характеристичне рівняння інфінітезимальних деформацій з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду в класі поверхонь обертання без омбілічних точок. Розвязок цього рівняння повністю характеризує деформуюче поле цього типу деформацій.

Розглянемо поверхню S класу C^k в евклідовому просторі E^3 з векторно-параметричним рівнянням

$$\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$$

та її деформацію

$$\overline{r}_t = \overline{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \overline{y}(x^1, x^2), \tag{1}$$

де

$$\overline{y}(x^1, x^2)$$

- вектор зміщення, ε - нескінченно малий параметр. Всі індекси тут і надалі незалежно набувають значень $1, 2$.

Означення 1 *Інфінітезимальну деформацію поверхні S при якій варіація символів Крістоффеля друго роду буде задана наперед, виходячи з певних геометричних міркувань називатимемо інфінітезимальною деформацією з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду.*

Система основних рівнянь ініфінітезимальних деформацій має наступний вигляд [3]:

$$\delta b_{ik} b_{jl} - \delta b_{ij} b_{kl} + \delta b_{jl} b_{ik} - \delta b_{kl} b_{ij} = g_{ml} \delta R^m_{ijk} + \delta g_{ml} R^m_{ijk}, \tag{2}$$

та

$$\delta b_{ij,k} - \delta b_{ik,j} = b_{mj} \delta \Gamma^m_{ik} - b_{mk} \delta \Gamma^m_{ij}, \tag{3}$$

де g_{ij}, b_{ij}, Γ^h_{ij}, R^h_{ijk} - коефіцієнти першої та другої квадратичних форм, символи Крістоффеля другого роду та тензора кривини Рімана відповідно, δg_{ij}, δb_{ij}, $\delta \Gamma^h_{ij}$, δR^h_{ijk} - їх варіаціїї при інфінітезимальній деформації (1), $\ll, \gg$ - коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij} поверхні S.

Рівняння (2) називаються рівняннями Гаусса, а (3) Петерсона - Кодацці.

1 Варіації головних кривин при інфінітезимальній деформації регулянрної поверхні без омбілічних точок

У даному пункті виведемо формули варіації головних кривин при інфінітезимальній деформації (1) регулянрної поверхні без омбілічних точок.

Теорема 1 *При інфінітезимальній деформації (1) регулярної класу C^k, поверхні S, що не містить омбілічних точок, варіації головних кривин будуть мати представлення через варіації δK, δH гауссової та середньої кривин за формулами*

$$\begin{aligned} \delta k_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(k_1\delta H - \frac{1}{2}\delta K), \\ \delta k_2 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\frac{1}{2}\delta K - k_2\delta H), \end{aligned} \tag{4}$$

де E - ейлерова різниця.

Доведення. Скористаємося формулами ([1])

$$\begin{aligned} 2\delta H &= \delta k_1 + \delta k_2, \\ \delta K &= k_1\delta k_2 + k_2\delta k_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Внаслідок того, що поверхня не містить омбілічних точок ($E \neq 0$), не обмежуючи загальності міркувань будемо вважати $k_1 \geq k_2$, це означає, що визначник системи (5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = k_1 - k_2 = 2\sqrt{E} \neq 0.$$

Використовуючи формули Крамера отримаємо (4).

Теорему доведено.

Рівняння (3) отримано в результаті варіювань рівняння Гаусса містить одне суттєве рівняння, а тому його можна переписати у вигляді

$$\delta b_{11}b_{22} - 2\delta b_{12}b_{12} + \delta b_{22}b_{11} = \delta Kg + K\delta g. \tag{6}$$

Запишемо (6) в системі координат ліній кривини

$$\begin{aligned} I &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2, \\ II &= k_1 g_{11}(dx^1)^2 + k_2 g_{22}(dx^2)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

