

ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
**INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER**

Volume 6, No. 3, 2013

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень
"Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 6, №. 3, 2013

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 6, №. 3, 2013

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 6, No. 3, 2013

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2013

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченого радою
Одеської національної академії харчових технологій
(№ 10 від 09.04.2013р)

Головний редактор: **Володимир Шарко**

Заступники головного редактора: **Анатолій Мілка, Ігор Микитюк,**
Олександр Шелехов

Відповіальні редактори: **Надія Коновенко, Віктор Кузаконь**

Відповіальні секретарі: **Олексій Мойсеєнок, Юлія Федченко**

Редакційна колегія:

Алексєєвский Д.	Кирилов В.	Рубцов В.
Балан В.	Красильщик І.	Савченко О.
Банах Т.	Максименко С.	Сергєєва О.
Волков В.	Машков О.	Федосов С.
Глушков О.	Мацумото К.	Фоменко А.
Задорожний В.	Мікеш Й.	Фоменко В.
Зарічний М.	Мормул П.	Швець В.
Кац І.	Пришляк О.	Шуригін В.
Кириченко В.	Рахула М.	

©Благодійний фонд наукових досліджень "Наука", 2013

Главный редактор: **Владимир Шарко**

Заместители главного редактора: **Анатолий Милка, Игорь Микитюк,**
Александр Шелехов

Ответственные редакторы: **Надежда Коновенко, Виктор Кузаконь**

Ответственные секретари: **Алексей Мойсеенок, Юлия Федченко**

Редакционная коллегия:

Алексеевский Д.	Кириллов В.	Рубцов В.
Балан В.	Красильщик И.	Савченко О.
Банах Т.	Максименко С.	Сергеева А.
Волков В.	Мацумото К.	Федосов С.
Глушков А.	Машков О.	Фоменко А.
Задорожный В.	Микеш Й.	Фоменко В.
Заричный М.	Мормул П.	Швец В.
Кац И.	Пришляк А.	Шурыгин В.
Кириченко В.	Рахула М.	

©Благотворительный фонд научных исследований "Наука", 2013

Editor-in-Chief: **Vladimir Sharko**

Deputies Editor-in-Chief: **Anatoliy Milka, Igor Mikityuk,
Alexandr Shelekhov**

Managing Editors: **Nadiia Konovenko, Viktor Kuzakon**

Executive Secretary: **Alexei Moysyeyenok, Juliya Fedchenko**

Editorial Board:

Alekseevsky D.	Kirichenko V.	Roubtsov V.
Balan V.	Krasilshchik I.	Savchenko O.
Banah T.	Maksimenko S.	Sergeeva A.
Glushkov A.	Mashkov O.	Shvets V.
Fedosov S.	Matsumoto K.	Shurygin V.
Fomenko A.	Mikes J.	Volkov V.
Fomenko V.	Mormul P.	Zadorozhnyi W.
Kats I.	Prishlyak A.	Zarichnyi M.
Kirillov V.	Rahula M.	

©Charity Fund for Scientific Research "Science", 2013

Зміст

A.V. Glushkov, Yu.Ya. Bunyakova, P.A. Zaichko Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting	6
 Я.П. Кривко Особливості математичної частини тестів GRE, GMAT	15
 Н. В. Лукова - Чуйко Топологическая эквивалентность простых мс-пар на четырёхмерных многообразиях	22
 E. A. Шугайло Об аффинных омбилических погружениях высокой коразмерности	26
 О.М.Іванюк, О.О.Пришляк Атоми степені 2 на поверхнях з краєм	40
 A. A. Svinarenko Quantum Geometry: Energy-amplitude approach to multiphoton resonances and above threshold ionization	54
 O. Yu. Khetselius Quantum Geometry: Advanced generalized multiconfiguration model of decay of the multipole giant resonances	60
 О. Г. Савченко Розміті k -ультраметричні простори	66

Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting

A.V. Glushkov, Yu.Ya. Bunyakova, P.A. Zaichko

Abstract It is presented an numerical application of a consistent chaos-geometrical combined approach to treating of chaotic dynamics of atmospheric pollutants and its forecasting. It combines together application of the wavelet analysis, multi-fractal formalism, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, surrogate data method etc.

Keywords geometry of chaos, dynamical systems, non-linear analysis and chaos theory techniques

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

In this paper we present an numerical application of a consistent chaos-geometrical combined approach [1-10] to treating of chaotic dynamics of atmospheric pollutants and its forecasting. It combines together application of the wavelet analysis, multi-fractal formalism, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's (LE) analysis, surrogate data method etc. As it is indicated earlier [1-4], time series can be considered as random realization, when the randomness is caused by a complicated motion with many independent degrees of freedom. Chaos is alternative of randomness and occurs in very simple deterministic systems. Although chaos theory places fundamental limitations for long-rage prediction, it can be used for short-range prediction since ex facto random data can contain

simple deterministic relationships with only a few degrees of freedom. During the last two decades, many studies in various fields of science have appeared, in which chaos theory was applied to a great number of dynamical systems, including those originated from nature (e.g. [1-22]). These studies concerning the key dynamical characteristics of different systems allow concluding that methodology from chaos theory can be applied and the short-range forecast by the non-linear prediction method can be satisfactory. The outcomes of such studies are very encouraging, as they not only revealed that the dynamics of the apparently irregular phenomena could be understood from a chaotic deterministic point of view but also reported very good predictions using such an approach for different systems. Chaos theory establishes that apparently complex irregular behaviour could be the outcome of a simple deterministic system with a few dominant nonlinear interdependent variables.

2. Combined chaos-geometrical approach to atmospheric pollutants dynamic: Numerical Data

2.2.1. Data and methodics

As it is indicated, although chaos theory places fundamental limitations for long-range prediction, it can be used for short-range prediction since ex facto random data can contain simple deterministic relationships with only a few degrees of freedom. The studies concerning non-linear behaviour in the time series of atmospheric constituent concentrations are sparse, and their outcomes are ambiguous. In ref. [11] there is an analysis of the NO_2 , CO , O_3 concentrations time series and is not received an evidence of chaos. Also, it was shown that O_3 concentrations in Cincinnati (Ohio) and Istanbul are evidently chaotic, and non-linear approach provides satisfactory results [12]. These studies show that chaos theory methodology can be applied and the short-range forecast by the non-linear prediction method can be satisfactory. Time series of concentrations are however not always chaotic, and chaotic behaviour must be examined for each time series. So, we shall (i) study the concentration of atmospheric constituents in the Gdansk region (Poland) to select only those measurements, which are defined as chaotic, and (ii) build non-linear prediction model for selected time series. In our study, nitrogen dioxide (NO_2) and sulphurous anhydride (SO_2) concentration data observed at the sites of Gdansk region during 2003 year are used. There are ten sites in the region, but time series are continuous at 2 ones only, Sopot (site 6) and Gdynia (site 9). We use one year hourly concentrations (total of 8760 data points). Table 1 presents some of the important statistics [6,9].

Table 1. Some statistics of air pollutant concentrations at the Gdansk region (Jan.-Dec.2003)

Statistics	Site 6 (Sopot)		Site 9 (Gdynia)	
	NO ₂	SO ₂	NO ₂	SO ₂
Number of data	8760	8760	8760	8760
Mean ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)	15.46	9.13	17.04	11.84
Maximum value ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)	107.53	111.99	101.13	95.47
Minimum value ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)	2.29	3.99	3.92	5.59
Standard deviation ($\mu\text{g}/\text{m}^3$)	11.99	6.94	11.22	7.19
Skewness	2.26	4.79	1.81	3.89
Kurtosis	7.61	38.15	4.43	22.78

Let us consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d-1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

The choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good

hint of choice for τ at that $s(n+j\tau)$ and $s(n+(j+1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. In ref. [4] it is suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

The goal of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. The analysis uses the correlation integral, $C(r)$, to distinguish between chaotic and stochastic systems. If the time series is characterized by an attractor, then [16] the correlation integral $C(r)$ is related to the radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

If the correlation exponent attains saturation with an increase in the embedding dimension, then the system is generally considered to exhibit chaotic dynamics. The saturation value of correlation exponent is defined as the correlation dimension (d_2) of the attractor (see details in refs. [3,6,9]).

2.2.2 The results for time series

Table 2 summarizes the results for the time lag calculated for first 10^3 values of time series. The autocorrelation function crosses 0 only for the NO_2 time series at the site 9, whereas this statistic for other time series remains positive. The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ , but in [6,9] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values in Table 2. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions (Table 3) using Grassberger-Procaccia method [16].

Table 2. Time lags (hours) subject to different values of C_L , and first minima of average mutual information, I_{min1} , for the time series of NO_2 , SO_2 (Gdansk reg.; Jan.-Dec. 2003)

	Site 6 (Sopot)		Site 9 (Gdynia)	
	NO ₂	SO ₂	NO ₂	SO ₂
$C_L = 0$	—	—	102	—
$C_L = 0.1$	136	232	53	147
$C_L = 0.5$	6	12	4	26
I_{min1}	9	19	8	17

The outcome is explained not only inappropriate values of τ but also shortcomings of correlation dimension method. If algorithm [14] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ . If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 6$ for all air pollutants.

Table 3. Correlation exponents (d_2) and embedding dimensions determined by false nearest neighbours method (d_N) with percentage of false neighbours (in parentheses) calculated for various time lags (τ) for the time series of NO₂, SO₂ (Gdansk reg.; Jan.-Dec. 2003)

Site 6 (Sopot)			Site 6 (Sopot)			Site 9 (Gdynia)			Site 9 (Gdynia)		
τ	d_2	d_N	τ	d_2	d_N	τ	d_2	d_N	τ	d_2	d_N
136	-	11 (6.2)	232	-	10 (8.8)	53	7.62	9 (9.2)	147	-	10 (9.8)
6	5.42	6 (1.3)	12	1.64	6 (1.2)	4	5.29	6 (1.1)	26	3.95	6 (1.1)
9	5.31	6 (1.2)	19	1.58	6 (1.2)	8	5.31	6 (1.1)	17	3.40	6 (1.2)

2.2.3. Nonlinear prediction model

First of all, it's important to define how predictable is a chaotic system? The predictability can be estimated by the Kolmogorov entropy, which is proportional to a sum of positive LE. The spectrum of LE is one of dynamical invariants for non-linear system with chaotic behaviour. The limited predictability of the chaos is quantified by the local and global LE, which can be determined from measurements. The LE are related to the eigenvalues of the linearized dynamics across the attractor. Negative values show stable behaviour while positive values show local unstable behaviour. For chaotic systems, being both stable and

unstable, LE indicate the complexity of the dynamics. The largest positive value determines some average prediction limit. Since the LE are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and hence the choice of trajectory, and they do comprise an invariant measure of the attractor. An estimate of this measure is a sum of the positive LE. The estimate of the attractor dimension is provided by the conjecture d_L and the LE are taken in descending order. The dimension d_L gives values close to the dimension estimates discussed earlier and is preferable when estimating high dimensions. To compute LE, we use a method with linear fitted map, although the maps with higher order polynomials can be used too. Non-linear model of chaotic processes is based on the concept of compact geometric attractor on which observations evolve. Since an orbit is continually folded back on itself by dissipative forces and the non-linear part of dynamics, some orbit points $\mathbf{y}^r(k)$, $r = 1, 2, \dots, N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k . One can then choose some interpolation functions, which account for whole neighbourhoods of phase space and how they evolve from near $\mathbf{y}(k)$ to whole set of points near $\mathbf{y}(k+1)$. The implementation of this concept is to build parameterized non-linear functions $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ which take $\mathbf{y}(k)$ into $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ and use various criteria to determine parameters \mathbf{a} . Since one has the notion of local neighbourhoods, one can build up one's model of the process neighbourhood by neighbourhood and, by piecing together these local models, produce a global non-linear model that capture much of the structure in an attractor itself. Table 4 shows the global LE. It can note that the Kaplan-Yorke dimensions [22], which are also the attractor dimensions, are smaller than the dimensions obtained by the algorithm of false nearest neighbours. The presence of the two (from six) positive λ_i suggests the system broadens in the line of two axes and converges along four axes that in the six-dimensional space. **Table 4.** First two LE (λ_1, λ_2), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max}, hours$) for time series of NO_2, SO_2 (Gdansk reg.; Jan.-Dec., 2003)

	Site 6 (Sopot) NO_2	Site 6 (Sopot) SO_2	Site 9 (Gdynia) NO_2	Site 9 (Gdynia) SO_2
λ_1	0.0184	0.0164	0.0189	0.0150
λ_2	0.0061	0.0066	0.0052	0.0052
d_L	4.11	5.01	3.85	4.60
Pr_{max}	40	43	41	49

The time series of SO_2 at the site 9 have the highest predictability (more than 2 days), and other time series have the predictabilities slightly less than 2 days. To use the non-linear prediction method, it is necessary to solve another one problem which can be defined as how much exactly nearest neighbours, NN , must be considered to obtain satisfactory results of the forecasts? Table 5 summarizes the results of our experiments. The coefficients of correlation rise to the maxima at some number of NN . These coefficients are both large and significant. So, we further use $NN = 180$ for NO_2 and $NN = 260$ for SO_2 at the site 6, as well as $NN = 2100$ for NO_2 and $NN = 250$ for SO_2 at the site 9.

Table 5. Coefficient correlation (r) between actual data and 24-hour forecast subject to NN for last 100 points of time series of NO_2 and SO_2 (Gdansk reg.; Jan.-Dec. 2003).

	Site 6 (Sopot) NO_2			Site 6 (Sopot) SO_2			Site 9 (Gdynia) NO_2			Site 9 (Gdynia) SO_2		
NN	80	180	200	80	260	280	80	210	230	80	250	270
R	0.95	0.96	0.96	0.91	0.94	0.94	0.96	0.97	0.97	0.93	0.94	0.94

3. Conclusions

Thus, we considered a problem of a chaos manifestation in dynamics of atmospheric pollutants within earlier formulated formally theoretical basis's of a consistent chaos-geometrical approach to treating of chaotic dynamical systems. This approach combines together the non-linear analysis methods to dynamics, such as the wavelet analysis, multi-fractal formalism, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, the LE analysis, surrogate data method etc. We have investigated a chaotic behaviour in the nitrogen dioxide and sulphurous anhydride concentration time series at 2 sites in Gdansk region and proved an existence of the low-dimensional chaos in these series. We have presented an effective nonlinear prediction model and realized a successful short-range forecast of atmospheric pollutant time series. The presented example has shown high perspectives of a combined chaos-geometrical approach methods to treating dynamics of very complicated chaotic systems.

References

- Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
- Glushkov A.V., Chaos-geometrical universal numerical approach to life science processes: Theoretical basis's// Computational Life Sciences (Springer), in print.

3. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-6(??)-6-12.
4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A. Atmospheric teleconnection patterns: wavelet analysis// Nonlin. Proc.in Geophys.-2004.-V.11,N3.-P.285-293.
5. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V., Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
6. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284-7292.
7. Bunyakova Yu.Ya., Khetselius O.Yu., Non-linear prediction statistical method in forecast of atmospheric pollutants// Proc. of the 8th International Carbon Dioxide Conference. Jena (Germany).-2009.- P.T2-098.
8. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Non-linear prediction method in forecast of air pollutants CO_2 , CO// Transport and Air Pollution. – ZCHbrich: ETH University Press (Switzerland). -2010. – P.131–136.
9. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems – Theory and Applications. – Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.- LIF111 (6p.).
10. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Kuzakon V.M., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Svinarenko A.A., Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on the basis of temporal series analyses (application to semiconductor quantum generators)// Dynamical Systems – Theory and Applications. – Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.-BIF110 (8p.).
11. Lanfredi M., Macchiato M.: Searching for low dimensionality in air pollution time series.*Europhysics Letters* 1997, 1997, 589-594.
12. KoPak K., Saylan L., Sen O., Nonlinear time series prediction of O_3 concentration in CityplaceIstanbul. *AtmosphericEnvironment* (Elsevier) 34, 2000, 1267-1271.
13. Kuznetsov S.P., Dunamical chaos.-Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P.
14. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction// *Phys Rev A*.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.
15. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series// *Phys Rev Lett*.-1988.-Vol.45.-P.712-716.
16. Grassberger P., SnplaceProcaccia SnI., Measuring the strangeness of strange attractors// *Physica D*.-1983.-Vol.9.-P.189-208.
17. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// *Phys Rev A*.-1986.-Vol.33.-P.1134-1140.
18. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366-381
19. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230-242
20. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series// *Phys Rev.Lett*.-1995.-Vol.55.-P.1082-1085
21. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B., Farmer J., Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data// *Physica D*.-1992.-Vol.58.-P.77-94.
22. Kaplan J.L., Yorke J.A., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in: Peitgen H.-O., Walter H.-O. (Eds.), Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics No. 730. Springer, Berlin.-1979.-pp.204-227.

A.V. Glushkov, Yu.Ya. Bunyakova, P.A. Zaichko

Mathematics Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: dirac13@mail.ru

Особливості математичної частини тестів GRE, GMAT

Я.П. Кривко

Анотація Стаття присвячена особливостям математичної частини тестів GMAT та GRE. Зроблено порівняльний аналіз між ЗНО з математики завданнями GMAT та GRE. Виявлені спільні риси та акцентовано увагу на ключових відмінностях між тестами.

Ключові слова Тест, GMAT, GRE, математика, зовнішнє незалежне оцінювання, алгебра, геометрія, статистика, теорія ймовірностей, графіки функцій, тестування, тестові завдання

УДК 378.091.27:51

1 Вступ

Останні роки серед української молоді має місце стійка тенденція отримання вищої освіти у європейських країнах або в Америці чи Канаді. Однак тут виникає коло певних проблем, найважливішими серед яких є, зокрема, вивчення базових університетських дисциплін іншою мовою, відмінності у шкільній програмі абітурієнтів, на основі якої складені університетські курси, вік наших випускників шкіл (17 – 18 років), що не відповідає віку повноліття (21 рік), прийнятому в більшості закордонних країн та інші. Тому багато молодих людей отримують освіту кваліфікаційного рівня «бакалавр» в Україні, а вже потім продовжують своє навчання закордоном. Переважно студенти обирають бізнес-напрямки подальшої освіти, для чого необхідно

складати тест TOEFL або IELTS та GRE або GMAT. Останні тести містять досить велику кількість інколи досить специфічних завдань з математики, до яких можуть бути готові українські абітурієнти. Тому актуальність цієї роботи полягає у необхідності проведення порівняльного аналізу між тестами європейськими (американськими) та українським ЗНО з математики для успішного подолання можливих труднощів абітурієнтів при їх проходженні, та більш ефективної підготовки до тестування.

