ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 6, No. 2, 2013

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 6, No. 2, 2013

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 6, No. 2, 2013

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Vol. 6, No. 2, 2013

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2013

Засновники:
Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеської національної академії харчових технологій
(№ 10 від 09.04.2013р)

Зміст

Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating of chaotic self-oscillations in backward-wave tube

A.V.Glushkov, V.V. Buyadzhi, V.B. Ternovsky

Abstract It is presented an numerical application of a consistent chaos-geometrical combined approach to non-linear analysis and treating of chaotic of chaotic self-oscillations in backward-wave tube. It combines together application of the wavelet analysis, multi-fractal formalism, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, surrogate data method etc.

Keywords geometry of chaos, backward-wave tube, non-linear analysis, chaotic self-oscillations

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

In this paper we present an numerical application of a consistent chaos-geometrical combined approach [1-10] to to non-linear analysis and treating of chaotic of chaotic self-oscillations in backward-wave tube. It combines together application of the wavelet analysis, multi-fractal formalism, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, surrogate data method etc. As it is indicated earlier [1-4], time series can be considered as random realization, when the randomness is caused by a complicated motion with many independent degrees of freedom. Chaos is alternative of randomness and occurs in very simple deterministic systems. Although chaos theory places fundamental limitations for long-rage prediction, it can be used for short-range prediction since ex facte random data can contain simple deterministic relationships with only a few degrees of freedom. During the last two decades, many studies in various fields of science have appeared, in which chaos theory was applied to a great number of dynamical systems, including those are originated from nature (e.g. [1-19]). Now it is well known that in the modern electronics etc there are many physical systems (the backward-wave tubes, multielement semiconductors and gas lasers, different radiotechnical devices etc), which can manifest the elements of chaos and hyperchaos in their dynamics (e.g. [8-10]). The key aspect of studying the dynamics of these systems is analysis of the dynamical characteristics. Chaos theory establishes that apparently complex irregular behaviour could be the outcome of a simple deterministic system with a few dominant nonlinear interdependent variables. The outcomes of such studies are very encouraging, as they not only revealed that the dynamics of the apparently irregular phenomena could be understood from a chaotic deterministic point of view but also reported very good predictions using such an approach for different systems.

2. Combined chaos-geometrical approach to to treating of chaotic self-oscillations in backward-wave tube

The backward-wave tube is an electronic device for generating electromagnetic vibrations of the superhigh frequencies range. In ref.[9] there have been presented the temporal dependences of the output signal amplitude, phase portraits, statistical quantifiers for a weak chaos arising via period-doubling cascade of self-modulation and for developed chaos at large values of the dimensionless length parameter. The authors of [9] have solved the equations of nonstationary nonlinear theory for the O type backward-wave tubes without account of the spatial charge, relativistic effects, energy losses etc. It has been shown that the finite-dimension strange attractor is responsible for chaotic regimes in the backward-wave tube. In our work in order to study the chaotic self-oscillations regimes in the backward-wave tube we have used earlier developed and adapted techniques of the non-linear analysis, such as the multi-fractal formalism, methods of correlation integral, false nearest neighbour, Lyapunov exponent's, surrogate data (code "Geomath"). As the key ideas of our technique for nonlinear analysis of chaotic systems have been in details presented in refs. [1-8], here we are limited only by brief representation..

Since processes resulting in the chaotic behaviour are fundamentally multivariate, it is necessary to reconstruct phase space using as well as possible information contained in the dynamical parameter $s(n)$, where n the number of the measurements. Such a reconstruction results in a certain set of d-dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing the scalar measurements. Packard et al. [12] introduced the method of using time-delay coordinates to reconstruct the phase space of an observed dynamical system. The direct use of the lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be determined, results in a coordinate system in which the structure of orbits in phase space can be captured. Then using a collection of time lags to create a vector in d dimensions,

$$\mathbf{y}(n) = s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \ldots, s(n + (d - 1)\tau), \tag{1}$$

the required coordinates are provided. In a nonlinear system, the $s(n + j\tau)$ are some unknown
nonlinear combination of the actual physical variables that comprise the source of the measurements. The dimension d is called the embedding dimension, d_E. According to Mane [16] and Takens [15], any time lag will be acceptable is not terribly useful for extracting physics from data. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. Similarly, if τ is too large, then $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. Also, if τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated respectively [3]. The autocorrelation function and average mutual information can be applied here. The first approach is to compute the linear autocorrelation function:

$$C_L(\delta) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}[s(m+\delta) - \bar{s}][s(m) - \bar{s}]}{\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}[s(m) - \bar{s}]^2}, \bar{s} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} s(m) \tag{2}$$

and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through zero (see [18]). This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. a time series under consideration have an n-dimensional Gaussian distribution, these statistics are theoretically equivalent (see, e.g., [1-3]). The general redundancies detect all dependences in the time series, while the linear redundancies are sensitive only to linear structures. Further, a possible nonlinear nature of process resulting in the vibrations amplitude level variations can be concluded.