В цьому випадку мають місце співвідношення

$$\begin{cases} b_{11} = k_1 g_{11}, \\ b_{22} = k_2 g_{22}, \\ b_{12} = 0, \\ \quad g = g_{11}g_{22}. \end{cases} \tag{8}$$

Використовуючи властивості варіації геометричної величини ([4]) матимемо

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= \delta k_1 g_{11} + k_1\delta g_{11}, \\ \delta b_{22} &= \delta k_2 g_{22} + k_2\delta g_{22}. \end{aligned} \tag{9}$$

Підставимо (4), як результат теореми, в (9). Матимемо

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= \frac{1}{\sqrt{E}}(k_1 \delta H - \frac{1}{2}\delta K) g_{11} + k_1 \delta g_{11}, \\ \delta b_{22} &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\frac{1}{2}\delta K - k_2 \delta H) g_{22} + k_2 \delta g_{22}. \end{aligned} \tag{10}$$

Неважко бачити, що представлення (10) з урахуванням (8) та

$$\delta g = \delta g_{11} g_{22} + \delta g_{22} g_{11}$$

задовольняють (6) тотожно.

2 Інфінітезимальні деформації з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок

Розглянемо поверхні обертання:

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha), \\ y = r\sin(\alpha), \\ z = f(r). \end{cases} \tag{11}$$

В системі ліній кривини коефіцієнти першої, другої основних форм поверхні, а також символи Крістоффеля другого роду набувають вигляду:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + f'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{f''}{\sqrt{(1+f'^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{rf'}{\sqrt{(1+f'^2)}} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma^1_{11} = \frac{f'f''}{1+f'^2}, \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{1+f'^2}, \end{array} \right\} \tag{14}$$

а (3) містить 2 суттєві рівняння і є системою типу Коші відносно функції δb_{12}.

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta b_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial \delta b_{11}}{\partial x^2} - \delta b_{11}\Gamma^1_{12} - \delta b_{12}\Gamma^2_{12} + \delta b_{12}\Gamma^1_{11} + \\ \qquad + \delta b_{22}\Gamma^2_{11} - b_{11}\delta\Gamma^1_{12} + b_{22}\delta\Gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \delta b_{12}}{\partial x^2} = \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1} - \delta b_{12}\Gamma^1_{12} - \delta b_{22}\Gamma^2_{12} + \delta b_{11}\Gamma^1_{22} + \\ \qquad + \delta b_{21}\Gamma^2_{22} - b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22}. \end{cases} \tag{15}$$

Умова інтегрованості системи (15)має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \delta b_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 \delta b_{22}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} - \delta b_{22}\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \\
&+ \delta b_{11}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^1_{21} + \delta b_{22}\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \delta b_{11}}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} - \delta b_{11}\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} = \\
&= \Gamma^1_{11}(-b_{11}\delta\Gamma^1_{22} + b_{22}\delta\Gamma^2_{12}) + \frac{\partial(b_{11}\delta\Gamma^1_{12} - b_{22}\delta\Gamma^2_{11})}{\partial x^2} + \\
&+ \frac{\partial(-b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22})}{\partial x^1}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Підставимо (10) в (16)та позначимо

$$q = \frac{\delta H}{\sqrt{E}},$$

$$F = \Gamma^1_{11}(-b_{11}\delta\Gamma^1_{22} + b_{22}\delta\Gamma^2_{12}) + \frac{\partial(b_{11}\delta\Gamma^1_{12} - b_{22}\delta\Gamma^2_{11})}{\partial x^2} + \frac{\partial(-b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22})}{\partial x^1},$$

$$p_1 = -\frac{\delta K g_{11}}{2\sqrt{E}} + k_1\delta g_{11},$$

$$p_2 = \frac{-\delta K g_{22}}{2\sqrt{E}} - k_2\delta g_{22}.$$

Перепишемо (16) у вигляді

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(qb_{11}+p_1)}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2(qb_{22}+p_2)}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial(qb_{22}+p_2)}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} + (qb_{22}+p_2)\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \\
&+ (qb_{11}+p_1)\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial(qb_{22}+p_2)}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} - (qb_{22}+p_2)\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \\
&- \frac{\partial(qb_{11}+p_1)}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} - (qb_{11}+p_1)\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} = F.
\end{aligned} \tag{17}$$