Метою статті є виявлення основних особливостей тестів GRE та GMAT, порівняння їх з українським зовнішнім незалежним оцінюванням з математики.

Слід зазначити, що зміст цих тестів, в основному ґрунтуються на шкільних знаннях з математики, але приблизно чверть завдань — з тематики, що вивчається в Україні у вищих навчальних закладах під час опрацювання курсу «Вища математика». Так GRE (Graduate Record Examinations) — стандартизований іспит англійською мовою, який є однією з необхідних умов вступу на зарубіжні післявузівські програми та курси (MSc, MBA, PhD та ін.). Існує два типи іспиту: GRE General Test (загальний, розроблений для оцінки критичного мислення та аналітичних навичок в цілому) та GRE Subject Test (спеціалізований)[1]. GMAT (Graduate Management Admission Test) — це також англомовний загальноосвітній тест, що визначає аналітичні, математичні та вербалні здібності.

2 Особливості тестів

Тест GMAT здається дистанційно (он-лайн тест), за допомогою комп'ютерної програми. Якщо такої можливості немає, то пропонується проходження тестів або на базі тимчасових комп'ютеризованих центрів тестування за скороченим розкладом, або у вигляді письмового тесту (один або два раз на рік). GMAT складається з трьох секцій, кожна з яких має свої рівні: Analytical Writing Assessment (письмове есе на чітко задану тему); Quantitative (математичні завдання); Verbal (спеціалізований тест на знання і розуміння англійської мови) [2]. Тест спрямований на оцінювання вербалних, математичних, та аналітичних здібностей також навичок письма на англійській мові які є важливими для подальшої роботи кандидату. Тривалість тесту складає приблизно чотири години з десятихвилинними переврвами. Проходження тесту не передбачає оцінку знань кандидата у конкретних галузях бізнесу або професіональних навичок. Не враховуються також

такі суб'єктивні якості як мотивація, креативність, навички міжособистісного спілкування. Результати тесту дійсні протягом п'яти років.

Є відмінності у способах перевірки тестів GRE та GMAT та українського ЗНО. Так ЗНО перевіряється за допомогою комп'ютера, а тест GMAT, наприклад, перевіряється одночасно і комп'ютером і людиною. У випадку, коли результати співпадають – їх направляють безпосередньо до учебового закладу (а не до абітурієнту як на Україні), інакше – залучають третю особу для вирішення питання оцінювання.

Математична частина обох тестів являє собою перевірку базових знань з алгебри, геометрії та теорії ймовірності. У більшості випадків це матеріал шкільної програми, який включено до українського ЗНО, однак існують суттєві відмінності. Зокрема, це кількість завдань, які потрібно розв'язати за певний час. На ЗНО це 33 завдання на 150 хвилин, тобто умовна «швидкість» виконання – 0,22 завдання за хвилину, при складанні тесту GMAT – це 37 питань за максимум 75 хвилин, тобто це 0,49 завдань за хвилину, а у випадку GRE пропонується 28 питань за 45 хвилин (0,62 завдання за хвилину), тобто потрібно розв'язувати задачі у два, а то й три рази швидше.

Окрім потребує уваги питання форми тестів. Українське ЗНО містить завдання трьох форм: завдання з вибором однієї правильної відповіді, завдання на встановлення відповідності, а також завдання відкритої форми з короткою відповіддю [3]. Інколи ці завдання носять характер задач більш на логіку ніж на глибоке знання математики. Наприклад:

$$\begin{array}{r} \bullet \blacklozenge \\ \times \blacksquare \blacklozenge \\ \hline \blacktriangle \blacksquare \blacklozenge \end{array}$$

In the multiplication above, each symbol represents a different unknown digit, and $\bullet \times \blacksquare \times \blacklozenge = 36$. What is the three digit integer $\bullet\blacksquare\blacklozenge$?

- (A) 263 (B) 236 (C) 194 (D) 491 (E) 452

Подібні завдання спрямовані на перевірку здатності кандидата розв'язування до математичних задач. Проблемні питання дають можливість запропонувати декілька варіантів задач з арифметики, основної алгебри та елементарної геометрії. Завдання полягає в тому, щоб розв'язати задачу та обрати вірну відповідь з п'яти запропонованих варіантів.

What number is x percent of y percent of z , in terms of x , y , and z ?

- (A) $\frac{xyz}{10,000}$ (B) $\frac{xy + xz}{10,000}$ (C) $\frac{xyz + 100xz}{10,000}$ (D) $\frac{xyz}{100}$ (E) $\frac{xy + xz}{100}$

Частина задач представлена у суто математичних розрахунках, інші мають вигляд текстових задач, що ґрунтуються на життєвих ситуаціях, але потребують математичного розв'язку.

A grocery store sells two varieties of jellybean jars, and each type of jellybean jar contains only red and yellow jellybeans. If Jar B contains 20% more red jellybeans than Jar A, but 10% fewer yellow jellybeans, and Jar A contains twice as many red jellybeans as yellow jellybeans, by what percent is the number of jellybeans in Jar B larger than the number of jellybeans in Jar A?

Відрізняється не тільки формулювання задачі, але й форма запису числа. Так запис 3,252 в українській школі означає «три цілих двісті п'ятдесят дві тисячні», тоді як у тестах GMAT та GRE це «три тисячі двісті п'ятдесят два», а ціла частина відділяється від дробової на письмі крапкою (наприклад, 3,252.7 – «три тисячі двісті п'ятдесят дві цілих сім десятих»). В усіх завданнях використовуються тільки дійсні числа. Слід звернути увагу на те, що наявні у тестах діаграми, та числові дані до них, представлені з максимальною точністю, що може ускладнити виконання завдання.

В тестах GMAT та GRE крім традиційних завдань з вибором відповіді, мають місце питання ще двох типів – на вирішення задач і «на визначення достатності даних» (Data Sufficiency). Кожне питання типу Data Sufficiency супроводжується вихідною інформацією і двома твердженнями, позначеними номерами «1» і «2», які містять додаткову інформацію. Завдання полягає в тому, щоб визначити, чи міститься необхідна інформація в першому, в другому або в обох твердженнях, що є нетиповим для українських тестів. Крім цього, виконання завдань ускладнено тим, що одні й ті ж твердження можуть поширюватися на декілька завдань (див. приклади нижче).

Такі завдання допомагають перевірити рівень підготовки кандидата за допомогою виявлення його здібностей розв'язувати задачі з використанням великої кількості напрямків розв'язків. Також важливо, що на всі питання доводиться відповідати тільки в тій послідовності, в якій їх пропонує комп'ютер. Повернувшись і переосмислiti вже пройдене завдання неможливо.

Leo can buy a certain computer for p_1 dollars in State A, where the sales tax is t_1 percent, or he can buy the same computer for p_2 dollars in State B, where the sales tax is t_2 percent. Is the total cost of the computer greater in State A than in State B?

- (1) $t_1 > t_2$
- (2) $p_1 t_1 > p_2 t_2$

A school administrator will assign each student in a group of n students to one of m classrooms. If $3 < m < 13 < n$, is it possible to assign each of the n students to one of the m classrooms so that each classroom has the same number of students assigned to it?

- (1) It is possible to assign each of $3n$ students to one of m classrooms so that each classroom has the same number of students assigned to it.
- (2) It is possible to assign each of $13n$ students to one of m classrooms so that each classroom has the same number of students assigned to it.

Це вимагає особливої уваги протягом усього іспиту. Деякі питання можуть здаватися ідентичними, але при цьому мати різні відповіді [4].

Тематичне наповнення тестів GMAT та GRE у цілому відповідає українському шкільному курсу математики. Зокрема до цих тестів входять: арифметичні задачі; операції з цілими та кратними числами, множниками; числові послідовності; робота з десятинними числами, відсотками, пропорціями; показники ступеню та квадратні корені; статистика (послідовності, середні величини, теорія ймовірностей, мода, медіана, квартилі, які, до речі, не вивчаються в українській школі); операції із змінними величинами; алгебраїчні рівняння та нерівності. На відміну від ЗНО з математики повністю відсутні тригонометрія, похідна та первісна.

Велика увага приділяється алгебраїчним дробам та діям над ними. Є завдання на спрощення виразів, що містять ступені з цілими показниками. Багато завдань на розуміння понять простих та складних чисел (є завдання, у яких потрібно розкласти число на прості множники), порівнянь чисел. Є велика кількість завдань, у яких потрібно знати властивості графіків функцій (перш за все, це лінійна функція, квадратична функція та інші). На відміну від аналогічних завдань ЗНО, графіки потрібно описувати словами,

що може ускладнити виконання завдання. Так як й на ЗНО, багато завдань на розв'язання рівнянь та нерівностей (в основному, це лінійні випадки). окремо слід звернути увагу на так звані «текстові» задачі, бо тести GMAT та GRE, як і тести ЗНО, обов'язково містять таки завдання. Найчастіше, це задачі на знаходження процентів від числа, банківських процентів (простих та складних).

Геометрична складова тесту містить питання, які вивчаються в шкільному курсі геометрії переважно до 9 класу включно. Зокрема, це властивості таких фігур як трикутники, прямокутники, квадрати та їх площин, вектори. Використовується формула суми кутів багатокутника. Кутам взагалі приділяється значна увага. Наприклад, вступник повинен знати властивості суміжних кутів та кутів, що утворені паралельними прямими та січною. Завдання, як і на ЗНО, в основному представлені графічно. Стереометричні задачі дуже обмежені – це, переважно, задачі на властивості паралелепіпеду.

3 Висновки

На нашу думку, найбільшу складність представляють завдання GMAT та GRE з математичної статистики та аналізу даних. Вони містять не тільки комбінаторику, елементи математичної статистики, начальні поняття теорії ймовірностей, що вивчають українські школярі (переважно в 11 класі), але і таки поняття як квартилі, процентелі, стандартне відхилення. Вступникам необхідне вміння користуватися специфічними графіками (наприклад, boxplots or box-and-whisker plots), у яких застосовується незвичне для українського студента (абітурієнта) позначення найменшого (L) та найбільшого (G) значень. Інакше ніж у наших підручниках представлені такі поняття як перестановки (permutation), розміщення (permutations of n objects taken k at a time) та комбінації (combinations of n objects taken k at a time). Позначення та формули для їх знаходження також дещо відрізняються. Наприклад, в українському ЗНО з математики комбінації - це C_n^k , а в GMAT та GRE – це nC_k або $\binom{n}{k}$ й таке ін.[5, 6]. Тобто для успішного проходження тестів GMAT та GRE потрібно ретельно опрацювати цю тему.

Таким чином тести типу GMAT та GRE, як тести, що перевіряють загальну математичну підготовку, мають багато спільногого з українським ЗНО. Тобто при підготовці до них доцільно користуватися навчально-дидактичними матеріалами з підготовки до ЗНО з математики. Однак існують і суттєві відмінності, на які слід звернути увагу абітурієнтам. По-перше,

ці тести перевіряють різний зміст курсу математики; по-друге, є нові для українського абітурієнта типи завдань, зокрема це стосується теми «data analysis», яка найбільш відрізняється від ЗНО з математики. Таким чином, у українського абітурієнта є реальна можливість скласти вступні іспити до них з математики, але за умови ґрунтовної ретельної підготовки.

Література

1. <http://www.masteryourgre.com/>
2. <http://studentland.ua/ru/type/843/gmat.html>
3. <http://ru.osvita.ua/test/training/5017/>
4. <http://www.ucheba.ru/language-article/5474.html>
5. Math Review. 2012 by Educational Testing Service. All rights reserved. ETS, the ETS logo, LISTENING. LEARNING. LEADING. and GRE are registered trademarks of Educational Testing Service (ETS), 99 p.
6. <http://www.ets.org/gre>
7. http://www.mba.com/mba/TaketheGMAT_mba.com
8. <http://www.gmac.com> Graduate Management Admission Council
9. http://www.gmatix.com/history_of_gmat.htm GMATix

Я.П. Кривко

ЛНУ імені Тараса Шевченка, КЗ «ЛОМАНУМ», Луганськ, Україна.

E-mail: yakrивко@yandex.ru

Jana Krivko

The features of mathematical part of tests GRE, GMAT

The article deals with the analysis of the main problems in passing the mathematical part of the GMAT and GRE tests. The author analyzes the basic peculiarities of these tests from the point of view of their correspondence to the Ukrainian variant of final testing in mathematics – the external independent assessment.

Топологическая эквивалентность простых МС-пар на четырёхмерных многообразиях

Н. В. Лукова - Чуйко

Аннотация Доказан критерий топологической эквивалентности простой полярной МС-пары без критических точек индекса 3 на четырёхмерном многообразии в терминах упорядоченных диаграмм Кирби.

Ключевые слова функции Морса, эквивалентность, поле Морса - Смейла

УДК 517.91

Пусть M — гладкое многообразие. Два векторных поля X, Y на M называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M \rightarrow M$, отображающий траектории поля X в траектории поля Y , сохраняя их ориентацию.

Разными способами топологическая классификация векторных полей Морса - Смейла на поверхностях получена Е.А.Леоновичем и А.Г.Майером, М.Пейксото, В.В.Шарком, Х.Вонгом, Г.Флейтисом, Е.Гирик и др.

Топологической классификации векторных полей Морса - Смейла на трёхмерных многообразиях посвящены работы Г.Флейтаса, Я.Л.Уманского та О.О.Пришляка, а в четырёхмерном случае работа [1].

Функции $f, g : M \rightarrow \mathbf{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $h : M \rightarrow M$, $h' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, для которых выполняется равенство $f \circ h = h' \circ g$ и гомеоморфизм h' сохраняет ориентацию прямой.

Глобальная топологическая классификация функций Морса на поверхностях и односвязных многообразиях размерности большей 5 была получена

в работах А.Т.Фоменко и В.В.Шарко [2], [3]. Топологическую классификацию функций Морса на замкнутых трехмерных многообразиях построено в [4], а на четырёхмерных в [5].

В [6] получена классификация функций Морса - Смейла на замкнутых римановых трехмерных многообразиях по отношению к геометрической эквивалентности в терминах обобщенных диаграмм Хегора.

МС-парой называется такая пара $\{f, X\}$, в которой f — функция Морса, а X — градиентно-подобное векторное поле этой функции.

Две МС-пары $\{f, X\}, \{g, Y\}$ называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $h : M \rightarrow M$, $h' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ для которых выполняется равенство $f \circ h = h' \circ g$ и кроме того гомеоморфизм h отображает траектории поля X на траектории поля Y .

По теореме Морса в окрестности невырожденной критической точки существует система координат x_1, x_2, \dots, x_n , в которой функция имеет вид $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(0) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$. Поле $X = \{-x_1, -x_2, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ будет градиентно-подобным для этой функции. Назовем эти функцию и поле стандартной парой.

МС-пара называется простой, если для каждой критической точки функции существует окрестность в которой она топологически эквивалентна стандартной МС-паре.

МС-пара называется полярной, если у функции существует лишь один локальный минимум и один локальный максимум.

Постановка задачи. Найти условия топологической эквивалентности простой полярной МС-пары без критических точек индекса 3.

Топологическая эквивалентность простой полярной МС-пары без критических точек индекса 3. Будем рассматривать функции Морса на 4-мерных многообразиях, у которых один минимум и один максимум и нет критических точек индекса 3. Множество критических точек упорядочено по возрастанию значения функции в них. Номер критической точки — это номер ее критического значения. По функции построим разложение на ручки. Тогда это разложение на ручки будет задавать диаграмму Кирби, в которой каждой вложенной окружности с точкой соответствует 1-ручка, а окружности с оснащением — 2-ручка (эта окружность есть средней сферой 2-ручки). При этом каждая окружность имеет тот же номер, который и соответствующая критическая точка функции Морса (равный номеру соответствующей ручки).

При этом всегда можно добиться, чтобы окружность с точкой была стандартно вложенной, дуги внутри нее были горизонтальными и проходили над левой полуокружностью и под правой полуокружностью. В дальнейшем мы будем предполагать, что для всех диаграмм выполняется это свойство. По другому, мы это можем рассматривать как фиксацию внутреннего двухмерного диска, ограниченного окружностью с точкой, и всех его пересечений с дугами.

Диаграмму Кирби, в которой каждой окружности приписан номер, а для окружностей с точками зафиксированы внутренние диски, назовем упорядоченной. Две упорядоченные диаграммы Кирби называются изоморфными, если существует гомеоморфизм сфер S^3 , который отображает вложенные окружности на окружности, сохраняя точки или оснащения окружностей, номера окружностей и точки пересечения с внутренними дисками.

Теорема 1 *Две простые полярные МС-пары без критических точек индекса 3 на четырехмерных многообразиях топологически эквивалентны тогда и только тогда, если построенные по ним упорядоченные диаграммы Кирби изоморфны.*

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку топологическая эквивалентность задает соответствие между траекториями полей, то она порождает биекцию между их пересечениями с трехмерными сферами, которая по построению будет гомеоморфизмом. При этом окружности отображаются в окружности, сохраняя отмеченные точки и оснащения. Соответствие критических значений гарантирует равенство номеров (порядков) этих окружностей.

Достаточность. Не ограничивая общности можем считать, что у двух функций одинаковые значения в соответствующих критических точках. Гомеоморфизм диаграмм задает соответствие между траекториями полей (кроме неустойчивых многообразий критических точек индекса 2 и 3). При необходимости подправим его так, чтобы он совпадал с гомеоморфизмом в окрестности оснащенных окружностей, который задается условием простоты функций. Тогда получим также соответствие между неустойчивыми многообразиями критических точек индекса 2. Соответствие между неустойчивыми многообразиями критических точек можно получить из условия единственности одноточечных компактификаций на пространстве орбит. Таким образом, получим гомеоморфизм пространства орбит одной функции в другую. Для каждой орбиты (траектории) зададим гомеоморфизм на соответствующую орбиту другой функции с помощью равенства значений функций

в точках орбиты. Таким образом получим искомый гомеоморфизм многообразий.

Пример. На четырёхмерной сфере функция Морса с 4 критическими точками индексов 0,1, 2 и 4 задается произвольным узлом (2-ручка) и окружностью с точкой, которая есть границей 2-диска, который пересекается с узлом трансверсально в одной внутренней точке. Две такие диаграммы эквивалентны, если эквивалентны их узлы (существует гомеоморфизм трехмерной сферы, переводящий узел в узел).