The goal of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. In accordance with the embedding theorem, the embedding dimension, d_E, must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, itd_A, i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E, e.g.

10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. However, two problems arise with working in dimensions larger than really required by the data and time-delay embedding [1-4,13-17]. First, many of computations for extracting interesting properties from the data require searches and other operations in R^d whose computational cost rises exponentially with d. Second, but more significant from the physical point of view, in the presence of noise or other high dimensional contamination of the observations, the extra dimensions are not populated by dynamics, already captured by a smaller dimension, but entirely by the contaminating signal. In too large an embedding space one is unnecessarily spending time working around aspects of a bad representation of the observations which are solely filled with noise. It is therefore necessary to determine the dimension d_A.

There are several standard approaches to reconstruct the attractor dimension (see, e.g., [1-18]). The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. The analysis uses the correlation integral, $C(r)$, to distinguish between chaotic and stochastic systems. To compute the correlation integral, the algorithm of Grassberger and Procaccia [13] is the most commonly used approach. If the time series is characterized by an attractor, then the integral $C(r)$ is related to the radius r given by

$$d = \lim_{\substack{r \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{\log C(r)}{\log r}, \tag{3}$$

where d is correlation exponent that can be determined as the slop of line in the coordinates *log* $C(r)$ versus *log* r by a least-squares fit of a straight line over a certain range of r, called the scaling region. If the correlation exponent attains saturation with an increase in the embedding dimension, the system is generally considered to exhibit chaotic dynamics. The saturation value of correlation exponent is defined as the correlation dimension (d_2) of attractor.

Lyapunov exponents are the dynamical invariants of the nonlinear system. In a general case, the orbits of chaotic attractors are unpredictable, but there is the limited predictability of chaotic physical system, which is defined by the global and local Lyapunov exponents. A negative exponent indicates a local average rate of contraction while a positive value indicates a local average rate of expansion. In the chaos theory, the spectrum of Lyapunov exponents is considered a measure of the effect of perturbing the initial conditions of a dynamical system.

Since the Lyapunov exponents are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and therefore they do comprise an invariant measure of attractor. In fact, if one manages to derive the whole spectrum of Lyapunov exponents, other invariants of the system, i.e. Kolmogorov entropy and attractor's dimension can be found. The Kolmogorov entropy, K, measures the average rate at which information about the state is lost with time. An estimate of this measure is the sum of the positive Lyapunov exponents. The inverse of the Kolmogorov entropy is equal to the average predictability. There are several approaches to computing the Lyapunov exponents (see, e.g., [1-5,10,17]). One of them [1,17] is in computing the whole spectrum and based on the Jacobin matrix of the system function.

3. Numerical results and conclusions

In table 1 we present the data on the Lyapunov exponents' for two self-oscillations regimes in the backward-wave tube: i). the weak chaos (normalized length: L=4.24); ii) developed chaos (L=6.1). The correlations dimensions are respectively as 2.9 and 6.2.

Table 1. numerical parameters of the chaotic self-oscillations in the backward-wave tube: $\lambda_1 - \lambda_6$ are the Lyapunov exponents in descending order, K is the Kolmogorov entropy

Regime	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	K
Weak chaos L=4.24	0.261	- 0.0001	-0.0004	-0.528	$-$	$-$	0.261
Hyperchaos L=6.1	0.514	0.228	0.0000	-0.0002	-0.084	-0.396	0.742

Our analysis is in very good agreement with the similar data [9] and confirms a conclusion about realization of the chaotic features in dynamics of the backward-wave tube. Thus, we have considered a problem of a chaotic oscillations in dynamics of the backward-wave tube within earlier formulated formally theoretical basis's of a consistent chaos-geometrical approach to treating of chaotic dynamical systems. This approach combines together the non-linear analysis methods to dynamics, such as the wavelet analysis, multi-fractal formalism, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, the LE analysis, surrogate data method etc. We have investigated a chaotic elements for two self-oscillations regimes in the backward-wave tube and proved an existence of the low-dimensional chaos in the corresponding time series (dynamics). The presented example has shown high perspectives of a combined chaos-geometrical approach methods to treating chaotic dynamics of very complicated quantum-electronics, radio-technical systems, devices etc.