Враховуючи (8), (14), замість (17) матимемо

$$b_{22}\frac{\partial^2 q}{(\partial x^1)^2} + b_{11}\frac{\partial^2 q}{(\partial x^2)^2} + R\frac{\partial q}{\partial x^1} + Sq = G, \tag{18}$$

де

$$R = 2\frac{\partial b_{22}}{\partial x^1} - b_{22}\Gamma^1_{11} + b_{22}\Gamma^2_{12} - b_{11}\Gamma^1_{22},$$

$$S = \frac{\partial^2 b_{22}}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} + b_{22}\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + b_{11}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} +$$

$$+ \frac{\partial b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} - b_{22}\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial x^1}\Gamma^1_{12} - b_{11}\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1},$$

$$G = F - \frac{\partial^2 p_1}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 p2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial p_2}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} - p_2\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - p_1\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial p_2}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} +$$

$$+ p_2\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial p_1}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} + p_1\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1}.$$

Нами доведена

Теорема 2 *Для того щоб регулярна поверхня обертання S без омбілічних точок з векторно - параметричним рівнянням (11) зазнавала інфінітезимальної деформації (1) з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду $\delta\Gamma^h_{ij}$ в бінарній області регулярності необхідно і достатньо, щоб в цій області характеристичне рівняння (18) мало розв'язки відносно функції $q = \frac{\delta H}{\sqrt{E}}$ при цьому деформуюче поле, буде характеризуватися функціями (10), що задовольняють основній системі (2) - (3).*

Не важко бачити, що тип рівняння (18), ([5])повністю залежить від знаку гауссової кривини $K = \frac{b_{11}b_{22}}{g}$, $(g \neq 0)$.

Отже

– при $K > 0$ маємо рівняння (18) - еліптичного типу,

– при $K = 0$ маємо рівняння (18) - параболічного типу,

– при $K < 0$ маємо рівняння (18) - гіперболічного типу.

Література

1. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции // М. : Наука, (1988). - 509 с.
2. И. Н. Векуа. Некоторые вопросы безконечно малых изгибаний поверхностей.// Доклады АН СССР, - (1957). Т. 112, №3. - С.377 - 380
3. І. В. Потапенко. Нові рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь в Е3. // Український математичний журнал. (2010). Т.62, №2. - С.199 - 202.
4. І. В. Потапенко. Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі Е3 . // Український математичний журнал. - (2011). Т.63, №4. - С.523 - 530.
5. М. М. Смирнов. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // - М. : Наука, (1964). - 208 с.

Ігор Володимирович Потапенко

ОНУ імені І.І.Мечникова,ІМЕМ, Одеса, Україна

E-mail: `Potapenko_igopotapenko@yandex.ru`

Igor Potapenko
Odessa National University by name Mechnikov, Odessa, Ukraine.

Characteristic equation in the theory infinitesimal deformations of surfaces of rotation

For infinitesimal deformations fixed variation characters Christoffel of the second kind in the class of surfaces of rotation without not umbilical points obtained characteristic equation, the solution of which fully characterizes deformation field such deformations and is a necessary and sufficient condition for their existence. Clarified the geometric meaning of this function. It is a variation of the average curvature with weight function.

Geometry of Chaos: Advanced approach to treating chaotic atmosphere pollution dynamics

A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, T.N. Sakun

Abstract It is presented an advanced chaos-geometrical approach to treating of atmospheric pollutants dynamics and its numerical application. It combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc.