Заключение. Исследованы топологические свойства МС-пар на замкнутых четырёхмерных многообразиях. Автор надеется, что полученные результаты можно будет распространить на более широкий класс МС-пар.

Список литературы

1. Prishlyak A.O. Gradient like Morse-Smale dynamical systems // Mat. studii, Т.16, №.1 , 2001.- р.99-104.
2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1. – Ижевск: Изд. “Удмуртский универ.”, 1999. -444с.
3. Шарко В.В. Функции на многообразиях. К.: Наук. думка, 1980. - 196 с.
4. Пришляк А. Топологические свойства функций на двух- и трехмерных многообразиях. Palmarium Acad. Publ. 2012. - 132с.
5. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса на 4-мерных многообразиях // Успехи мат. наук, V.56. №.1, 2001,- с.173-174.
6. Лукова Н.В., Пришляк О.О. Геометричні властивості МС-функцій на тривимірних многовидах // Збірник праць Інституту математики НАНУ, Т. 2, № 3, 2005.- с.112-124.

Н. В. Лукова - Чуйко

Государственный университет телекоммуникаций, кафедра высшей математики, Киев

E - mail :lukova@ukr.net

Topological equvalance of simple MS-pairs on 4-manifolds

It is proved a criterion of topological equivalence of simple polar MS-pairs without critical points of index 3 on 4-manifolds using ordered Kirby diagrams

Об аффинных омбилических погружениях высокой коразмерности.

Елена Алексеевна Шугайло

Аннотация В работе описаны свойства многомерных аффинных омбилических погружений высокой коразмерности с плоской и локально симметрической индуцированной связностью. Даны параметризация омбилических погружений с нильпотентным оператором кривизны.

Ключевые слова аффинное погружение, оператор кривизны, локально симметрическая связность.

УДК 514.754

Введение

Пусть (M^n, ∇) – аффинное n -мерное многообразие со связностью ∇ , (\mathbb{R}^{n+k}, D) – стандартное (арифметическое) аффинное пространство с плоской связностью D . Обозначим $\mathfrak{X}(M^n)$ множество всех гладких векторных полей на M^n . В соответствии с [3], погружение $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ называется аффинным, если вдоль погружения определено k -мерное трансверсальное дифференцируемое распределение Q : $x \in M^n \mapsto Q_x$ такое, что для всех $x \in M^n$ и всех $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ справедливо разложение

$$D_X f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y), \quad h(X, Y) \in Q, \quad (1)$$

которое определяет *аффинную фундаментальную форму* $h(X, Y)$.

Для произвольного трансверсального векторного поля ξ записывается также аналогичное разложение $D_X \xi = -f_*(S_\xi X) + \nabla_X^\perp \xi$, которое опреде-

ляет оператор Вейнгартена S_ξ относительно ξ и трансверсальную связность ∇^\perp .

Отображение $S_x : Q_x \times T_x(M^n) \rightarrow T_x(M^n)$, действующее по правилу $(\xi, X) \mapsto S_\xi X$ в каждой точке $x \in M^n$, определяет *отображение Вейнгартена*.

Пусть ξ_1, \dots, ξ_k – базис трансверсального распределения Q . Аффинные аналоги разложений Гаусса и Вейнгартена записываются в виде

$$D_X Y = \nabla_X Y + h^\alpha(X, Y)\xi_\alpha, \quad (2)$$

$$D_X \xi_\alpha = -S_\alpha X + \tau_\alpha^\beta(X)\xi_\beta. \quad (3)$$

Компоненты *кубической формы* аффинного погружения относительно базиса трансверсального распределения имеют вид:

$$C^\alpha(X, Y, Z) = (\nabla_X h^\alpha)(Y, Z) + \tau_\beta^\alpha(X)h^\beta(Y, Z). \quad (4)$$

В [7] доказано, что ранг отображения $h(X, Y) : T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow Q_x$ не зависит от выбора трансверсального распределения и называется *точечной коразмерностью* аффинного погружения. Доказано также, что в случае аффинного погружения максимальной точечной коразмерности размерность ядра и образа отображения Вейнгартена не зависят от выбора трансверсального распределения. Следовательно, можно выделять отдельные классы погружений, имеющие общие свойства отображения Вейнгартена. Одним из таких классов являются омбилические погружения. Хорошо изучены омбилические гиперповерхности – собственные и несобственные аффинные сферы ([2, 3] и др.). Определение и свойства омбилических погружений коразмерности два даны в [4]. Для погружений более высокой коразмерности введем аналогичное определение

Определение 1 Аффинное погружение $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$, для которого существует трансверсальное распределение Q такое, что отображение Вейнгартена обладает следующим свойством:

$$S : (\xi, X) \mapsto \lambda_\xi \cdot X, \text{ где } \lambda_\xi \text{ – гладкая функция } \forall \xi,$$

называется аффинным омбилическим погружением. При этом

- (i) если все λ_ξ нулевые, то есть $S \equiv 0$, то погружение называется *несобственным аффинным омбилическим*;
- (ii) в противном случае погружение называется *собственным аффинным омбилическим*.

Операторы Вейнгартена аффинного омбилического погружения обладают следующими свойствами: $S_\alpha = \lambda_\alpha \cdot I$, где λ_α – гладкие функции, I – тождественный оператор.

Заметим, что аффинные омбилические погружения являются частным случаем центро-аффинных погружений [4, 3].

Данная работа посвящена изучению собственных аффинных омбилических погружений.

1 Предварительные сведения

Рассмотрим аффинное погружение $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$. Хорошо известны [2] основные уравнения аффинных погружений:

$$R(X, Y)Z = h^\alpha(Y, Z)S_\alpha X - h^\alpha(X, Z)S_\alpha Y; \quad (5)$$

$$(\nabla_X h^\alpha)(Y, Z) + \tau_\beta^\alpha(X)h^\beta(Y, Z) = (\nabla_Y h^\alpha)(X, Z) + \tau_\beta^\alpha(Y)h^\beta(X, Z); \quad (6)$$

$$(\nabla_X S_\alpha)Y - \tau_\alpha^\beta(X)S_\beta Y = (\nabla_Y S_\alpha)X - \tau_\alpha^\beta(Y)S_\beta X; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h^\beta(X, S_\alpha Y) - h^\beta(Y, S_\alpha X) = \\ X(\tau_\alpha^\beta(Y)) + \tau_\gamma^\beta(X)\tau_\alpha^\gamma(Y) - Y(\tau_\alpha^\beta(X)) - \tau_\gamma^\beta(Y)\tau_\alpha^\gamma(X) - \tau_\alpha^\beta([X, Y]). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказано [7], что если M^n – подмногообразие в \mathbb{R}^{n+k} с трансверсальным распределением $Q = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ и $\bar{Q} = \text{span}\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k\}$ – преобразование трансверсального распределения

$$\bar{\xi}_\alpha = \Phi_\alpha^\beta \xi_\beta + Z_\alpha, \quad (9)$$

где Z_α – касательные векторные поля на M^n , $\Phi = [\Phi_\alpha^\beta]_{k \times k}$ невырожденная матрица из гладких функций, тогда:

$$\bar{h}^\alpha(X, Y) = [\Phi^{-1}]_\beta^\alpha h^\beta(X, Y) \quad (10)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - [\Phi^{-1}]_\beta^\alpha h^\beta(X, Y)Z_\alpha \quad (11)$$

$$\bar{S}_\alpha X = \Phi_\alpha^\beta S_\beta X - \nabla_X Z_\alpha + \bar{\tau}_\alpha^\beta(X)Z_\beta \quad (12)$$

$$\bar{\tau}_\alpha^\beta(X) = [\Phi^{-1}]_\gamma^\beta \{\tau_\delta^\gamma(X)\Phi_\alpha^\delta + h^\gamma(X, Z_\alpha) + X(\Phi_\alpha^\gamma)\} \quad (13)$$

Теорема 1 Пусть $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ – собственное аффинное омбилическое погружение с радиусом-вектором погружения \bar{r} . Если в трансверсальном распределении существует векторное поле ξ такое, что $\lambda_\xi \neq 0$ во всей области определения, тогда базис трансверсального распределения может быть выбран следующим образом

$$\xi_1 = -\bar{r}, \quad \xi_\alpha = \overrightarrow{\text{const}} \text{ при } \alpha = \overline{2, k}. \quad (14)$$

При этом:

1) операторы Вейнгартена имеют следующий вид

$$S_1 = I, \quad S_\alpha \equiv 0 \quad \forall \alpha = \overline{2, k}; \quad (15)$$

2) трансверсальная связность плоская, причем

$$\tau_\alpha^\beta(X) = 0 \text{ для всех } X \text{ и всех } \alpha, \beta = \overline{1, k};$$

3) тензор кривизны индуцированной связности вычисляется по формуле

$$R(X, Y)Z = h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y \quad (16)$$

4) связность является проективно плоской;

5) связность полусимметрическая, т.е. $R \cdot R = 0$;

6) тензор Риччи симметричен и вычисляется по формуле

$$Ric(Y, Z) = (n-1)h^1(Y, Z).$$

Доказательство Рассмотрим аффинное омбилическое погружение $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$. Операторы Вейнгартена имеют следующий вид $S_\alpha = \lambda_\alpha \cdot I$, причем существует α такое, что $\lambda_\alpha \neq 0$ во всей области определения. Не нарушая общности можем считать, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда можно выбрать базис в трансверсальном распределении

$$\bar{\xi}_\alpha = \Phi_\alpha^\beta \xi_\beta, \quad \Phi_{k \times k} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & -\lambda_2/\lambda_1 & \dots & -\lambda_k/\lambda_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

таким образом, что $\bar{S}_1 = I$, $\bar{S}_\alpha \equiv 0 \quad \forall \alpha = \overline{2, k}$. То есть операторы Вейнгартена имеют вид (15).

Из уравнения Гаусса (5) получаем, что тензор кривизны вычисляется по формуле (16)

$$R(X, Y)Z = h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y.$$

Тензор кривизны в данном случае совпадает с тензором кривизны индуцированной связности центро-аффинного погружения гиперповерхности [3]. Следовательно, в данном случае связность имеет те же свойства, а именно:

- 1) тензор Риччи симметричен и вычисляется по формуле

$$Ric(Y, Z) = (n - 1)h^1(Y, Z);$$

- 2) связность является проективно плоской.

Прямым подсчетом легко проверить, что данная связность полусимметрическая, т.е. $R \cdot R = 0$.

$$\begin{aligned} (R(U, W) \cdot R)(X, Y)Z &= R(U, W)(R(X, Y)Z) - R(R(U, W)X, Y)Z - \\ R(X, R(U, W)Y)Z - R(X, Y)(R(U, W)Z) &= (R(U, W)(h^1(Y, Z)X - \\ h^1(X, Z)Y) - R(h^1(W, X)U - h^1(U, X)W, Y)Z - R(X, h^1(W, Y)U - \\ h^1(U, Y)W)Z - R(X, Y)(h^1(W, Z)U - h^1(U, Z)W) = \\ h^1(Y, Z)(h^1(W, X)U - h^1(U, X)W) - h^1(X, Z)(h^1(W, Y)U - h^1(U, Y)W) - \\ h^1(W, X)(h^1(Y, Z)U - h^1(U, Z)Y) + h^1(U, X)(h^1(Y, Z)W - h^1(W, Z)Y) - \\ h^1(W, Y)(h^1(U, Z)X - h^1(X, Z)U) + h^1(U, Y)(h^1(W, Z)X - h^1(X, Z)W) - \\ h^1(W, Z)(h^1(Y, U)X - h^1(X, U)Y) + h^1(U, Z)(h^1(Y, W)X - h^1(X, W)Y) = 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения Риччи (8) для данного погружения

$$\text{при } \alpha = 1 : \quad h^\beta(X, S_1Y) - h^\beta(Y, S_1X) = h^\beta(X, Y) - h^\beta(Y, X) = 0;$$

$$\text{при } \alpha = \overline{2, k} : \quad h^\beta(X, S_\alpha Y) - h^\beta(Y, S_\alpha X) = h^\beta(X, 0) - h^\beta(Y, 0) = 0.$$

Таким образом, для данного погружения *трансверсальная связность плоская*.

Поскольку $S_\alpha = 0$ при $\alpha = \overline{2, k}$ и $\nabla S_1 = 0$ при $\alpha = 1$, то из уравнений Кодицци (7), получаем: $-\tau_\alpha^1(X)Y = -\tau_\alpha^1(Y)X$. Так как это равенство выполняется при любых X, Y , то следовательно,

$$\tau_\alpha^1(X) = 0 \text{ для всех } X \text{ и всех } \alpha = \overline{1, k}. \quad (17)$$

Поскольку трансверсальная связность плоская, то можно выбрать базис в трансверсальном распределении таким образом, что все формы трансверсальной связности будут нулевые. А с учетом (17) оказывается, что такой базис может быть получен преобразованием $\bar{\xi}_\alpha = \Phi_\alpha^\beta \xi_\beta$ с матрицей $\Phi_{k \times k} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (k-1)} \\ b_{(k-1) \times 1} & \Psi_{(k-1) \times (k-1)} \end{pmatrix}$, которая не меняет (12,13) вид операторов Вейнгартена (15).

Итак, получаем $D_X \xi_1 = -X$, $D_X \xi_\alpha = 0$ при $\alpha = \overline{2, k}$. Таким образом, если \bar{r} - радиус-вектор погружения, то базис трансверсального распределения может быть выбран следующим образом $\xi_1 = -\bar{r}$, $\xi_\alpha = \overrightarrow{\text{const}}$ при $\alpha = \overline{2, k}$. Теорема полностью доказана.

Лемма 1 Пусть $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ – собственное аффинное омбилическое погружение, причем существует α такое, что $\lambda_\alpha \neq 0$ во всей области определения. Тогда погружение может быть параметризовано следующим образом

$$\bar{r}(x) = \{\rho^1(x), \dots, \rho^{n+1}(x), F^2(x), \dots, F^k(x)\} \quad (18)$$

с базисом трансверсального распределения

$$\xi_1 = -\bar{r} = -\{\rho^1, \dots, \rho^{n+1}, 0, \dots, 0\}, \xi_\alpha = \{0, \dots, 1, \dots, 0\} \text{ при } \alpha = \overline{2, k}, \quad (19)$$

где единица стоит на $(n+\alpha)$ -м месте. При этом выполняются все свойства, сформулированные в теореме 1, за исключением форм трансверсальной связности: $\tau_1^\beta(X) = X(F^\beta)$ для $\beta = \overline{2, k}$, остальные компоненты нулевые.

Доказательство Выберем базис трансверсального распределения (14). Итак, ξ_α – постоянные векторные поля для $\alpha = \overline{2, k}$. Пусть $V = \mathbb{R}^{n+1}$ – аффинное подпространство в \mathbb{R}^{n+k} , трансверсальное пространство $\tilde{Q} = \text{Lin}\{\xi_2, \dots, \xi_k\}$. Пусть $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow V$ – проекция вдоль \tilde{Q} такая, что $\pi \circ f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ – центро-аффинное погружение с образом W – открытым подмножеством V и трансверсальным векторным полем $\tilde{\xi}$, где $\tilde{\xi}$ – проекция ξ_1 на V вдоль \tilde{Q} . Можем найти гладкое отображение $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ такое, что $f(x) = (\pi \circ f)(x) + \sum_{\alpha=2}^n F^\alpha(x) \xi_\alpha$.

Выберем систему координат в подпространстве \tilde{Q} следующим образом: $\xi_\alpha = \{0, \dots, 1, \dots, 0\}$, где единица стоит на $(n+\alpha)$ -м месте при $\alpha = \overline{2, k}$. Тогда $\tilde{\xi} = -\{\rho^1, \dots, \rho^{n+1}, 0, \dots, 0\} = \xi_1$ и параметризация погружения имеет вид (18).

В теореме 1 свойства омбилического погружения сформулированы для базиса трансверсального погружения (14). Базис (19) соответствует преобразованию (9) базиса (14) с $Z_\alpha \equiv 0$ и матрицей

$$\Phi_{k \times k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ F^2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F^k & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При таком преобразовании h^1 не меняется (10), вид операторов Вейнгарте-на (15) также не меняется (12), а значит, не меняются и свойства тензора кривизны. Трансверсальная связность остается плоской, но из (13) следует, что $\tau_1^\beta(X) = X(F^\beta)$, остальные компоненты нулевые.

Очевидно, что если не все λ_α нулевые, но не существует α , при котором λ_α не обращается в нуль во всей области определения, то параметризация (18) может быть выбрана локально.

Если для собственного аффинного омбилического погружения выбран трансверсальный базис (19), то свойства погружения определяются компонентой аффинной фундаментальной формы относительно ξ_1 , то есть $h^1(X, Y)$. Назовем собственное аффинное омбилическое погружение с базисом трансверсального распределения (19) *невырожденным*, если форма h^1 невырождена, и *вырожденным* в противном случае.

Следствием предыдущей леммы является следующее

Предложение 1 *Образ собственного аффинного омбилического погружения $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ лежит на аффинном гиперцилиндре с $(k-1)$ -мерной образующей, базой которого является n -мерная центро-аффинная гиперповерхность.*

Лемма 2 *Пусть даны два собственных аффинных омбилических погружения $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ и $\tilde{f} : (M^n, \tilde{\nabla}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$. Предположим $\nabla = \tilde{\nabla}$, тогда образы этих погружений лежат на аффинно эквивалентных цилиндрах.*

Доказательство Выберем для каждого из данных погружений трансверсальный базис (19). Погружения лежат на аффинных цилиндрах с базами, которые задаются радиусами-векторами ρ и $\tilde{\rho}$ соответственно.

Для центро-аффинных гиперповерхностей ρ и $\tilde{\rho}$ имеем следующие характеристики: $(\nabla, h = h^1, S = S_1 = I, \tau = \tau_1^1 = 0)$, $(\tilde{\nabla}, \tilde{h} = \tilde{h}^1, \tilde{S} = \tilde{S}_1 = I, \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_1^1 = 0)$. Поскольку $\nabla = \tilde{\nabla}$, то $R = \tilde{R}$, на основании формулы (16) делаем вывод, что $h^1 = \tilde{h}^1$, то есть $h = \tilde{h}$. Следовательно, все характеристики для гиперповерхностей совпадают, и на основании известных теорем о единственности, делаем вывод, что ρ и $\tilde{\rho}$ аффинно эквивалентны. А следовательно, эквивалентны аффинные цилиндры, на которых лежат образы f и \tilde{f} .