References

1. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
2. Glushkov A.V., Chaos-geometrical universal numerical approach to life science processes: Theoretical basis's// Computational Life Sciences (Sprinfger), in print.
3. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-6(**??**)-6-19
4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A. Atmospheric teleconnection patterns: wavelet analysis// Nonlin. Proc.in Geophys.-2004.-V.11,N3.-P.285-293.
5. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V.,Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
6. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems – Theory and Applications. – City-Lodz: PlaceNameLodz PlaceTypeUniv. Press (placecountry-regionPoland). –2011.- LIF111 (6p.).
7. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Kuzakon V.M., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Svinarenko A.A., Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on the basis of temporal series analyses (application to semiconductor quantum generators)// Dynamical Systems – Theory and Applications. – CityLodz: PlaceNameLodz PlaceTypeUniv. Press (placecountry-regionPoland). –2011.-BIF110 (8p.).
8. Kuzakon V.M., Prepelitsa G.P., Buyadzhi V.V., Solyanikova E.P., Karpenko A.A., Korchevsky D.A., Nonlinear stochastic dynamics governing for quantum systems in external field: Chaos theory and recurrence spectra analysis// Photoelectronics.-2012.-N21.-P.33-36.
9. Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I., Chaos and hyperchaos in the backward-wave tube// Izv.Vuzov. Ser. Radiophys.- 2004 .Vol.XLVII.-P.1-17.
10. Kuznetsov S.P., Dunamical chaos.-Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P.
11. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403–3411.
12. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712–716.
13. Grassberger P., SnProcaccia SnI., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189–208.
14. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134–1140.
15. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin -Heidelberg- New York, pp 366–381
16. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, CityplaceWarwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin-Heidelberg N.-Y., p. 230–242
17. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082–1085
18. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B., Farmer J., Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data// Physica D.-1992.-Vol.58.-P.77–94.
19. Kaplan J.L., Yorke J.A., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in: Peitgen H.-O., Walter H.-O. (Eds.), Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics No. 730. Springer, Berlin.-1979.-pp.204-227.

A.V.Glushkov, V.V. Buyadzhi, V.B. Ternovsky
Mathematics Department
State Environmental University, Odessa, Ukraine
E-mail: dirac13@mail.ru

Proc. Intern. Geom. Center 2013 **6**(2) 13-21 $d\omega$

Метризовні функтори і K-ультраметрики

Л. Є. Базилевич М. М. Зарічний О. Г. Савченко

Анотація Поняття K-ультраметричного простору є проміжним між поняттям метричного простору і ультраметричного (неархімедового) простору. Ми описуємо загальну конструкцію K-ультраметризації для метризовних функторів у сенсі В.В. Федорчука.

Ключові слова Ультраметричний простір, метризовний функтор

1 Вступ

Поняття ультраметрики (неархімедової метрики) знаходить численні застосування не лише у різних розділах математики, а й далеко за її межами (у інформатиці, фізиці, біофізиці). Нагадаємо, що ультраметрикою називають метрику d, яка задовольняє сильну нерівність трикутника $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$. Нещодавно один з авторів цієї замітки розглянув одне узагальнення поняття ультраметрики, а саме, поняття K-ультраметрики (див. [9]). Одна з мотивацій запровадження поняття K-ультраметрики лежить у теорії так званих розмитих метричних просторів.

Для K-ультраметричних просторів у статті [9] доведено структурну теорему. Крім того, у цій же статті розглянуто різні функторіальні конструкції у категорії (рівномірних) K-ультраметричних просторів та так званих K-нерозтягуючих відображень.

У статті [10] завважено, що можна розглядати функтор ідемпотентних мір на категорії (рівномірних) K-ультраметричних просторів та K-нерозтягуючих відображень. Нагадаємо, що поняття ідемпотентної міри виникло в контексті так званої ідемпотентної математики (див. [1,6,7,3] та ін.)