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, chaos theory

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

Earlier [1-10] we have developed a new, chaos-geometrical combined approach to treating of chaotic dynamics of atmospheric pollutants and its forecasting. Here we present the results of its application to studying Odessa atmosphere pollution dynamics. The successful application of new chaos-geometrical approach has been presented for Gdansk and other cities atmosphere systems [10].

During the last two decades, many studies in various fields of science have appeared, in which chaos theory was applied to a great number of dynamical systems, including those are originated from nature (e.g. [1-22]). The outcomes of such studies are very encouraging, as they reported very good predictions using such an approach for different systems.

2. Advanced chaos-geometrical approach to atmospheric pollutants dynamics: Data

2.2.1. Data and methodics

In our study, carbon oxide (CO), nitrogen dioxide (NO_2) and sulphurous anhydride (SO_2) concentration data observed at the above cited Ukrainian industrial cities from 1976 till 2000 years. Let us for definiteness consider the Odessa region. There are eight sites in the region (N8-N20). In our studying we use the multi year hourly concentrations (one year total of 20x8760 data points). The temporal series of concentrations (in mg/m3) of the of the studied pollution substances are presented in [1].

Following to [1-10], further we formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d-dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n+\tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n+\tau), s(n+2\tau), .., s(n+(d-1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n+j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E.

Let us remind that following to [1,10], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n+j\tau)$, $s(n+(j+1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n+j\tau)$, $s(n+(j+1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under-or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n+j\tau)$ and $s(n+(j+1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. In ref. [4] it is suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

In [1,10] it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E, must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A, i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E, e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \to 0, N \to \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

2.2.2 The results for time series

Table 1 summarizes the results for the time lag calculated for first 10^3 values of time series.

Table 1. Time lags (hours) subject to different values of C_L, and first minima of average mutual information,I_{min1}, for the time series of NO_2 , SO_2 (Odessa; 1976-1978)

	Fontan		Peresyp	
	NO_2	SO_2	NO_2	SO_2
C_L=*0.1*	148	252	62	165
C_L=*0.5*	9	17	7	32
I_{min1}	13	24	10	22

The autocorrelation function crosses 0 only for the NO_2 time series at the Peresyp, whereas this statistic for other time series remains positive. The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ, but in [6,9] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ. So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values in Table 1. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using Grassberger-Procaccia method [1,16]. As in a case of the chaos-geometric Gdansk region pollution dynamics [10], here the outcome is explained not only inappropriate values of τ but also shortcomings of correlation dimension method. If algorithm [14] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ. If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 6$ for all air pollutants.

2.2.3. Nonlinear prediction model

The fundamental problem of theory of any dyanmical system is in predicting the evolutionary dynamics of a chaotic system. Let us remind following to [1-,2,10] that the cited predictability can be estimated by the Kolmogorov entropy, which is proportional to a sum of positive LE. As usually, the spectrum of LE is one of dynamical invariants for non-linear system with chaotic behaviour. The limited predictability of the chaos is quantified by the local and global LE, which can be determined from measurements. The LE are related to the eigenvalues of the linearized dynamics across the attractor. Negative values show stable behaviour while positive values show local unstable behaviour. For chaotic systems, being both stable and unstable, LE indicate the complexity of the dynamics. The largest positive value determines some average prediction limit. Since the LE are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and hence the choice of trajectory, and they do comprise an invariant measure of the attractor. An estimate of this measure is a sum of the positive LE. The estimate of the attractor dimension is provided by the conjecture d_L and the LE are taken in descending order. The dimension d_L gives values close to the dimension estimates discussed earlier and is preferable when estimating high dimensions. To compute LE, we use a method with linear fitted map, although the maps with higher order polynomials can be used too. Non-linear model of chaotic processes is based on the concept of compact geometric attractor on which observations evolve. Since an orbit is continually folded back on itself by dissipative forces and the non-linear part of dynamics, some orbit points [1,10] $\mathbf{y}^r(k)$, $r = 1, 2, .., N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k. One can then choose some interpolation functions, which account for whole neighbourhoods of phase space and how they evolve from near $\mathbf{y}(k)$ to whole set of points near $\mathbf{y}(k+1)$. The implementation of this concept is to build parameterized non-linear functions $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ which take $\mathbf{y}(k)$ into $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ and use various criteria to determine parameters $\mathbf{a}$. Since one has the notion of local neighbourhoods, one can build up one's model of the process neighbourhood by neighbourhood and, by piecing together these local models, produce a global non-linear model that capture much of the structure in an attractor itself. Table 2 shows the global LE.