2 Аффинные омбилические погружения с плоской связностью

Рассмотрим сначала несобственное аффинное омбилическое погружение. Такое погружение аффинно эквивалентно [7] погружению графика некоторого гладкого отображения $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, индуцированная связность в данном случае плоская.

Рассмотрим теперь собственное аффинное омбилическое погружение.

Лемма 3 *Образ собственного аффинного омбилического погружения $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ с плоской связностью ∇ лежит в аффинной гиперплоскости в \mathbb{R}^{n+k} , не проходящей через начало координат.*

Доказательство Выберем для собственного аффинного омбилического погружения трансверсальный базис (19). Поскольку связность плоская, то

$$R(X, Y)Z = h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y = 0 \quad \forall X, Y, Z \Rightarrow h^1 = 0.$$

Следовательно, центро-аффинная гиперповерхность $\bar{\rho}$ является аффинной гиперплоскостью в \mathbb{R}^{n+1} , не проходящей через начало координат. Существует система координат, в которой радиус-вектор погружения задается следующим образом

$$\bar{r}(x) = \{x^1, \dots, x^n, a_i x^i + 1, F^2(x), \dots, F^k(x)\}.$$

Таким образом, образ погружения лежит на аффинной гиперплоскости в \mathbb{R}^{n+k} , не проходящей через начало координат. Погружение, рассматриваемое как отображение в этой гиперплоскости, является погружением графика гладкого отображения $F : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$.

3 Омбилические погружения с локально симметрической связностью

Напомним, что связность ∇ называется *локально симметрической*, если $\nabla R = 0$. Пусть $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ собственное аффинное омбилическое погружение. Выберем трансверсальное распределение (14), тогда

тензор кривизны вычисляется по формуле (16). Вычислим ∇R :

$$\begin{aligned}
 (\nabla_W R)(X, Y)Z &= \\
 &= \nabla_W(R(X, Y)Z) - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X, \nabla_W Y)Z - R(X, Y)\nabla_W Z = \\
 &= \nabla_W(h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y) - h^1(Y, Z)\nabla_W X + h^1(\nabla_W X, Z)Y - \\
 &- h^1(\nabla_W Y, Z)X + h^1(X, Z)\nabla_W Y - h^1(Y, \nabla_W Z)X + h^1(X, \nabla_W Z)Y = \\
 &= W(h^1(Y, Z))X - h^1(\nabla_W Y, Z)X - h^1(Y, \nabla_W Z)X - W(h^1(X, Z))Y + \\
 &+ h^1(X, Z)\nabla_W Y + h^1(X, \nabla_W Z)Y = (\nabla_W h^1)(Y, Z)X - (\nabla_W h^1)(X, Z)Y
 \end{aligned}$$

Следовательно, для собственных аффинных омбилических погружений с трансверсальным распределением (14)

$$\nabla R = 0 \Leftrightarrow \nabla h^1 = 0 \quad (20)$$

Для того, чтобы связность была локально симметрической необходимо и достаточно, чтобы она была согласована с квадратичной формой h^1 . Как известно, существует единственная связность без кручения, согласованная с невырожденной квадратичной формой. Тензор кривизны при этом имеет вид (16). В случае, когда аффинная фундаментальная форма положительно определена, мы имеем полную аналогию с римановым омбилическим погружением, или погружением постоянной положительной кривизны. Следовательно, невырожденное собственное аффинное омбилическое погружение $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ с положительно определенной h^1 может быть параметризовано следующим образом

$$\bar{r} = \{\rho^1, \dots, \rho^{n+1}, f^2, \dots, f^k\},$$

где $\bar{\rho} = \{\rho^1, \dots, \rho^{n+1}\}$ – радиус-вектор гиперсферы S^n , f^α – произвольные гладкие функции для $\alpha = \overline{2, k}$. Очевидно, что ∇ в данном случае – связность гиперсферы.

В общем случае выберем параметризацию аффинного омбилического погружения (18), где $\bar{\rho}$ – радиус-вектор центро-аффинной гиперповерхности. Вычислим для нее кубическую форму C_ρ :

$$C_\rho(X, Y, Z) = (\nabla_X h^1)(Y, Z) + \tau_1^1(X)h^1(Y, Z) = 0.$$

Итак, если индуцированная связность локально-симметрическая, то $\bar{\rho}$ – параллельная центро-аффинная гиперповерхность. Такие поверхности хорошо изучены. Невырожденными параллельными центро-аффинными гиперповерхностями являются только центральные гиперкуадрики [3].

Вырожденными параллельными гиперповерхностями являются аффинные цилиндры [1], [3], [8]. Следовательно, вырожденными параллельными центро-аффинными гиперповерхностями являются цилиндры над центральными квадриками.

Предложение 2 *Образ собственного аффинного омбилического погружения $f : (M^n, \nabla) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+k}, D)$ с локально-симметрической связностью ∇ лежит на аффинном цилиндре над центральной квадрикой.*

4 Собственные аффинные омбилические погружения с нильпотентным оператором кривизны

Определим степени оператора кривизны $R(X, Y)$ рекуррентно следующим образом:

$$R^p(X, Y)Z = R^{p-1}(X, Y)(R(X, Y)Z), \quad p > 1$$

Для действительных пространственных форм (M^n, g) для любых X и Y имеет место формула [6]

$$R^p(X, Y) = \begin{cases} (-b^2c^2)^{s-1}R(X, Y), & p = 2s - 1, \\ (-b^2c^2)^{s-1}R^2(X, Y), & p = 2s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{N},$$

где $b = |X \wedge Y|$ – норма бивектора $X \wedge Y$.

Найдем степени оператора кривизны (16):

$$\begin{aligned} R^2(X, Y)Z &= h^1(Y, h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y)X - h^1(X, h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y)Y = \\ &= \{h^1(Y, X)h^1(Y, Z) - h^1(Y, Y)h^1(X, Z)\}X - \{h^1(X, X)h^1(Y, Z) - h^1(X, Y)h^1(X, Z)\}Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^3(X, Y)Z &= h^1(Y, \{h^1(Y, X)h^1(Y, Z) - h^1(Y, Y)h^1(X, Z)\}X - \\ &\quad - \{h^1(X, X)h^1(Y, Z) - h^1(X, Y)h^1(X, Z)\}Y)X - h^1(X, \{h^1(Y, X)h^1(Y, Z) - \\ &\quad - h^1(Y, Y)h^1(X, Z)\}X - \{h^1(X, X)h^1(Y, Z) - h^1(X, Y)h^1(X, Z)\}Y)Y = \\ &= h^1(X, Y)h^1(X, Y)\{h^1(Y, Z)X - h^1(X, Z)Y\} - h^1(X, X)h^1(Y, Y)\{h^1(Y, Z)X - \\ &\quad - h^1(X, Z)\}Y = \{h^1(X, Y)h^1(X, Y) - h^1(X, X)h^1(Y, Y)\}R(X, Y)Z. \end{aligned}$$

По индукции получаем

$$R^p(X, Y) = \begin{cases} \{(h^1(X, Y))^2 - h^1(X, X)h^1(Y, Y)\}^{s-1}R(X, Y) & \text{для } p = 2s - 1, \quad s \in \mathbb{N}; \\ \{(h^1(X, Y))^2 - h^1(X, X)h^1(Y, Y)\}^{s-1}R^2(X, Y) & \text{для } p = 2s, \quad s \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (21)$$

В случае, когда погружение является невырожденной центро-аффинной гиперповерхностью, в качестве метрики можно взять аффинную фундаментальную форму и тогда мы получаем тот же результат, что и в римановом случае.

Исследуем вопрос о том, в каком случае оператор $R(X, Y)$ может быть нильпотентным (при всех X, Y).

Лемма 4 *Оператор $R(X, Y)$ собственного аффинного омбилического погружения $\bar{r} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ с трансверсальным распределением (14) и неплоской индуцированной связностью является нильпотентным (при всех X, Y) тогда и только тогда, когда $\text{rank } h^1 = 1$, причем степень нильпотентности равна 2.*

Доказательство Из условия $R^2(X, Y)Z = 0 \forall X, Y, Z$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} h^1(Y, X)h^1(Y, Z) - h^1(Y, Y)h^1(X, Z) = 0 \\ h^1(X, X)h^1(Y, Z) - h^1(X, Y)h^1(X, Z) = 0, \end{cases}$$

Относительно переменных $h^1(Y, Z)$, $h^1(X, Z)$ – это линейная однородная система, которая имеет только тривиальное решение в случае, когда $\text{rank } h^1 \geq 2$. Если же $\text{rank } h^1 = 1$, то мы получаем верные равенства при любых значениях X, Y, Z .

Итак, $R^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{rank } h^1 = 1$.

Равенство $R^3(X, Y)Z = 0 \forall X, Y, Z$ в случае неплоской связности возможно лишь (21), когда $(h^1(X, Y))^2 - h^1(X, X)h^1(Y, Y) = 0 \forall X, Y$, то есть $\text{rank } h^1 = 1$.

Теорема 2 *Пусть $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ – собственное аффинное омбилическое погружение с нильпотентным оператором кривизны и неплоской индуцированной связностью ∇ . Тогда существует система координат, в которой данное погружение задается радиусом-вектором*

$$\bar{r}(u^1, \dots, u^n) = \bar{\varphi}(u^1) + \sum_{i=2}^n u^i \bar{c}_i + \sum_{\alpha=2}^k f^\alpha(u^1, \dots, u^n) \xi_\alpha \quad (22)$$

с трансверсальным распределением $\xi_1 = -\bar{r}$, $\xi_\alpha = \overrightarrow{\text{const}}$ при $\alpha = \overline{2, k}$. Вектор-функция $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению $\bar{\varphi}'' = -h(u^1)\bar{\varphi} + a(u^1)\bar{\varphi}'$.

Доказательство На основании леммы 4 заключаем, что $\text{rank } h^1 = 1$. Следовательно, существует координатный базис в касательном пространстве

такой, что

$$h^1 = \begin{pmatrix} h & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad h^\alpha = \begin{pmatrix} h_{11}^\alpha & h_{12}^\alpha & \dots & h_{1n}^\alpha \\ h_{12}^\alpha & h_{22}^\alpha & \dots & h_{2n}^\alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1n}^\alpha & h_{2n}^\alpha & \dots & h_{nn}^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \overline{2, k}, \quad (23)$$

$$S_1 e_i = e_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad S_\alpha \equiv 0, \quad \alpha = \overline{2, k}. \quad (24)$$

Рассмотрим уравнения Кодасци для h (6) при $\alpha = 1, i \neq 1$:

$$\begin{aligned} (\nabla e_i h^1)(e_1, e_1) &= (\nabla e_1 h^1)(e_i, e_1), \\ \frac{\partial h}{\partial u^i} - 2h^1(\nabla e_i e_1, e_1) &= -h^1(\nabla e_1 e_i, e_1) - h^1(e_i, \nabla e_1 e_1), \\ \frac{\partial h}{\partial u^i} &= h\Gamma_{i1}^1 \quad (i \neq 1). \end{aligned} \quad (25)$$

А также при $\alpha = 1, i, k \neq 1$:

$$\begin{aligned} (\nabla e_i h^1)(e_1, e_k) &= (\nabla e_1 h^1)(e_i, e_k), \\ -h^1(\nabla e_i e_1, e_k) - h^1(e_1, \nabla e_i e_k) &= -h^1(\nabla e_1 e_i, e_k) - h^1(e_i, \nabla e_1 e_k), \\ h\Gamma_{ik}^1 &= 0 \quad (i, k \neq 1). \end{aligned} \quad (26)$$

Из уравнения Гаусса (16) и вида аффинной фундаментальной формы (23) получаем

$$\begin{aligned} R(e_1, e_j)e_1 &= -he_j, \quad j \neq 1, \\ R(e_1, e_j)e_k &= 0, \quad j, k \neq 1, \\ R(e_i, e_j)e_k &= 0, \quad i, j, k \neq 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, $\ker R = \{e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Следовательно, можно выбрать параметризацию погружения $\hat{r} = \bar{r}(u(v))$, чтобы $\hat{\Gamma}_{ij}^k = 0$ при $i, j, k = \overline{2, n}$.

$$\begin{cases} u^1 = v^1 \\ u^i = \psi^i(v^2, \dots, v^n) \quad i = \overline{2, n}. \end{cases}$$

Заметим, что при таком преобразовании координат вид аффинной фундаментальной формы (23) и вид операторов Вейнгартенена (24) не изменятся.

$$\frac{\partial u^k}{\partial v^\gamma} \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}.$$

Поскольку (26) $\Gamma_{ij}^1 = 0$, $i, j \neq 1$, то в новой системе координат $\hat{\Gamma}_{ij}^1 = 0$, $i, j \neq 1$. Следовательно, $\hat{\Gamma}_{ij}^k = 0$, $i, j \neq 1$, $\forall k$. Учитывая (14, 23), получаем $i, j \neq 1$

$$\frac{\partial^2 \hat{r}}{\partial v^i \partial v^j} = \sum_{\alpha=2}^k \hat{h}_{ij}^\alpha \xi_\alpha.$$

Интегрируя, получим:

$$\hat{r}(v^1, \dots, v^n) = \bar{\varphi}_1(v^1) + \sum_{i=2}^n v^i \bar{\varphi}_i(v^1) + \sum_{\alpha=2}^k \hat{f}^\alpha(v^1, \dots, v^n) \xi_\alpha,$$

где $\frac{\partial^2 \hat{f}^\alpha}{\partial v^i \partial v^j} = \hat{h}_{ij}^\alpha$. Поскольку (14), для регулярности погружения необходимо линейная независимость векторов $\bar{\varphi}_1'(v^1), \bar{\varphi}_1(v^1), \dots, \bar{\varphi}_n(v^1), \xi_2, \dots, \xi_k$. Следовательно, можно параметризовать данное погружение следующим образом ($v^1 = u^1$)

$$\bar{r}(u^1, \dots, u^n) = \bar{\varphi}(u^1) + \sum_{i=2}^n u^i \bar{c}_i + \sum_{\alpha=2}^k f^\alpha(u^1, \dots, u^n) \xi_\alpha$$

С трансверсальным распределением $\xi_1 = -\bar{r}, \xi_2, \dots, \xi_k$. Вектор-функция $\bar{\varphi}(u^1)$ при этом имеет две ненулевые координаты и удовлетворяет уравнению $\bar{\varphi}'' = -h(u^1)\bar{\varphi} + a(u^1)\bar{\varphi}'$.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} = \bar{\varphi}'(u^1) + \sum_{\alpha=2}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1} \xi_\alpha, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i} = \bar{c}_i + \sum_{\alpha=2}^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i} \xi_\alpha \quad \text{при } i \neq 1$$

Выпишем разложения Гаусса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u^i \partial u^j} &= \sum_{\alpha=2}^k \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \xi_\alpha \quad \text{при } i \cdot j \neq 1 \\ \frac{\partial^2 \bar{r}}{(\partial u^1)^2} &= \bar{\varphi}''(u^1) + \sum_{\alpha=2}^k \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2} \xi_\alpha = -h(u^1)\bar{\varphi}(u^1) + a(u^1)\bar{\varphi}'(u^1) + \\ &\quad + \sum_{\alpha=2}^k \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2} \xi_\alpha = h(u^1)\xi_1 + a(u^1)\bar{\varphi}'(u^1) + h(u^1) \sum_{i=2}^n u^i \bar{c}_i + \\ &\quad + \sum_{\alpha=2}^k \left(h(u^1)f^\alpha + \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2} \right) \xi_\alpha = h\xi_1 + a \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^1} + h \sum_{i=2}^n u^i \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i} + \\ &\quad + \sum_{\alpha=2}^k \left(h f^\alpha - a \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^1} - h \sum_{i=2}^n u^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^i} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{(\partial u^1)^2} \right) \xi_\alpha \end{aligned}$$

Таким образом, данное погружение имеет неплоскую индуцированную связность, которая в локальных координатах задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= a(u^1)e_1 + h(u^1) \sum_{i=2}^n u^i e_i \\ \nabla_{e_1} e_i &= 0 \quad \text{для } i = \overline{2, n} \\ \nabla_{e_i} e_j &= 0 \quad \text{для } i, j = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Nomizu K., Opozda B. On affine hypersurfaces with parallel nullity // J. Math. Soc. Japan, – 1992. – V. 44, № 4. – p. 693-699.
2. Nomizu K., Pinkall U. On the geometry of affine immersions // Mathematische Zeitschrift. – 1987. – № 195. – p. 165-178.
3. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. – Cambridge University Press, 1994. – 264 p.
4. Nomizu K., Sasaki T. Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory // Nagoya Math. J. – 1993. – V. 132. – p. 63-90.
5. Opozda B. A Characterization of Affine Cylinders // Mh. Math. – 1996. – № 121. – p. 113-124.
6. Sakharova E., Yampolsky A. Powers of Curvature Operator of Space Forms and Geodesics of the Tangent Bundle// Укр. мат. журн. – 2004. – т. 56, № 9. - с. 1231-1243.
7. Shugailo O.O. On affine immersions with flat connections // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2012. – V. 8, № 1. – p. 90-105.
8. Шугайло Е. А. Параллельные аффинные погружения с плоской связностью // Укр. мат. журн. – 2013. – т. 65, № 9. – с. 1283-1300.

Елена Алексеевна Шугайло

Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, Харьков, 61077, Украина

E-mail: lfisdi@gmail.com

Olena O. Shugailo

Department of Mechanics and Mathematics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61077, Ukraine

E-mail: lfisdi@gmail.com

On affine umbilical immersions of higher codimension

We study the properties of multidimensional affine umbilical immersion with flat connection and locally symmetric connection. We give parametrization of affine umbilical immersion with nilpotent curvature operator.

Атоми степені 2 на поверхнях з краєм

О.М.Іванюк, О.О.Пришляк

Анотація Для локальної класифікації m -функцій на поверхнях уведено поняття атома. Описані всі атоми степені 2.