Table 2. First two LE (λ_1, λ_2), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max}, hours$) for time series of NO_2,SO_2 (Odessa; 1976-1978)

	Fontan NO_2	Fontan SO_2	Peresyp NO_2	Peresyp SO_2
λ_1	0.0187	0.0168	0.0192	0.0155
λ_2	0.0068	0.0072	0.0059	0.0058
d_L	4.09	5.04	3.92	4.65
$\Pr_{max}$	42	46	43	52

The presence of the two (from six) positive λ_i suggests the system broadens in the line of two axes and converges along four axes that in the six-dimensional space. The time series of SO_2 at the site Fontan have the highest predictability (more than 3 days), and other time series have the predictabilities slightly less than 3 days.

3. Conclusions

In this paper we considered an advanced chaos-geometrical approach to treating of chaotic systems. The approach combines the non-linear analysis methods to dynamics, such as the correlation integral analysis, the LE analysis, surrogate data method etc. We have investigated a chaotic behaviour in the nitrogen dioxide and sulphurous anhydride concentration time series at the Fontan & Peresyp sites in Odessa city and proved an existence of the low-D chaos. We presented an effective nonlinear prediction model and realized a successful short-range forecast of atmospheric pollutant time series. Earlier the same successful results were received for other cases and systems [1-10]. All considered examples has shown high perspectives of a new approach methods to treating dynamics of very complicated chaotic systems.

References

1. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
2. Glushkov A.V., Chaos-geometrical universal numerical approach to life science processes: Theoretical basis's// Computational Life Sciences (Sprinfger), in print.
3. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-6(**??**)-6-12.
4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A. Atmospheric teleconnection patterns: wavelet analysis// Nonlin. Proc.in Geophys.-2004.-V.11,N3.-P.285-293.
5. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V.,Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
6. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284–7292.
7. Bunyakova Yu.Ya., Khetselius O.Yu., Non-linear prediction statistical method in forecast of atmospheric pollutants//Proc. of the 8th International Carbon Dioxide Conference.-Jena (Germany).-2009.- P.T2-098.

8. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Nonlinear prediction method in forecast of air pollutants CO_2, CO// Transport and Air Pollution. – Zurich: ETH University Press (Switzerland). –2010. – P.131–136.
9. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems – Theory and Applications. – Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). –2011.- LIF111 (6p.).
10. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. of Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N3.-P.6-14.
11. Lanfredi M., Macchiato M.: Searching for low dimensionality in air pollution time series.*EurophysicsLetters* 1997, 1997, 589-594.
12. KoP·ak K., Saylan L., Sen O., Nonlinear time series prediction of O_3 concentration in CityplaceIstanbul.. *AtmosphericEnvironment* (Elsevier) 34, 2000, 1267-1271.
13. Kuznetsov S.P., Dunamical chaos.-Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P.
14. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403–3411.
15. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712–716.
16. Grassberger P., SnplaceProcaccia SnI., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189–208.
17. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134–1140.
18. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366–381
19. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230–242
20. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082–1085
21. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B., Farmer J., Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data// Physica D.-1992.-Vol.58.-P.77–94.
22. Kaplan J.L., Yorke J.A., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in: Peitgen H.-O., Walter H.-O. (Eds.), Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics No. 730. Springer, Berlin.-1979.-pp.204-227.

A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, T.N. Sakun

Mathematics Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: dirac13@mail.ru

Quantum Geometry: An advanced energy-amplitude approach to multiphoton resonances in atomic spectra

Andrey A. Svinarenko

Abstract An advanced energy-amplitude approach to calculation of the characteristics of multi-photon and autoionization resonances in spectra of atomic systems is presented and based on the many-body perturbation theory. The improved numerical data are listed for magnesium and caesium.

Keywords Multiphoton resonances · An advanced energy-amplitude approach · Eigen functions and energy eigen values

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

Traditionally an investigation of spectra, spectral, ionization and autoionization characteristics for heavy atomic systems is of a great interest for further development atomic quantum and nuclear theories and different applications [1]–[9]. From the mathematical point of view this class of tasks is related to new branch of a geometry, namely, quantum geometry [2]. Mathematical methods of calculation of the the cited parameters may be divided into a few main groups. First, the well known, classical multi-configuration Hartree-Fock method (as a rule, the relativistic effects are taken into account in the Pauli approximation or Breit hamiltonian etc.) allowed to get a great number of the useful spectral information about light and not heavy systems, but in fact it provides only qualitative description of spectra of the heavy quantum systems. Second, the multi-configuration Dirac-Fock (MCDF) method is the most reliable version of calculation for multielectron systems with a large charge. These methods can be served as an initial basis for the further studying multi-photon and autoionization resonances properties. Among existed approaches to the last problem it should be mentioned the Green function method (the imaginary part of the Green function pole for atomic quasienergetic state), the density - matrix formalism (the stochastic equation of motion for density - matrix operator and its correlation functions), a time-dependent density functional formalism, direct numerical solution of the Schrödinger (Dirac) equation, multi-body multi-photon approach etc. [1]–[8]. In [2],[4] authors extended the non-Hermitian multi-state Floquet dynamics approach by Day to treat one-electron atomic system to the case of general multi-electron ones. The approach based on the eigenchannel R-matrix method and multichannel quantum-defect theory , introduced by Robicheaux and Gao to calculate two-photon processes in light alkaline-earth atoms has been implemented by Luc-Koenig et al [4] in j-j coupling introducing explicitly spin-orbit effects and employing both the length and velocity forms of the electric dipole transition operator. Nevertheless in many calculations there is a serious problem of the gauge invariance, connected with using non-optimized one-electron representation. In this paper, which goes on our studying [5]–[10], we present an advanced version of an amplitude approach to calculation of the characteristics of resonances in atomic systems. It is based on the many-body perturbation theory (PT) and applied to numerical calculating two atomic systems. In particular, the improved numerical data are listed for magnesium and caesium.

2 An advanced energy relativistic approach to resonances

Let us briefly consider earlier presented formally exact approach based on the QED perturbation theory [5]–[12], which allow to calculate the characteristics of resonances in atomic spectra. As usually [10], We start from the two-photon amplitude for the transition from an initial state Ψ_0 with energy E_0 to a final state $|Psi_f$ with energy $E_f = E_0 + 2\omega$ is:

$$T_{f0}^{(2)} = \lim_{n\to 0_+} \int d\epsilon \langle \Psi_f | D \times e | \epsilon \rangle (E_0 + \omega - \epsilon + in)^{-1} \langle \epsilon | d \times e | \Psi_0 \rangle. \tag{1}$$

Here D is the electric dipole transition operator (in the length r form), e is the electric field polarization and ω is a laser frequency. The integration in equation 1 is meant to include a discrete summation over bound states and integration over continuum states. Usually an explicit summation is avoided by using the Dalgarno-Lewis by means the setting [3]:

$$T^{(2)}_{f0} = C_f \langle \| D \times e \| \Lambda_p \rangle, \tag{2}$$

where $\langle \| ... \| \rangle$ is a reduced matrix element and C_f is an angular factor depending on the symmetry of the Ψ_f, Λ_p, Ψ_0 states. Λ_p can be founded from solution of the following inhomogeneous equation [3]