Ключові слова атом m -функції · топологічна класифікація

УДК 517.91

1 Вступ

Нехай M – замкнений орієнтований двовимірний многовид (поверхня). Нехай f – гладка функція на M . Розглянемо гамільтонову динамічну систему, що задається рівнянням $\frac{dx}{dt} = \text{sgrad } f(x)$, $x \in M$. Тоді її траекторії лежать на компонентах ліній рівня функції f . Ці компоненти називають шарами. Гомеоморфізм поверхні, що відображає шари на шари, називається пошаровою еквівалентністю. Отже, пошарова класифікація функцій задає топологічну класифікацію гамільтонових динамічних систем. На множині всіх функцій можна виділити відкриту скрізь щільну підмножину, яка складається з простих функцій Морса. А.Конрод [3] і Г.Ріб [9] для дослідження функцій ввели граф, який отримується з поверхні після стягування кожного шару до точки. Цей граф є повним топологічним інваріантом простих функцій Морса. В роботі О.Болсінова та А.Фоменка [1] було запропоновано розшарований окіл критичного рівня називати атомом, а граф Ріба, у якого вершинам відповідають атоми, а ребрам компоненти краю атомів, називати

молекулою. Це дало змогу побудувати пошарову та топологічну класифікацію довільних функцій Морса.

Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m -функції. Це такі функції, в яких всі критичні точки є невиродженими і не лежать на краю, а також такі, що обмеження функції на край є функцією Морса.

В роботі [2] О.О. Пришляк класифікував прості m -функції на орієнтованих поверхнях.

Топологічні властивості m -функцій досліджували у роботі [6]. С.Максименко для топологічної класифікації m -функцій використовував графи з інволюцією [5]. Метою роботи є повна пошарова локальна класифікація простих m -функцій на компактних поверхнях з краєм, а також орієнтована пошарова класифікація в околі критичного рівня, яка еквівалентна топологічній класифікації векторного поля косого градієнта $s\text{grad } f$.

2 Прості функції Морса, m -функція.

Нехай M – гладкий многовид розмірності n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція. Розглянемо гладку функцію $f(x) = 0$ на гладкому многовиді X^n і нехай x_1, \dots, x_n – гладкі регулярні координати в околі точки x .

Означення. Точка $x \in M$ називається *критичною* для функції f , якщо диференціал $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ обертається в нуль в точці x . При цьому $f(x)$ називається *критичним значенням* функції f .

Критична точка називається *невиродженою*, якщо другий диференціал $d^2f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ невироджений в цій точці.

Означення. Гладка функція називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки невироджені.

Означення. Функція Морса називається *функцією Морса загального положення*, якщо на поверхні рівня лежить не більше однієї критичної точки.

Функції Морса, які мають рівно по одній критичній точці на кожному критичному рівні, ми будемо називати *простими*.

Нехай M – гладкий компактний n -вимірний многовид з краєм.

Означення. Функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називається *m -функцією*, якщо:

а) усі її критичні точки – невироджені і не лежать на ∂M ;

б) край многовиду можна подати у вигляді об'єднання $\partial M = \partial M_- \cup \partial M_0 \cup \partial M_+$ такого, що обмеження f_{∂} функції f на ∂M_0 є функція Морса і якщо множина $\partial M_- \neq \emptyset$ ($\partial M_+ \neq \emptyset$), то функція f приймає на ній мінімальне

(максимальне) значення. При цьому перетини $V_- = \partial M_- \cap \partial M_0$ і $V_+ = \partial M_+ \cap \partial M_0$ будуть $(n-2)$ -вимірними многовидами, які називаються *кутами*, а сама трійка $(M, \partial M, V_- \cup V_+)$ – *многовидом з кутами*.

3 Поняття атома. Прості атоми.

Нехай f – m -функція на поверхні X^2 , g – інша m -функція на іншій поверхні Y^2 . Питання: коли ці функції на поверхнях можна вважати еквівалентними? Розглянемо пару (X^2, f) і (Y^2, g) .

Означення. m -функції f і g на поверхнях X^2 і Y^2 будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм $\lambda : X^2 \rightarrow Y^2$, який переводить зв'язні компоненти ліній рівня функції f в зв'язні компоненти ліній рівня функції g . Пара (X^2, f) пошарово еквівалентна парі (Y^2, g) .

Треба дослідити пошарову еквівалентність m -функцій в околі їх критичних значень.

Атом – це топологічний тип особливості m -функції. Іншими словами, атом – це топологічний тип зв'язної компоненти околу особливого шару m -функції на поверхні. Кожна m -функція визначає розшарування з особливостями на поверхні. Його шарами можна вважати компоненти зв'язності рівня функції. В околі кожного регулярного шару це розшарування тривіально – прямий добуток кола на відрізок.

Означення. Атомом називається окіл P^2 критичного шару, який задається нерівністю $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достатньо малого ε , розшаровану на ліній рівня функції f і яка розглядається з точністю до пошарової еквівалентності $P^2 = \{x : -\varepsilon \leq f(x) - c \leq \varepsilon\}$.

Якщо критичне значення c – локальний мінімум чи локальний максимум, то атом називається *атомом A*. Якщо критичне значення c – сідлове, то відповідний атом називається *сідловим*.

Атом називається *простим*, якщо m -функція в парі (P^2, f) – проста. Решта атомів називається *складними*.

Атом називається *орієнтованим* або *неорієнтованим* в залежності від того, чи є поверхня P^2 орієнтованою чи неорієнтованою.

Нехай c – критичне значення функції f на X^2 і c' – критичне значення функції g на Y^2 . Розглянемо їх особливі шари: $f^{-1}(c)$ і $g^{-1}(c')$ і припустимо, що ці шари зв'язні.

Означення. m -функції f і g називаються *пошарово оснащено еквівалентними* в околі своїх особливих шарів $f^{-1}(c)$ і $g^{-1}(c')$, якщо існують два додатні числа ε і ε' і дифеоморфізм $\lambda : f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \rightarrow g^{-1}(c' - \varepsilon', c' + \varepsilon')$,

який переводить лінії рівня функції f в лінії рівня функції g і який зберігає напрямок росту функцій, тобто λ відображає область ($f > c$) в область ($g > c'$).

Розглянемо пару (P^2, f) , де P^2 – зв'язна компактна поверхня з непорожнім краєм ∂P^2 , а f – m -функція на ній, яка має рівно одне критичне значення C , причому $f^{-1}(c - \varepsilon) \cup f^{-1}(c + \varepsilon) = \partial P^2$. Клас оснащеної пошарової еквівалентності цієї пари (P^2, f) називається f -атомом чи оснащеним атомом.

Зауваження. Кожному атому відповідає 2 f -атоми. Вони отримуються один з одного заміною знака функції на атому. Іноді ці 2 атоми можуть бути співпадаючими, еквівалентними.

Означення. f -атомом називається атом з попереднього означення, для якого фіксовано розбиття кілець на додатні і від'ємні.

Зрозуміло, що на f -атомі в попередньому означенні можна задати m -функцію, для якої граф K буде її критичним рівнем (наприклад, нульовим), поверхня P^2 буде множиною точок x таких, що $-c \leq f(x) \leq c$.

Функція f буде додатною на додатних кільцях і від'ємною на від'ємних кільцях.

Найпростішими прикладами атомів є околи максимумів, мінімумів і сідлових критичних точок на поверхнях. При переході через критичний рівень m -функції загального положення виникають перебудови рівнів [2] (рис.1-5).

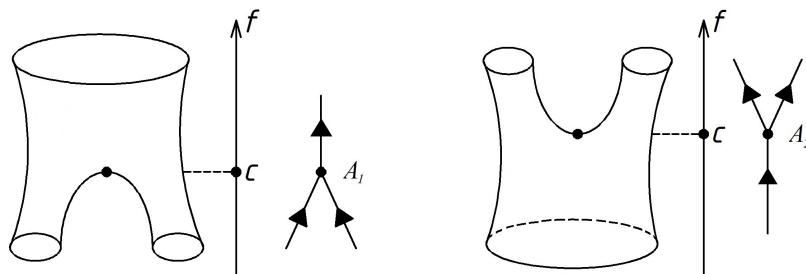


Рис. 1.

1. В момент перебудови змінюється кількість компонент зв'язності (рис.2).

2. Кількість компонент рівня не змінюється (рис.3).

3. Лінія рівня в момент перебудови – коло (рис.4).

4. Лінія рівня в момент перебудови є відрізком (рис.5).

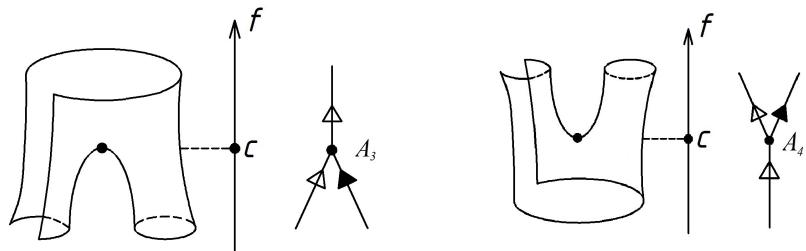


Рис. 2.

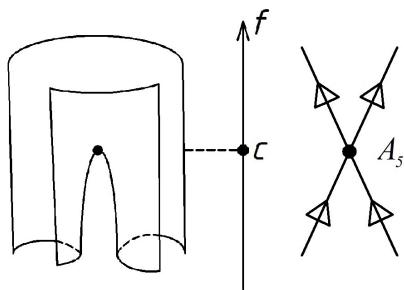


Рис. 3.

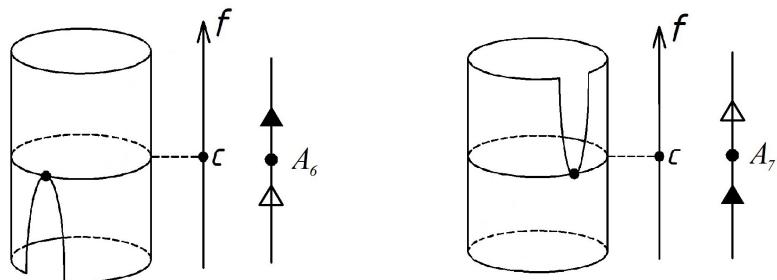


Рис. 4.

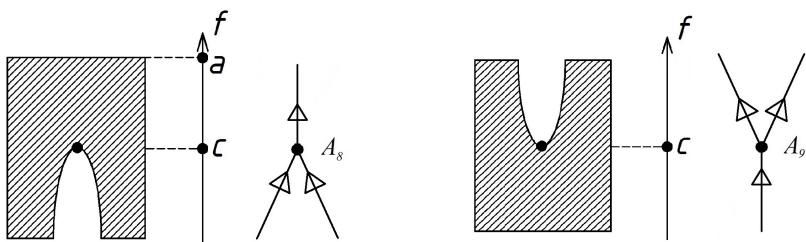


Рис. 5.

4 Атоми складності 2.

Розглянемо всі можливі лінії рівнів m -функцій на заданій орієнтованій поверхні скінченного типу. Для регулярного значення m -функції відповідна лінія рівня складається з неперетинних між собою кіл та замкнених відрізків. Опишемо їх перебудови при переході через особливий рівень. Критичні точки позначатимемо через c , регулярні точки – через a . Ребра на графі Ріба, що відповідають колам, будемо позначати чорними стрілками, а ті, що відповідають відрізкам – білими.

Розпочнемо з внутрішніх критичних точок. Якщо регулярний рівень до проходження критичного значення був об'єднанням кіл, то ми отримаємо атоми, які були описані вище. Розглянемо ситуацію, коли серед регулярних рівнів є відрізок. Тоді атом буде мати вигляд компонент регулярного рівня, помножених на відрізок з приkleєними смужками.

Розглянемо всі можливі атоми складності 2 m -функцій на поверхнях з краєм. Можливі такі випадки:

1. В момент перебудови змінюється кількість компонент зв'язності лінії рівня (рис.6-13).

На рис.6 відрізок і коло переходять у коло, і навпаки: коло переходить у відрізок і коло. Ми отримали на краю максимум (мінімум) і внутрішню сідлову критичну точку. Як атоми вони однакові, але як f -атоми різні.

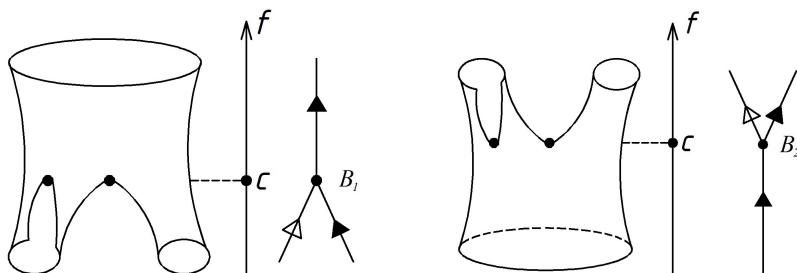


Рис. 6.

На рис.7 два кола переходять у відрізок, і навпаки: відрізок переходить у два кола. Ми отримали на краю мінімум (максимум) і внутрішню сідлову критичну точку. Як атоми вони однакові, але як f -атоми різні.

На рис.8 два відрізки переходять у відрізок, і навпаки: відрізок переходить у два відрізки. Ми отримали на краю максимум (мінімум) і внутрішню сідлову критичну точку. Як атоми вони однакові, але як f -атоми різні.

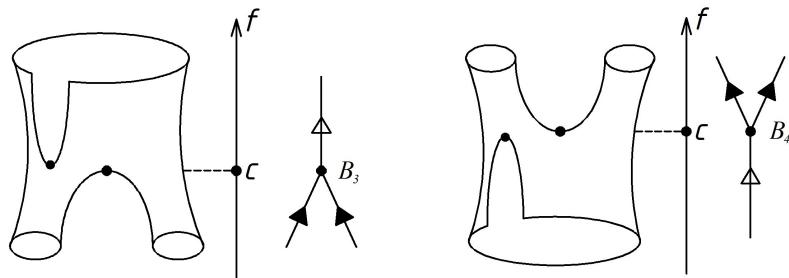


Рис. 7.

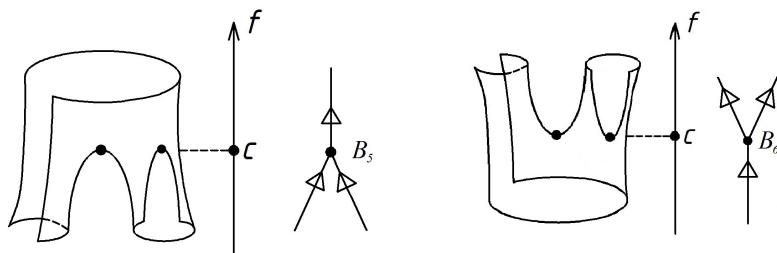


Рис. 8.

На рис.9 два відрізки і коло переходять у відрізок, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f -атоми.

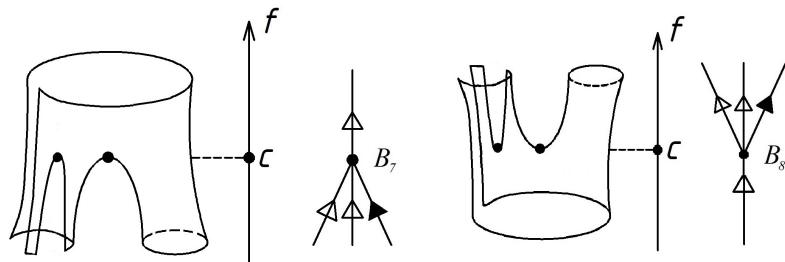


Рис. 9.

На рис.10 два відрізки переходять у три відрізки, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f -атоми.

На рис.11 три кола переходять в одне коло, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f -атоми [1].

На рис.12 відрізок і два кола переходять у відрізок, і навпаки. Як атоми вони одинакові, але як f -атоми різні.

На рис.13 два відрізки і коло переходять у два відрізки, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f -атоми.

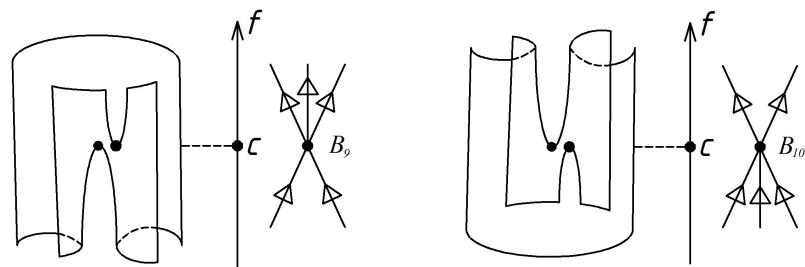


Рис. 10.

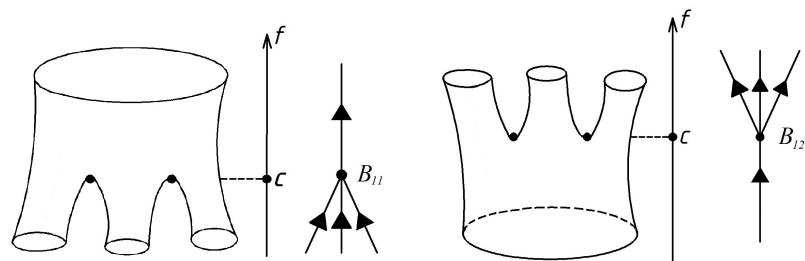


Рис. 11.

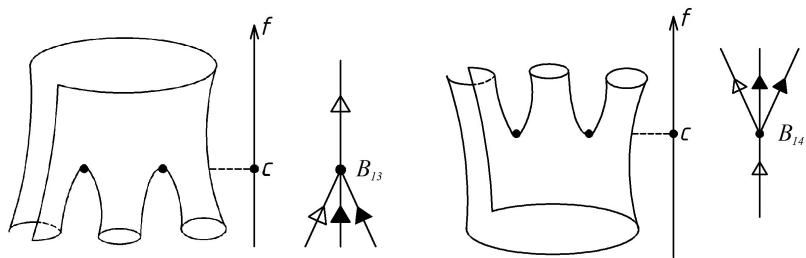


Рис. 12.

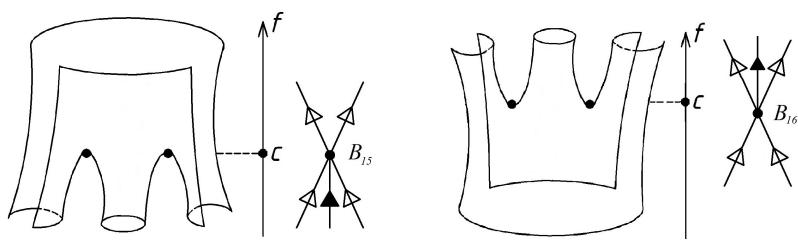


Рис. 13.

2. В момент перебудови не змінюється кількість компонент зв'язності ліній рівня (рис.14-19).

Відрізок і коло переходить у два відрізки, і навпаки. Як f -атоми вони різні (рис.14,15).