$$(E_0 + \omega \times H | \Lambda_p \rangle = (D \times e) | \Psi_0 \rangle \tag{3}$$

at energy $E_0 + \omega$, satisfying outgoing-wave boundary condition in the open channels and decreasing exponentially in the closed channels. The total cross section (in cm^4 W^{-1}) is defined as

$$\sigma/I = \sum_J \sigma_J / I = 5.7466 \times 10^{-35} \omega_{\mathrm{au}} \sum_J |T^{(2)}_{J,0}|^2, \tag{4}$$

where I (in W/cm^2) is a laser intensity. To describe two-photon processes there can be used different quantities [9]: the generalized cross section $\sigma^{(2)}$, given in units of cm^{4}s, by

$$\sigma^{(2)}_{\mathrm{cm^4 s}} = 4.3598 \times 10^{-18} \omega_{\mathrm{au}} \sigma / I_{\mathrm{cm^4 W^{-1}}} \tag{5}$$

and the generalized ionization rate $\Gamma^{(2)}/I^2$, (and probability of to-photon detachment) given in atomic units, by the following expression

$$\sigma / I_{\mathrm{cm^4 W^{-1}}} = 9.1462 \times 10^{-36} \omega_{\mathrm{au}} \Gamma^{(2)}_{\mathrm{au}} / I^2_{\mathrm{au}} \tag{6}$$

Described approach is realized as computer program block in atomic numeric code "Super-atom" (c.f. [2]–[7], which includes a numeric solution of the Dirac equation and calculation of the matrix elements of the Eqs. 1–5 type. The new original moment of the advanced scheme is in using more corrected in comparison with [9], [10] gauge invariant procedure for generating the atomic functions basis's (optimized basis's) The lather includes solution of the whole differential equations systems for Dirac-like bi-spinor equations [2].

3 Some results and conclusion

Let us present the results of calculating the multi-photon resonances spectra characteristics for atoms of magnesium (new data) and caesium in a laser field. It is worth to list the data of different methods for comparison: relativistic R-matrix method (R-method; Robicheaux-Gao, 1993; Luc-Koenig E. etal, 1997),

Table 1 Characteristics for $3p^{21}S_0$ resonance of atom of the magnesium: E- energy, counted from ground state (cm^{-1}), Γ- autoionization width (cm^{-1}), σ/I- maximum value of generalized cross-section (cm^4W^{-1}).

Methods	E	Γ	σ/I
Luc-Koenig E. etal, 1997	without	account	SE
Length form	68492	374	1,96 10^{-27}
Velocity form	68492	376	2,10 10^{-27}
Luc-Koenig E. etal, 1997	With	Account	SE
Length form	68455	414	1,88 10^{-27}
Velocity form	68456	412	1,98 10^{-27}
Moccia and Spizzo (1989)	68320	377	2,8 10^{-27}
Robicheaux and Gao (1993)	68600	376	2,4 10^{-27}
Mengali and Moccia(1996)	68130	362	2,2 10^{-27}
Karapanagioti et al (1996)	68470	375	2,2 10^{-27}
Svinarenko (2012)	68281	323	2,0 10^{-27}
This paper	68395	386	1,9 10^{-27}

added by multi-channel defect method, K-matrix method (K-method; Mengali-Moccia,1996), different versions of the finite L^2 method (L^2 method) with account of polarization and screening effects (SE) (Moccia-Spizzo, 1989; Karapanagioti et al, 1996), Hartree-Fock configuration interaction method (CIHF), operator QED PT (Glushkov-Ivanov, 1992; Glushkov et al; 2004), energy amplitude approach (Svinarenko, 2012) etc.(c.f.[2,10]. In table 1 we list results of calculating characteristics for $3p^{21}S_0$ resonance of Mg; E- energy, counted from ground state (cm^{-1}), Γ-autoionization width (cm^{-1}), σ/I- maximum value of generalized cross-section (cm^4W^{-1}). R-matrix calculation with using length and velocity formula led to results, which differ on 5-15% , that is evidence of non-optimality of atomic basis's.