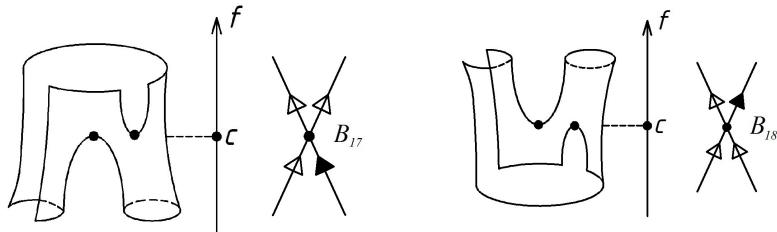


Рис. 14.

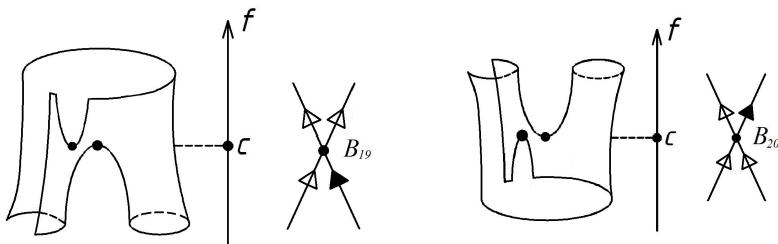


Рис. 15.

На рис.16 три відрізки переходять у три відрізки. Регулярні лінії рівня m -функції тут складаються з трьох компонент зв'язності як до перебудови, так і після неї. Тому графи, що відповідають атомам складності 2 матимуть хрестоподібний вигляд (одна вершина валентності 6). Цьому атому відповідає один f -атом.

На першому малюнку (рис.17) два кола переходять у два кола. Регулярні лінії рівня m -функції тут складаються з двох компонент зв'язності як до перебудови, так і після неї. Тому графи, що відповідають атомам складності 2 матимуть хрестоподібний вигляд (одна вершина валентності 4). Цьому атому відповідає один f -атом. А на другому малюнку коло і відрізок переходить у відрізок і коло.

На першому малюнку (рис.18) відрізок і коло переходить у відрізок і коло, а на другому коло і відрізок переходить у коло і відрізок. Тут одному атому відповідає два f -атоми.

На рис.19 два відрізки переходять у два відрізки. Регулярні лінії рівня m -функції тут складаються з двох компонент зв'язності як до перебудови,

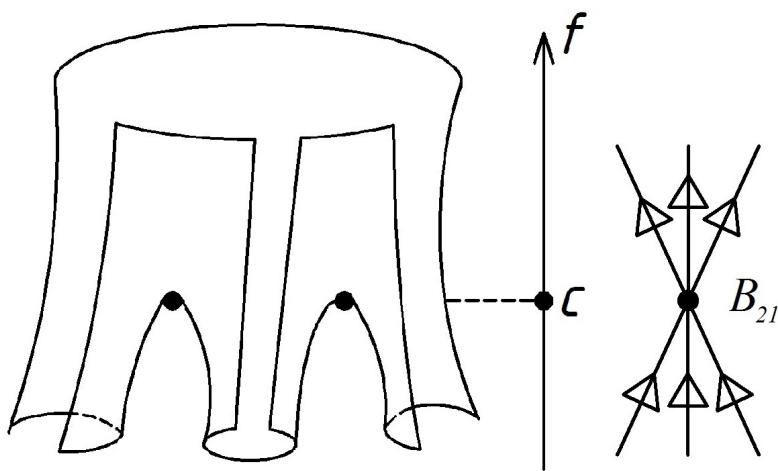


Рис. 16.

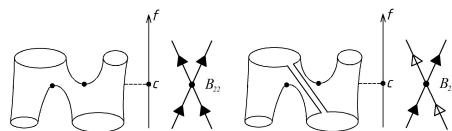


Рис. 17.

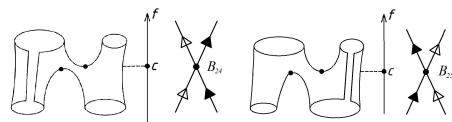


Рис. 18.

так і після неї. Тому графи, що відповідають атомам складності 2 матимуть хрестоподібний вигляд (одна вершина валентності 4). Цьому атому відповідає один f -атом.

3. Лінія рівня в момент перебудови – коло (рис.20,21).

Лінії рівня t -функції до перебудови (у випадку мінімуму) – кола. На графі це відображається ребром першого роду (чорна стрілка). Безпосередньо в момент перебудови лінія рівня є колом. Отже, коло переходить у два відрізки. Одному атому відповідають два f -атоми (рис.20). Ми отримали два локальні екстремуми (мінімуми і максимуми).

Лінія рівня t -функції до перебудови – відрізок. На графі це відображається ребром другого роду (біла стрілка). Безпосередньо в момент пере-

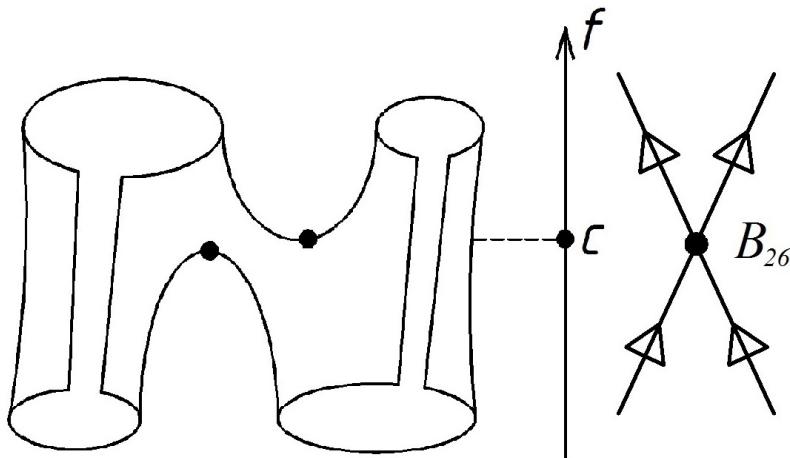


Рис. 19.

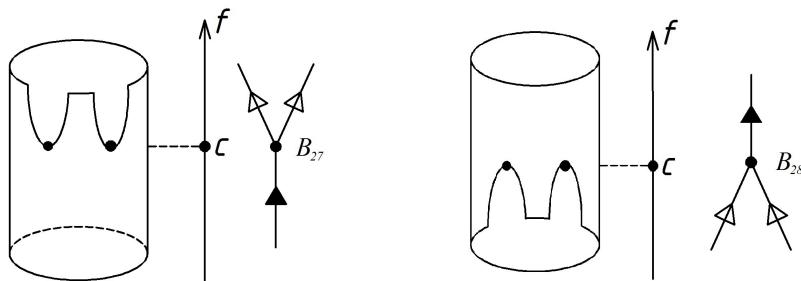


Рис. 20.

будови лінія рівня є колом. Отже, відрізок переходить у відрізок. Цьому атому відповідає один f -атом (рис.21).

4. Лінія рівня в момент перебудови є відрізком (рис.22,23).

Граф має вигляд чотириноги, оскільки до проходження максимуму (мінімуму) прообрази регулярних точок мають дві компоненти зв'язності, і після перебудови прообрази регулярних точок складаються з двох компонент зв'язності – замкнених інтервалів. Цьому атому відповідає один f -атом (рис.22).

На рис.23 один відрізок переходить у три відрізки, і навпаки. Цьому атому відповідає два f -атоми.

Теорема. (Про локальну класифікацію) Кожен атом складності 2 m -функції на поверхні з краєм є одним з дев'ятнадцяти атомів, або одним з тридцяти двох f -атомів ($B_1 - B_{32}$).

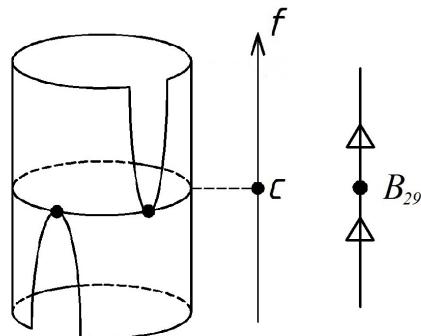


Рис. 21.

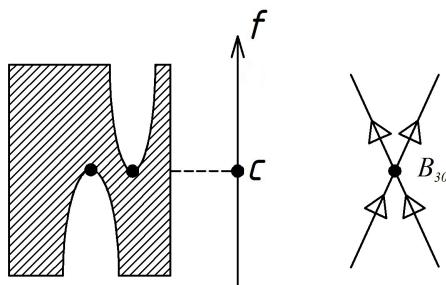


Рис. 22.

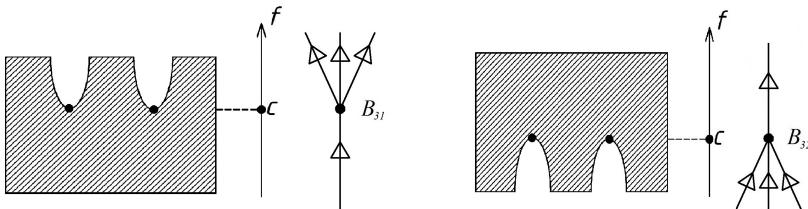


Рис. 23.

Доведення. Можливі два випадки: є гранична критична точка або ні.

1) Якщо немає граничної критичної точки, то обидві критичні точки внутрішні сідлові, отже, атом – це два склеєні околи цих точок. Окіл має вигляд криволонійного восьмикутника. Можливе склеювання тільки непарних сторін. Нумеруємо їх та розглядаємо всі можливі варіанти склеювання, після чого отримуємо всі атоми безграничних точок.

2) Якщо є гранична точка, то атом гомеоморфний простому атому, у якого частина границі продавлена всередину (з неї зроблено виріз). Розглядаємо всі можливі вирізи. З графа A_1 отримаємо B_1 і B_3 , з графа A_2 – B_2

і B_4 , з графа $A_3 - B_5, B_7, B_{17}, B_{19}$, з графа $A_4 - B_6, B_8, B_{18}, B_{20}$, з графа $A_5 - B_9$ і B_{10} , з графа $A_6 - B_{28}, B_{29}$, з графа $A_7 - B_{27}, B_{29}$. З графа A_8 отримуємо B_{32}, B_{30} , а з $A_9 - B_{31}, B_{30}$. З графа B_{11} отримуємо B_{13}, B_{15} і B_{21} , з графа $B_{12} - B_{14}, B_{16}$, а з графа $B_{22} - B_{23}, B_{24}, B_{25}$ і B_{26} .

Хоча B_{26} і B_{30} як атоми різні, але як f -атоми вони однакові (два відрізки переходить у два відрізки). B_{17} і B_{19}, B_{18} і B_{20} як f -атоми однакові, але різні як атоми.

Ми можемо робити розрізи двома способами. Можна вирізати смужку, не змінюючи при цьому складності атома. Або ми робимо виріз в простому атому, збільшуючи складність на одиницю.

Ми можемо вирізати смужку по діагоналі в B_{24} і B_{25} , але отримаємо атоми, які ізоморфні B_{16} і B_{15} відповідно. Вирізаючи смужку в B_{26} , ми отримуємо атом, ізоморфний B_{21} . Таким чином вище описані всі можливі атоми складності два.

Розглянемо хрест (рис.24) [1], і будемо склеювати сторони. Усіх склейок буде обмежена кількість, перебравши які ми отримаємо всі атоми. Якщо ми не склеюємо сторони, то це відповідає вирізаній смужці. Всіх можливих способів склейки буде тридцять два, а отже, існує тридцять два атоми складності 2. Якщо ми заклеїмо всі сторони, то отримаємо атоми, перераховані у роботі О.Болсінова та А.Фоменка [1].

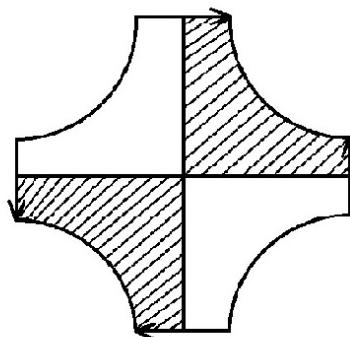


Рис. 24.

Отримані атоми не ізоморфні між собою, оскільки вони не гомеоморфні, мають не гомеоморфні критичні рівні або не гомеоморфні верхні та нижні краї.

Висновки

У роботі розглянуто всі можливі атоми складності 2 m -функцій на поверхнях з краєм, узагальнено результати О.В.Болсінова і А.Т.Фоменка, О.О.Пришляка і В.В.Шарка, наведено локальну топологічну класифікацію обмежених m -функцій складності 2 на орієнтованих поверхнях з краєм.

Отримані результати можуть бути використані для глобальної класифікації m -функцій складності 2, а також як початковий етап для дослідження атомів більшої складності. Всі ці результати застосовуються при дослідженні векторних полів косого градієнта на многовидах з краєм.

Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет". – Т.1, Т.2. – 1999. – с.66-99.
2. Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова Н.В. Класифікація простих m -функцій на орієнтованих поверхнях: Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – №1 (104). – с.1-12.
3. Кронрод А.С. О функциях двух переменных /А.С.Кронрод// Успехи мат.наук. – 1950. – вып.5(35), с.24-134.
4. Кулинич Е.В. О графах как критических уровнях функции на поверхности /Е.В.Кулинич, А.О.Пришляк// Некоторые вопросы совр.мат. Т.25.К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – с.102-108.
5. Максименко С.И. Классификация m -функций на поверхностях /С.И.Максименко// Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №8. – с. 1129-1135.
6. Міщенко К.І. Класифікація m -функцій загального положення на некомпактних поверхнях скінченного типу /К.І.Міщенко// Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка (Серія: фізико-математичні науки). – 2006. – Вип.3. – с.36-42.
7. Пришляк А.О. О некритическом продолжении функции, заданной на границе трехмерной области /А.О.Пришляк, Е.А.Пришляк, Е.Н.Вятчанинова// Геометрія та топологія функцій на многовидах: зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2010. – Т.7 – с.144-157.
8. Prishlyak A.O. Morse functions with finite number of singularities on a plane. Methods of func. and topology. – 2002. – Vol.8, №1. – p.75-78.
9. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de pfaff completement integrable ou de une function numerique /G.Reeb// Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de Academie des Sciences. – 1954/ – Vol.222. – p.847-849.

О.М.Іванюк, О.О.Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: oxana801@yandex.ua, prishlyak@yahoo.com

Oksana M. Ivanyuk, Alexandre O.Ptishlyak

Atoms of degree 2 on the surfaces with boundary

We define p -graph and describe how it changes under isotopy of projections for classification of maps of 2-manifolds into plane. The problem of graph implementation and maps classification was considered.

Quantum Geometry: Energy-amplitude approach to multiphoton resonances and above threshold ionization

Andrey A. Svinarenko

Abstract An advanced energy-amplitude approach to calculation of the characteristics of multi-photon ionization in atomic systems is presented and based on the many-body perturbation theory. It is used for numerical calculating the above threshold ionization characteristics for atom of magnesium in a intense laser field.

Keywords Multiphoton resonances · An advanced energy-amplitude approach · Eigen functions and energy eigen values

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

The interaction of the atomic systems with the external alternating fields, in particular, laser fields has been the subject of intensive experimental and theoretical investigation. Calculation of the deformation and shifts of the atomic emission and absorption lines in a strong laser field, definition of the k-photon emission and absorption probabilities and atomic levels shifts, study of laser emission quality effect on characteristics of atomic line, dynamical stabilization and field ionization etc are the most actual problems to be solved. Naturally, it is of the great interest for phenomenon of a multiphoton ionization. t present time, a progress is achieved in the description of the processes of interaction atoms with the harmonic emission field [1]–[8]. But in the realistic laser field the according processes are in significant degree differ from ones in the harmonic field. The latest theoretical works claim a qualitative study of the phenomenon

though in some simple cases it is possible a quite acceptable quantitative description. Among existed approaches it should be mentioned the Green function method (the imaginary part of the Green function pole for atomic quasienergetic state), the density - matrix formalism (the stochastic equation of motion for density - matrix operator and its correlation functions), a time-dependent density functional formalism, direct numerical solution of the Schrödinger (Dirac) equation, multi-body multi-photon approach etc. [1]–[8]. Decay probabilities of the hydrogen atom states in the super-strong laser field are calculated by the Green function method (see [2]) under condition that electron- proton interaction is very small regarding the atom-field interaction. Note that this approach is not easily generalized for multielectron atoms. In [2],[9] authors extended the non-Hermitian multi-state Floquet dynamics approach by Day to treat one-electron atomic system to the case of general multi-electron ones. The result is a generalization of the R-matrix Floquet theory, developed by Burke that allows for pulse shape effects whilst retaining the ab initio treatment of detailed electron correlation. The approach based on the eigenchannel R-matrix method and multichannel quantum-defect theory , introduced by Robicheaux and Gao to calculate two-photon processes in light alkaline-earth atoms has been implemented by Luc-Koenig et al [9] in j-j coupling introducing explicitly spin-orbit effects and employing both the length and velocity forms of the electric dipole transition operator. Nevertheless in many calculations there is a serious problem of the gauge invariance, connected with using non-optimized one-electron representation (in fact provided by not entire account for the multi-body interelectron correlations). The known example is non-coincidence of values for the length and velocity forms of the electric dipole transition operator [1,2]. We consider an advanced amplitude approach to calculation of the characteristics of multi-photon ionization in atomic systems, which is based on the many-body perturbation theory (PT) and use it for numerical calculating the above threshold ionization (ATI) characteristics for atom of magnesium in a intense laser field.

2 Energy QED approach to multiphoton resonances and above threshold ionization

In this section we consider a quite exact approach based on the QED perturbation theory [2]–[7], which allow to calculate the characteristics of multi-photon ionization in atomic systems. Below we calculate numerically the above threshold ionization (ATI) cross-sections for atom of magnesium in a intense laser field. The two-photon excitation process will be described in the lowest relativistic

PT order. This approach is valid away from any one-photon intermediate-state resonance. We start from the two-photon amplitude for the transition from an initial state Ψ_0 with energy E_0 to a final state $|Psi_f$ with energy $E_f = E_0 + 2\omega$ is:

$$T_{f0}^{(2)} = \lim_{n \rightarrow 0+} \int d\epsilon \langle \Psi_f | D \times e | \epsilon \rangle (E_0 + \omega - \epsilon + in)^{-1} \langle \epsilon | d \times e | \Psi_0 \rangle. \quad (1)$$

Here D is the electric dipole transition operator (in the length r form), e is the electric field polarization and ω is a laser frequency. It's self-understood that the integration in equation 1 is meant to include a discrete summation over bound states and integration over continuum states. Usually an explicit summation is avoided by using the Dalgarno-Lewis by means the setting [3]:

$$T_{f0}^{(2)} = C_f \langle \|D \times e\| A_p \rangle, \quad (2)$$

where $\langle \| \dots \| \rangle$ is a reduced matrix element and C_f is an angular factor depending on the symmetry of the Ψ_f , A_p , Ψ_0 states. A_p can be founded from solution of the following inhomogeneous equation [3]

$$(E_0 + \omega \times H | A_p \rangle = (D \times e) | \Psi_0 \rangle \quad (3)$$

at energy $E_0 + \omega$, satisfying outgoing-wave boundary condition in the open channels and decreasing exponentially in the closed channels. The total cross section (in $\text{cm}^4 \text{ W}^{-1}$) is defined as

$$\sigma/I = \sum_J \sigma_J/I = 5.7466 \times 10^{-35} \omega_{\text{au}} \sum_J |T_{J,0}^{(2)}|^2, \quad (4)$$

where I (in W/cm^2) is a laser intensity. To describe two-photon processes there can be used different quantities [9]: the generalized cross section $\sigma^{(2)}$, given in units of cm^4s , by

$$\sigma_{\text{cm}^4\text{s}}^{(2)} = 4.3598 \times 10^{-18} \omega_{\text{au}} \sigma/I_{\text{cm}^4\text{W}^{-1}} \quad (5)$$

and the generalized ionization rate $\Gamma^{(2)}/I^2$, (and probability of two-photon detachment) given in atomic units, by the following expression

$$\sigma/I_{\text{cm}^4\text{W}^{-1}} = 9.1462 \times 10^{-36} \omega_{\text{au}} \Gamma_{\text{au}}^{(2)}/I_{\text{au}}^2 \quad (6)$$

Described approach is realized as computer program block in atomic numeric code "Super-atom" (c.f. [2]–[7], which includes a numeric solution of the Dirac equation and calculation of the matrix elements of the Eqs. 1–5 type. The original

moment is connected with using the consistent QED gauge invariant procedure for generating the atomic functions basis's (optimized basis's) [8]. This approach allows getting results in an excellent agreement with experiment and they are more precise in comparison with similar data, obtained with using non-optimized basis's.

3 Some results and conclusion

Let us present the results of calculating the multi-photon resonances spectra characteristics for atom of magnesium in a laser field. Note that in order to calculate spectral properties of atomic systems different methods are used: relativistic R-matrix method (R-method; Robicheaux-Gao, 1993; Luc-Koenig E. et al, 1997), added by multi channel quantum defet method, K-matrix method (K-method; Mengali-Moccia,1996), different versions of the finite L² method (L² method) with account of polarization and screening effects (SE) (Moccia-Spizzo, 1989; Karapanagioti et al, 1996), Hartree-Fock configuration interaction method (CIHF), operator QED PT (Glushkov-Ivanov, 1992; Glushkov et al; 2004) etc.(c.f.[2,9]. In table 1 we present results of calculating characteristics for 3p²¹S₀ resonance of Mg; E - energy, counted from ground state (cm^{-1}), Γ - autoionization width (cm^{-1}), σ/I - maximum value of generalized cross-section (cm^4W^{-1}). R-matrix calculation with using length and velocity formula led to results, which differ on 5-15% , that is evidence of non-optimality of atomic basis's. This problem is absent in our approach and agreement between theory and experiment is very good. Further let us consider process of the multi-photon ATI from the ground state of Mg. The laser radiation photons energies ω in the range of 0,28-0,30 a.u. are considered, so that the final autoionization state (AS) is lying in the interval between 123350 cm^{-1} and 131477 cm^{-1} . First photon provides the AS ionization, second photon can populate the Rydberg resonance's, owing to series 4snl,3dnl,4pnp where J=0 and J=2 [9]. In table 2 we present energies (cm^{-1} ; counted from the ground level of Mg 3s²) and widths (cm^{-1}) of the AS (resonance's) 4snl, 3dnl, 4p² 1D₂, calculated by the K-, R-matrix and our methods. In a case of ¹S₀resonance's one can get an excellent identification of these resonance's. Let us note that calculated spectrum of to-photon ATI is in a good agreement with the R-matrix data and experiment. In a whole other resonances and ATI cross-sections demonstrate non-regular behaviour.

Studied system is corresponding to a status of quantum chaotic system with stochastization mechanism. It realizes through laser field induction of the overlapping (due to random interference and fluctuations) resonances in spectrum,

Table 1 Characteristics for $3p^{21}S_0$ resonance of atom of the magnesium: E - energy, counted from ground state (cm^{-1}), Γ - autoionization width (cm^{-1}), σ/I - maximum value of generalized cross-section (cm^4W^{-1}).

Methods	E	Γ	σ/I
Luc-Koenig E. et al, 1997	without	account	SE
Length form	68492	374	$1,96 \cdot 10^{-27}$
Velocity form	68492	376	$2,10 \cdot 10^{-27}$
Luc-Koenig E. et al, 1997	With	Account	SE
Length form	68455	414	$1,88 \cdot 10^{-27}$
Velocity form	68456	412	$1,98 \cdot 10^{-27}$
Moccia and Spizzo (1989)	68320	377	$2,8 \cdot 10^{-27}$
Robicheaux and Gao (1993)	68600	376	$2,4 \cdot 10^{-27}$
Mengali and Moccia(1996)	68130	362	$2,2 \cdot 10^{-27}$
Karapanagioti et al (1996)	68470	375	$2,2 \cdot 10^{-27}$
Our calculation	68281	323	$2,0 \cdot 10^{-27}$

Table 2 Energies and widths (cm^{-1}) of the AS (resonance's) $4snl, 3dnl, 4p^{21}D_2$ for Mg (see text)

${}^1\text{D}_2$	R -method		Our approach		K - method
	E	Γ	E	Γ	
4s3d	109900	2630	4s3d	109913 2645	
3d ²	115350	2660	3d ²	115361 2672	
4s4d	120494	251	4s4d	120503 259	(ds)
3d5s	123150	1223	3d5s	123159 1235	(ds)
4p ²	124290	446	4p ²	124301 458	
3d4d	125232	400	3d4d	125245 430	
4s5d	126285	101	4s5d	126290 113	(ds)
3d6s	127172	381	3d6s	127198 385	(ds)
4s6d	127914	183	4s6d	127921 215	
3d5d	128327	208	3d5d	128344 215	
4s7d	128862	18	4s7d	128874 24	(ds)
3d5g	128768	4,5	3d5g	128773 5,2	3d5g
3d7s	129248	222	3d7s	129257 235	
4s8d	129543	114	4s8d	129552 125	(ds)
			3d6d	129844 115	
			4s9d	129975 64	
			4s10d	130244 5	
			3d8s	130407 114	
			4s11d	130488 118	
			4s12d	130655 28	
			3d7d	130763 52	
			4s13d	130778 36	
			4s14d	130894 14	
			4s15d	130965 7	

their non-linear interaction, which lead to a global stochasticity in the atomic system and quantum chaos phenomenon. The quantum chaos is well known in physics of the hierarchy, atomic and molecular physics in external electromagnetic field. Earlier it has been found in simple atomic systems H, He, and also Ca (c.f. refs. in [2,3,9]). Analysis indicates on its existence in the Mg spec-

trum. Spectrum of resonance's can be divided on three intervals: 1). An interval, where states and resonances are clearly identified and not strongly perturbed; 2) quantum-chaotic one, where there is a complex of the overlapping and strongly interacting resonances; 3). Shifted one on energy, where behaviour of energy levels and resonances is similar to the first interval. The quantitative estimate shows that the resonances distribution in the second quantum-chaotic interval is satisfied to Wigner distribution as follows:

$$W(x) = x \exp(-\pi x^2/4).$$

At the same time, in the first interval the Poisson distribution is valid.

References

1. Grant, I.: Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules –Oxford (2008), 650p
2. Glushkov, A. : Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems – Odessa, Astroprint (2008), 700p.
3. Glushkov, A., Khetselius, O., Prepelitsa G., Svinarenko, A.: Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape – Coherence and Ultrashort Pulsed Emission, Ed. Duarte F. J. – Vienna, Intech (2011), P.159-186.
4. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Theoretical spectroscopy of autoionization resonances in spectra of lanthanides atoms – Physica Scripta, textbf{T}153 (2013), P.014029 (6p.).
5. Khetselius, O.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac equation for relativistic many-body system and calculating some spectral parametersGeneralized model of decay of the multipole giant resonances – Proceedings of International Geometry Center, **6** (2013), P.60-66.
6. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Relativistic theory of cooperative muon-gamma-nuclear processes: Negative muon capture and metastable nucleus discharge – Advances in the Theory of Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry, Eds. P.Hoggan, E.Brandas, G. Delgado-Barrio, P.Piecuch – Berlin, Springer, **22** (2011), P.51-70.
7. Glushkov, A., Khetselius, O., Florko, T. et al : Gauge-invariant QED perturbation theory approach to calculating nuclear electric quadrupole moments, hyperfine structure constants – Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry – Berlin, Springer, **18** (2008), P.504-522.
8. Glushkov, A., Ivanov, L.: Radiation decay of atomic states: Atomic residue and gauge non-invariant contributions – Phys. Lett.A., **170** (1992), P.33-37.
9. Luc-Koenig, E., Lyras, A., Lecomte J., Aymar, M.: Eigenchannel R-matrix study of two-photon processes including above-threshold ionization in magnesium – J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **30** (1997), P.5213-5232.

Andrey A. Svinarenko

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.

E-mail: quantsvi@mail.ru

Quantum Geometry: Advanced generalized multi-configuration model of decay of the multipole giant resonances

O. Yu. Khetselius

Abstract Within quantum-geometrical treating spectra of the finite Fermi-systems it is presented an advanced generalized multiconfiguration model to describe a decay of high-excited states (the multipole giant resonances). The approach is based on the more accurate mutual using the advanced shell model and microscopic model of pre-equilibrium decay with statistical account for complex configurations 2p2h, 3p3h etc.

Keywords Quantum geometry · Multiconfiguration model · giant resonances · Quantization of quasi-stationary states

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

In the modern quantum geometry and quantum theory of the many-fermion systems there is a number of very complex problems, connected with a development of the consistent methods of calculating eigen values of energy for the Hamiltonians of the many-body systems with account of correlation and other corrections (see, for example, [1]–[4]). As it is well known, the multipole giant resonances (MGR) are the highly excited states of nuclei, which are interpreted as the collective coherent vibrations with participation of large number of nucleons. Experimentally, MGR are manifested as the wide maximums in the dependence of cross-section of the nuclear reactions on the incident particle energy r in -th spectrum of incident particles. A classification of MGR as the states of collective type is usually fulfilled on the quantum numbers of vibrational excitations:

entire angle momentum (J) and parity π (J^π). The MGR are observed in the spectra of majority of nuclei and situated, as a rule, in the continuous spectrum of excitations in a nucleus (with width of order of several MeV). Two theoretical approaches to description of MGR are usually used. In the phenomenological theories it is supposed that the strong collectivization of states allows applying the hydrodynamical models to the description of vibrations of the nuclear form and volume. The microscopic theory is based on the shell nuclear model. In the simple interpretation an excitation of the MGR is result of transition of the nucleons from one closed shell to another one, i.e. the MGR is a result of coherent summation of many particle-hole (p-h) transitions with necessary momentum and parity. MGR are situated under the excitation energies, which exceed the thresholds of emission of the particles from a nucleus. The interaction of a nucleus with external field with forming the MGR occurs during several stages. There is a production of the p-h excitation which corresponds to 1p-1h states over the Fermi surface (1st stage). Then the excited pair interacts with nuclear nucleons with the creating another 1p-1h excited state or two p-h pairs (2p-2h state; 2nd stage). Then the 3p-3h and more complicated states are created till the statistical equilibrium takes a place. The full width of MGR is provided by the direct decay to continuum (Γ^\uparrow) and decay of the 1p-1h configurations on more complicated multi-particle (Γ^\downarrow) ones. The mixing with complex configurations leads to the loss of the coherence and creating states of the compound nucleus. Naturally an account of complex configurations has significant meaning for correct explanation of the MGR widths, structure, decay properties. Here we present an advanced generalized multiconfiguration model to describe a decay of high-excited states, which is based on the mutual using the shell models and microscopic Zhivopistsev-Slivnov model of pre-equilibrium decay with statistical account for complex configurations 2p2h, 3p3h etc. It generalizes earlier developed models [7]–[10]. The advanced approach has been applied to analysis of reaction (μ -n) on the nucleus ^{40}Ca .

2 Advanced generalized multi-configuration model

The MGR may be treated on the basis of the advanced multi-particle shell model. Process of appearance a collective state of MGR and an emission process of nucleons are described (see details in refs. [3]–[6]) by standard diagram, which contains an effective Hamiltonian of interaction V_μ , resulted in capture of muon by nucleus with transformation of proton to neutron and emission by antineu-

trino. Isobaric analogs of isospin and spin-isospin resonances of finite nucleus are excited.

The corresponding diagrams for photonuclear reactions look to be analogous and contain the full vertex part $\tilde{\Gamma}_{22}^n$ (full amplitude of interaction, which transfers the interacting p-h pair to the finite npnh state). The full vertex $\Gamma \tilde{\Gamma}_{22}^n$ is defined by the system of equations within quantum Green function modified approach [6]–[7]). Further, all possible configurations are divided on two groups: i) group of complicated configurations ‘ n_1 ’, which must be considered within shell model with account for residual interaction; ii) statistical group ‘ n_2 ’ of complex configurations with large state density $p(n, E) \gg$ and strong overlapping the states $G_n \gg D_{n-1} > D_n$ (D_n is an averaged distance between states with $2n$ exciton; G_n is an averaged width).

To take into account a collectivity of separated complex configurations for input state a diagonalization of residual interaction on the increased basis (ph, ph+phonon, ph+2 phonon) is used. All complex configurations are considered within the pre-equilibrium decay model [5] with additional account of ‘ n_1 ’ group configurations. The input wave functions of the MGR for nuclei with closed or almost closed shells can be found from diagonalization of residual interaction on the effective optimized 1p1h basis [2]. Statistical multistep negative muon capture through scalar intermediate states of compound nucleus is important. Intensities of nucleon spectra are defined by standard way (see refs. [5]–[7]).

The intensity of nucleonic spectra is defined as follows:

$$\frac{dI}{d\varepsilon_f}(E_\mu, l, \varepsilon_f, J\pi) = \sum_{\substack{n=1, \\ \Delta n=1}} \frac{\Gamma_n^\uparrow(l, \varepsilon_f, J\pi)}{\Gamma_n(J\pi)} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma_k^\downarrow(J\pi)}{\Gamma_k(J\pi)} \right] \cdot A_\mu(E_\mu, J\pi), \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} \Gamma_n^\uparrow(l, \varepsilon_f, J\pi) &= 2\pi \langle |\langle \varphi_{N_n}(J\pi) | I_{N_n, N_B+1} [\varphi^{(+)}(l, \varepsilon_f) \varphi_{N_B}(U_B, I_B)]_{J\pi} \rangle|^2 \rangle \times \\ &\quad \times \rho(l, \varepsilon_f) \rho^{(b)}(N_B, U_B, I_B), \\ \Gamma_k^\uparrow(J\pi) &= \sum_{l,f} \int d\varepsilon_f \Gamma_k^\uparrow(l, \varepsilon_f, J\pi), \\ \Gamma_k(J\pi) &= \Gamma_k^\uparrow(J\pi) + \Gamma_k^\downarrow(J\pi), \\ \Gamma_k^\downarrow(J\pi) &= 2\pi \langle |\langle \varphi_{N_k}(J\pi) | I_{N_k, N_k+1} |\varphi_{N_{k+1}}(J\pi) \rangle|^2 \rangle \rho^{(b)}(N_{k+1}, J\pi, E_\mu), \\ E_\mu &= \varepsilon_f + U_B + B_N. \end{aligned}$$

Here l is the orbital moment of the emission nucleon, ε_f is its energy; B_N is the bond energy of nucleon in the compound nucleus; $A_\mu(E_\mu, J\pi)$ is probability of

μ -capture with excitation of the state $\varphi_{in}(E_\mu, J\pi)$ with energy E_{mu} , spin J and parity π .