Let us consider further the numerical data for the three-photon (k=3) resonance 6S-6F in the caesium (wavelength 105,9 nm). The detailed experimental study of the multi-photon processes in the caesium has been earlier carried out in details (look refs. [2],[11]). According to [12], the 6S-6F resonance line shift is linear to respect to the laser intensity (laser intensity is increased from $1,4$ to $5,7 \cdot 10^7$ W/cm^2) and is equal (the gaussian multi-mode pulse): bI. Here I is a laser pulse intensity and coefficient b is expressed in terms of energy of the three-photon transition 6S-6F: $b = (5,6 \pm 0,3)$ $cm^{-1}/GW \times cm^{-2}$.

For comparison let us present the analogous theoretical value, obtained in the S-matrix formalism calculation [2]: b=$5,63$. Our theoretical values, obtained with using the non-optimized and optimized basis's, are as follows: i). for the gaussian multi-mode pulse (non-optimized basis): b=$5,84$; ii). for the gaussian multi-mode pulse (optimized basis): b=$5,62$.

References

1. Grant, I.: Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules –Oxford (2008), 650p
2. Glushkov, A. : Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems – Odessa, Astroprint (2008), 700p.
3. Glushkov, A., Ivanov, L.: Radiation decay of atomic states: Atomic residue and gauge non-invariant contributions – Phys. Lett.A., **170** (1992), P.33-37.
4. Luc-Koenig, E., Lyras, A., Lecomte J., Aymar, M.: Eigenchannel R-matrix study of two-photon processes including above-threshold ionization in magnesium – J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **30** (1997), P.5213-5232.
5. Glushkov, A., Khetselius, O., Prepelitsa G., Svinarenko, A.: Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape – Coherence and Ultrashort Pulsed Emission, Ed. Duarte F. J. – Vienna, Intech (2011), P.159-186.
6. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Theoretical spectroscopy of autoionization resonances in spectra of lanthanides atoms – Physica Scripta, textbfT153 (2013), P.014029 (6p.).
7. Khetselius, O.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac equation for relativistic many-body system and calculating some spectral parametersGeneralized model of decay of the multipole giant resonances – Proceedings of International Geometry Center, **6** (2013), P.60-66.
8. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Relativistic theory of cooperative muon-gamma-nuclear processes: Negative muon capture and metastable nucleus discharge – Advances in the Theory of Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry, Eds. P.Hoggan, E.Brandas, G. Delgado-Barrio, P.Piecuch – Berlin, Springer, **22** (2011), P.51-70.
9. Glushkov, A., Khetselius, O., Florko, T. et al : Gauge-invariant QED perturbation theory approach to calculating nuclear electric quadrupole moments, hyperfine structure constants – Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry – Berlin, Springer, **18** (2008), P.504-522.
10. Svinarenko, A.: Quantum Geometry: Energy-amplitude approach to multiphoton resonances and above threshold ionization – Proc. of Int. Geometry Center., **6** (2013), N3, P.18-22.
11. Khetselius, Yu.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasistationary states of Dirac equation for superheavy ion and calculating hyperfine structure parameters – Proc. of Internat. Geometry Center, **5** (2012), N2, P.39-45.
12. Lompre, L., Mainfray, G., Manus, C., Marinier, J.: Laser Light statistics and band-width effects in resonant multi-photon ionization of caesium atoms at 1.059nm – J.Phys.B.,**14** (1981), N12, P.4307-4326.

Andrey A. Svinarenko
Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.
E-mail: quantsvi@mail.ru

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік
№ 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлетень ВАК України. 2010. № 4)

Наклад 300 примірників. Зам. № 319.

Адреса редакції:
Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна
E-mail: geom-odessa@ukr.net
website: http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4

ISSN 2072-9812. ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.
2013. ТОМ 6. №4. 1-85