As in refs. ([5]–[8]), one could neglect the interference between contributions of separated ‘dangerous’ configurations. The above indicated features of the statistical group of configurations are not fulfilled for the ‘dangerous’ configurations. However, the value $\Gamma_n^\downarrow(n_1)$ for some dangerous configuration is weakly dependent upon the energy. Indeed, configuration n_1 is the superposition of the large number of configurations, i.e.

$$\Gamma_n^\downarrow(n_1) = \sum_{n+1} \frac{|\langle |I_{n_1, n+1}|n+1\rangle|^2}{(E_\mu - E_{n+1})^2 + \Gamma_{n+1}^2/4}$$

Generally, the expressions for the n -step contribution to the emission spectrum are modified as follows:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\varepsilon_f}(E_\mu, l, \varepsilon_f, J\pi) &= \frac{\Gamma_{n_2}^\uparrow(l, \varepsilon_f, J\pi)}{\Gamma_{n_2}(J\pi)} \frac{\Gamma_{n-1, n_2}(J\pi)}{\Gamma_{n-1}(J\pi)} + \\ &+ \sum_{\{n_1\}} \frac{\Gamma_{n_1}^\uparrow(l, \varepsilon_f, J\pi)}{\Gamma_{n_1}(J\pi)} \frac{\Gamma_{n-1, n_1}^\downarrow(J\pi)}{\Gamma_{n-1}(J\pi)} \left[\prod_{k=1}^{n-2} \frac{\Gamma_k^\downarrow(J\pi)}{\Gamma_k(J\pi)} \right] \tilde{\Lambda}_\mu(E_\mu, J\pi), \quad (2) \\ \Gamma_{n-1}^\downarrow &= \sum_{\{n_1\}} \Gamma_{n-1, n_1}^\downarrow + \Gamma_{n-1, n_2}^\downarrow, \end{aligned}$$

where

$$\Gamma_{n-1, n_1}^\downarrow = \frac{|\langle \varphi_{N_{n-1}}(J\pi) I_{N_{n-1}, N_n} \varphi^{(n_1)_{N_n}}(J\pi) \rangle|^2 \Gamma_{n_1}}{(E_\mu - E_{n_1})^2 + \Gamma_{n_1}^2/4}$$

Supposing the input state is isolated, in formalism of the input ph-states one can write:

$$\tilde{\Lambda} = \frac{\Gamma_1(J\pi) \Lambda_\mu(\varphi(E_i, J\pi))}{(E_\mu - E_i)^2 + \Gamma_{n_1}^2/4}$$

where

$$\Gamma_1(\varphi_{in}) = \Gamma_1^\uparrow + \Gamma_{1, n_2}^\downarrow + \sum_{\{n_1\}} \Gamma_{1, n_1}^\downarrow$$

3 Results and conclusion

The wave functions of the input state $\{\varphi_{in}\}$ in the reaction ${}^{40}\text{Ca}(\mu^- n)$ have been calculated within the shell model [7]–[9]. As one could wait for that a collectivity of initial input state leads to significant decreasing Γ_i^\downarrow . The separation into groups n_1 and n_2 is naturally accounted for the 2p2h configuration space and the contribution of configurations ‘ph+phonon’ and weakly correlated 2p2h states

is revealed. A probability of transition to ‘dangerous’ configurations 2p2h is provided by value of matrix element:

$$|\langle \varphi_{in}(\text{ph}, J\pi, E) | I_{\text{ph,2p2h}} | \varphi(2\text{p2h}, J\pi, E) \rangle|^2$$

and additionally by density $\rho(2\text{p2h}, J\pi, E)$ for statistical group n_2 . The contribution of weakly correlated 2p2h configurations is defined by expression [4]:

$$\Gamma_{2\text{p2h}}^{\downarrow} = 2\pi \langle |\langle I_{\text{ph2p2h}} \rangle|^2 \rangle \rho_{2\text{p2h}}.$$

The residual interaction has been choosen in the form of Soper forces:

$$V = g_0(1 - \alpha + \alpha\sigma_1\sigma_2)\delta(r_1 - r_2),$$

where $g_0/(4\pi r_0^3) = -3$ MeV, $\alpha = 0.135$. The phonons have been considered in the collective model and calculation parameters in the collective model and generalized RPA are chosen according to [7]. Our theoretical estimates have been compared with experimental data and other calculation results ([4]–[7]). In the range of 5–13 MeV the experiment gives the intensity $\sim 10\%$ from the equilibrium one. As it has been shown earlier (see, for example, [4]–[6]), the 1^- , 2^- states do not the significant contribution. However, they exhaust $\sim 80\%$ of the intensity of μ^- -capture. The analysis shows that an advanced mutual account for 0^\pm , 1^\pm , 2^\pm , 3^\pm and more high multipoles (plus more less correct microscopic calculation of $\Gamma_{in}^{\downarrow}(J\pi, E)$, the input and 2p2h states, separation of the 2p2h space n configurations n_1 and n_2 etc.) allows to fill the range of high and middle part of spectrum. From this point of view, the presented approach is more correct in comparison with the earlier multiconfiguration models [4]–[6].

Acknowledgement. The author would like to thank Prof. A.Glushkov for useful discussion and critical comments.

References

1. Glushkov, A. : Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems – Odessa, Astroprint (2008), 700p.
2. Glushkov, A., Khetselius, O. and Svinarenko, A.: Relativistic theory of cooperative muon-gamma-nuclear processes: Negative muon capture and metastable nucleus discharge – Adv. in Theory of Quantum Systems in Chem. and Phys. Berlin (Springer), **22** (2011), P.51-70.
3. Izenberg, I. and Grainer, B. : Models of Nuclei. Collective and One-body Phenomena – N.-Y., Acad. (1975), 380p.
4. Bohr, O. and Mottelson, B.: Structure of Atomic Nucleus – N.-Y., Acad. (1974), 400p.
5. Zhivopistsev, F. and Slivnov, A.: Analysis of reaction (μ -n) on the nucleus Ca within generalized model of decay of multipole giant resonances – Izv. AN USSR, textbf{48} (1984), P.1821-1828.
6. Khetselius, O., Glushkov, A., Loboda, A. and Gurnitskaya, E.: Generalized model of decay of the multipole giant resonances – Trans. of the SLAC (Stanford), **1** (2008), P.186-191.

7. Glushkov, A., Khetselius, O., Lovett, L., Gurnitskaya, E., Dubrovskaya, Yu., Loboda, A.: Generalized multiconfiguration model of decay of multipole giant resonances applied to analysis of reaction (μ -n) on nucleus ^{40}Ca – Int.Journ. Modern Phys.A: Particles, Gravitation, Cosmology, Nucl.Phys., **24** (2009), P.611-615.
8. Glushkov, A. and Khetselius, O. : Resonance states of compound super-heavy nucleus and EPPP in heavy ions collisions: Advance energy approach – Preprint OSENU (Odessa)., **M1** (2012), 8p.
9. Khetselius, Yu.: Relativistic energy approach to cooperative electron-gamma-nuclear processes: NEET Effect – Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications. Ser.: Progress in Theor. Phys. and Chem. (Springer)., **26** (2012) P.217-230.
10. Khetselius, Yu.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasistationary states of Dirac equation for superheavy ion and calculating hyperfine structure parameters – Proc. of Internat. Geometry Center, **5**,N3(2012) P.39-45.

O.Yu. Khetselius

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.

E-mail: nuckhet@mail.ru

Розмиті k -ультраметричні простори

Олександр Григорович Савченко

Анотація Запропоновано розмитий аналог поняття K -ультраметричного простору. Показано нульвимірність одержаних просторів. Розглянуто функтор гіперпростору на категорії таких просторів.

Ключові слова Ультраметричний простір, розмитий метричний простір, розмита метрика Гаусдорфа

УДК 515.12

1 Вступ

Метричний простір називають ультраметричним (або неархімедовим), якщо його метрика задоволяє сильну нерівність трикутника. У математиці ультраметричні простори вперше виникли у теорії чисел (p -адичні метрики), згодом вони знайшли застосування також у еволюційній біології, теоретичній фізиці, семантиці мов програмування та інших розділах науки.

У статті [5] означено поняття K -ультраметричного простору. Це поняття є у певному сенсі проміжним між поняттями метричного простору та ультраметричного простору. Мотивація запровадження поняття K -ультраметричного простору лежить у теорії розмитих метричних просторів. Нагадаємо, що розмиті метричні простори є далеким узагальненням метричних просторів; у основу означення розмитої метрики покладено міру ймовірності того, що відстань між точками простору не перевищує заданого числа. З двох найпоширеніших теорій розмитих метричних просторів ми зу-

пинилися на тій, що започаткована у статті [1]. Однією з причин цього є те, що такі розмиті метрики дають альтернативний опис важливого в топології класу метризованих просторів.

У пропонованій замітці запропоновано розмитий аналог поняття K -ультраметричного простору. Він апріорно виявляється багатшим, оскільки береться до уваги також змінна t , присутня в означенні розмитої метрики. Встановлено, що запропоновані розмиті k -ультраметричні простори породжують нульвимірну рівномірну структуру. Крім того, розглянуто функтор гіперпростору на категорії розмитих k -ультраметричних просторів.

2 k -ультраметричні простори

Наведемо необхідні означення з теорії розмитих метричних просторів (дальініше див. в [1]). Нагадаємо, що t -нормою називають бінарну операцію $*: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ таку, що виконано умови:

- (i) $*$ асоціативна і комутативна;
- (ii) $*$ неперервна;
- (iii) $a * 1 = a$ для всіх $a \in [0, 1]$;
- (iv) $a * b \leq c * d$, якщо $a \leq c$ і $b \leq d$.

Прикладами t -норм є функції: 1) $a * b = ab$ та 2) $a * b = a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Означення 1 Трійка $(X, M, *)$ називається розмитим метричним простором, якщо X — довільна множина, $*$ — неперервна t -норма і M — розмита множина на $X^2 \times (0, \infty)$, що задовільняють такі умови для всіх $x, y, z \in X$ і $s, t > 0$:

- (i) $M(x, y, t) > 0$,
- (ii) $M(x, y, t) = 1$ тоді і лише тоді, коли $x = y$,
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,
- (v) функція $M(x, y, -): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ неперервна.

Відомо, що для розмитого метричного простору $(X, M, *)$ множина куль $B(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - r\}$, де $x \in X$, $t > 0$, $r \in (0, 1)$, утворює топологію на множині X .

Означення 2 Нехай $(X_i, M_i, *)$ — розмиті метричні простори, $i = 1, 2$. Відображення $f: X_1 \rightarrow X_2$ називають нерозтягуючим, якщо $M_1(x, y, t) \leq M_2(f(x), f(y), t)$ для кожних $(x, y, t) \in X_1 \times X_1 \times (0, \infty)$.

Нехай X — множина і $K \in [0, \infty]$. Метрику d на множині X будемо називати K -ультраметрикою, якщо $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ для кожних $x, y, z \in X$ таких, що $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \leq K$.

Зауважимо, що кожна 0-ультраметрика насправді є метрикою і кожна ∞ -ультраметрика є ультраметрикою. Зауважимо також, що кожен K -ультраметричний простір є K' -ультраметричним простором, якщо $K' \leq K$.

Нижче наведено означення аналога поняття K -ультраметрики для розмитих метричних просторів. При цьому ми розглядаємо тільки t -норму \wedge .

Нехай $k: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ — функція. Розмиту метрику M на множині X називають розмитою k -ультраметрикою, якщо для кожного $t > 0$ і кожних x, y, z виконано умову:

$$M(x, y, t) \wedge M(y, z, t) \leq M(x, z, t),$$

якщо $\min\{M(x, y, t), M(y, z, t)\} \geq k(t)$.

При $k(t) \equiv 0$ одержуємо поняття розмитої ультраметрики, а при $k(t) \equiv 1$ — поняття розмитої метрики.

Якщо d — метрика на множині X , то тоді функція $M_d: X \times X \times (0, \infty)$, задана формулою

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}, \quad x, y \in X, \quad t > 0,$$

визначає розмиту метрику на X .

Пропозиція 1 Якщо метрика d є K -ультраметрикою на множині X , то функція M_d є розмитою k -ультраметрикою на множині X , де $k(t) = \frac{t}{t+K}$.

Доведення Проводиться безпосередніми обчисленнями.

За аналогією до поняття K -нерозтягуючого відображення означимо таке поняття. Нехай (X, M, \wedge) та (Y, N, \wedge) — розмиті k -ультраметричні простори. Неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$ називають k -нерозтягуючим, якщо $N(f(x), f(y), t) \geq M(x, y, t)$ для кожних $x, y \in X$ таких, що $M(x, y, t) \geq k(t)$.

Легко бачити, що k -ультраметричні простори та їх k -нерозтягуючі відображення утворюють категорію.

Рівномірні структури, породжені розмитою метрикою, означені в статті [2]. Доведено, що якщо $(X, M, *)$ — розмитий метричний простір, то $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — база рівномірної структури U_M , сумісної з топологією τ_M , де

$$U_n = \left\{ (x, y) \mid M \left(x, y, \frac{1}{n} \right) > 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Надалі на розмитих метричних просторах розглядаємо саме таку рівномірну структуру.

Рівномірний простір називають рівномірно нульвимірним (див. [3]), якщо у кожне його рівномірне покриття можна вписати рівномірне дискретне покриття.

Теорема 1 Нехай k — така неперервна функція, що $\lim_{t \rightarrow +0} k(t) < 1$. Тоді кожен розмитий k -ультраметричний простір є рівномірно нульвимірним.

Доведення Існує $t_0 > 0$ таке, що $k(t) \geq 1 - t$ для кожного $t \in (0, t_0)$. Нехай $n_0 \in \mathbb{N}$ — таке, що $1/n_0 < t_0$.

Для кожного $n \geq n_0$ маємо

$$\begin{aligned} U_n U_n &= \{(x, z) \in X \times X \mid \text{існує } y \in X \text{ таке, що } M(x, y, 1/n) > 1 - (1/n), \\ &\quad M(y, z, 1/n) > 1 - (1/n)\} \subset \{(x, z) \in X \times X \mid M(x, z, 1/n) > 1 - (1/n)\} \\ &= U_n, \end{aligned}$$

тобто рівномірна структура, породжена M , має базу, що складається з відношень еквівалентності. Оскільки кожне відношення еквівалентності породжує диз'юнктне рівномірне покриття простору, то звідси безпосередньо випливає твердження теореми.

Нехай B — непорожня підмножина розмитого метричного простору $(X, M, *)$. Для кожних $a \in X$ і $t > 0$, нехай

$$M(a, B, t) = \sup\{M(a, b, t) \mid b \in B\}$$

(див. означення 2.4 статті [4]).

Нехай $(X, M, *)$ — розмитий метричний простір. Означимо через $\exp X$ сім'ю всіх непорожніх компактних підмножин в просторі X . Як і в статті [4], означимо функцію

$$M_H: \exp X \times \exp X \times (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$$

формулою:

$$M_H(A, B, t) = \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\}$$

для всіх $A, B \in \exp X$ і $t > 0$.

Основний результат (Теорема 1) статті [4] стверджує, що $(M_H, *)$ — розмита метрика на множині $\exp X$ (розмита метрика Гаусдорфа). Більше

того, ця розмита метрика породжує топологію Віеторіса на гіперпросторі $\exp X$.

Нагадаємо, що для кожного неперервного відображення $f: X \rightarrow Y$ відображення $\exp f: \exp X \rightarrow \exp Y$ задається формулою: $\exp f(A) = f(A)$.

Теорема 2 *Нехай M — розмита k -улльтраметрика на множині X . Тоді M_H — розмита k -улльтраметрика на множині $\exp X$. При цьому одержуємо функтор \exp на категорії розмитих k -улльтраметричних просторів та k -нерозтягуючих відображень.*

Доведення Нехай $A, B, C \in \exp X$, $t > 0$ і нехай

$$M_H(A, B, t) = \alpha \geq k(t), \quad M_H(B, C, t) = \beta \geq k(t).$$

З означення розмитої метрики Гаусдорфа випливає, що для кожного $a \in A$ існує $b \in B$ таке, що $M(a, b, t) \geq k(t)$. Аналогічно, для кожного $b \in B$ існує $c \in C$ таке, що $M(b, c, t) \geq k(t)$.

Застосовуючи означення розмитої k -улльтраметрики, одержуємо: для кожного $a \in A$ існують $b \in B$ і $c \in C$ такі, що $M(a, c, t) \geq \alpha \wedge \beta$, і, аналогічно, для кожного $c \in C$ існують $b \in B$ і $a \in A$ такі, що $M(c, a, t) \geq \alpha \wedge \beta$.

Разом це означає, що $M_H(A, B, t) \geq \alpha \wedge \beta$.

Нехай тепер $f: X \rightarrow Y$ — k -нерозтягуюче відображення розмитого метричного простору (X, M, \wedge) у розмитий метричний простір (Y, N, \wedge) . Якщо $M_H(A, B, t) \geq \alpha \geq k(t)$, то для кожного $a \in A$ існує $b \in B$ таке, що $M(a, b, t) \geq \alpha$. Переходячи до образів і враховуючи k -нерозтягуваність відображення f , одержуємо, що для кожного $a' \in f(A)$ існує $b' \in f(B)$ таке, що $N(a', b', t) \geq \alpha$. Аналогічно, для кожного $b' \in f(B)$ існує $a' \in f(A)$ таке, що $N(a', b', t) \geq \alpha$. Разом це означає, що $N(\exp f(A), \exp f(B), t) \geq \alpha$. Таким чином, відображення $\exp f \in k$ -нерозтягуючим.

3 Зауваження

У статті [5] доведено структурну теорему для K -улльтраметричних просторів. Виникає природна проблема: описати структуру розмитих k -улльтраметричних просторів.

Крім того, у статті [5] показано, що існує K -улльтраметризація простору ймовірнісних мір з компактними носіями на K -улльтраметричному просторі. Ця K -улльтраметризація базується на існуванні метрики Канторовича на просторі ймовірнісних мір на метричному просторі та метрики Гартогаде Вінка на просторі ймовірнісних мір на ультраметричному просторі. У

теорії розмитих метричних просторів не побудовано відповідника метрики Канторовича на просторах ймовірнісних мір, однак існує аналог метрики Прохорова (див. [8]). Крім того, існує аналог метрики Гартога-де Вінка на просторі ймовірнісних мір на розмитому ультраметричному просторі [7]. Це дає надію на можливість побудови k -улльтраметризації просторів ймовірнісних мір.

Аналогічне запитання можна сформулювати і для так званих ідемпотентних мір (мір Маслова) на k -улльтраметричних просторах.

Література

1. A. George, P. Veeramani, *On some results on fuzzy metric spaces*. - Fuzzy Sets and Systems, 64 (1994), P. 395–399.
2. V. Gregori, S. Romaguera, *Some properties of fuzzy metric spaces*. - Fuzzy Sets and Systems. 115 (2000), P.485 — 489.
3. J. R. Isbell, *Zero-dimensional spaces*. - Tohoku Mathematical Journal, 7:1-2 (1955), P.1–8.
4. J. Rodriguez-Lopez, S. Romaguera, *The Hausdorff fuzzy metric on compact sets*. - Fuzzy Sets and Systems. 147:2 (2004), P.273 – 283.
5. О. Савченко, *Функтори на категорії k -улльтраметричних просторів* . - Математичний вісник НТШ., 8 (2011), С. 100–110.
6. О. Г. Савченко, *Ідемпотентні міри і k -улльтраметричні простори*. - Праці міжнародного геометричного центру, 4:1 (2011), С. 42–49.
7. A. Savchenko, M. Zarichnyi, *Fuzzy ultrametrics on the set of probability measures*. - Topology, 48:2-4 (2009), P. 130 – 136.
8. A. Savchenko, M. Zarichnyi, D. Repovš, *Fuzzy Prokhorov metric on the set of probability measures*. - Fuzzy Sets and Systems. 175:1 (2011), P.96 – 104.

Олександр Григорович Савченко

Херсонський державний аграрний університет,
Херсон, вул. Рози Люксембург, 23
E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Aleksandr Savchenko

Fuzzy k -ultrametric spaces

A fuzzy counterpart of the notion of K -ultrametric space is defined. Zero-dimensionality of introduced spaces is proved. The hyperspace functor on the category of these spaces is considered.

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік
№ 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлєтень ВАК України. 2010. № 4)

Наклад 300 примірників. Зам. № 319.

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна
E-mail: geom-odessa@ukr.net
website: <http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4>

ISSN 2072-9812. ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.
2013. ТОМ 6. №3. 1-73