Ідемпотентні міри є частковим прикладом так званих неадитивних мір (ємностей). Ємності на ультраметричних просторах вивчалися в [2]. Виникає природна задача поширення одержаних результатів на функтор ємностей на категорії K-ультраметричних просторів.

У цій замітці ми розглядаємо загальну ситуацію і пропонуємо конструкцію, яка може застосовуватися до кожного метризовного функтора в сенсі В.В. Федорчука.

2 Цілком метризовні функтори

Нехай F — майже нормальний у сенсі Є. Щепіна функтор у категорії **Comp** компактних гаусдорфових просторів (див., наприклад, [11]). Тут ми коротко нагадаємо, що умова нормальності означає неперервність, мономорфність, епіморфність, збереження ваги, перетинів, прообразів, точки і порожньої множини. Якщо опустити умову збереження ваги, то одержуємо означення майже нормального функтора.

Поняття метризовності функтора вперше означив В.В. Федорчук [12], узагальнюючи властивості конкретних функторів у категорії **Comp**. Кажемо, що функтор F метризовний, якщо кожній метриці d_X на просторі X відповідає метрика $d_F(X)$ на просторі $F(X)$, причому виконано умови:

1. зберігаються ізометричні вкладення;
2. природне вкладення $X \to F(X)$ є ізометричним вкладенням;
3. $\mathrm{diam}(X) = \mathrm{diam}(F(X))$.

Нехай (X, d) — ультраметричний простір. Для кожного $K > 0$ через $\sim_K$ позначаємо відношення еквівалентності на X, означене умовою: $x \sim_K y$ тоді і лише тоді, коли $d(x, y) \leq K$. Нехай через $q_K \colon X \to X/\sim_K$ позначено факторвідображення, а для кожних $K \geq L > 0$, через $q_{LK} \colon X/\sim_L \to X/\sim_K$ — природне відображення. Тоді, очевидно, $X = \varprojlim(X/\sim_K, q_{LK})$.

Означимо відображення $\tilde{d} \colon F(X) \times F(X) \to \mathbb{R}$ формулою

$$\tilde{d}(a, b) = \inf\{K > 0 \mid F(q_K)(a) = F(q_K)(b)\}, \ a, b \in F(X).$$

Нескладно показати, що функція $\tilde{d}$ є ультраметрикою на множині $F(X)$. У доведенні ми використовуємо той факт, що $F(X) = \varprojlim(F(X/\sim_K), F(q_{LK}))$ — це випливає з властивості неперервності функтора F.

Завважимо, що топологія на $F(X)$, індукована ультраметрикою $\tilde{d}$, взагалі кажучи, відмінна від вихідної топології на $F(X)$.

Нехай X — множина і $K \in [0, \infty]$. Метрику d на множині X будемо називати *K-ультраметрикою*, якщо $d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ для кожних $x, y, z \in X$ таких, що $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \le K$.

Зауважимо, що кожна 0-ультраметрика насправді є метрикою і кожна ∞-ультраметрика є ультраметрикою. Зауважимо також, що кожен K-ультраметричний простір є K'-ультраметричним простором, якщо $K' \le K$.

Назвемо K-ультраметричний простір рівномірно K-ультраметричним, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що виконано умову: якщо $x, y \in X$ і $d(x, y) < K + \varepsilon$, то $d(x, y) \le K$.

Наша задача — побудувати K-ультраметрику на просторі $F(X)$ для кожного рівномірно K-ультраметричного простору X. Насамперед завважимо, що для такого простору X маємо: $X = \varprojlim(X/\sim_R, q_{RS}, (0, K))$. Якщо $\mu, \nu \in F(X)$ і $F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu)$, то приймемо

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \inf\{S \in (K, 0) \mid F(q_S)(\mu) = F(q_S)(\nu)\}.$$

Приймемо:

$$d_K(\mu, \nu) = \begin{cases} \tilde{d}(\mu, \nu), & \text{якщо } F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu), \\ \max\{d_{F(q_K(X))}(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\nu)), K + \varepsilon\}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Як бачимо, означення функції d_K залежить від того, яку сталу ε вибираємо у означенні рівномірної K-ультраметрики. Це явно не відзначалося у попередніх статтях, що стосуються рівномірно K-ультраметричних просторів.

Теорема 1 *Функція $d_K \colon F(X) \times F(X) \to \mathbb{R}$ є рівномірною K-ультраметрикою на множині $F(X)$.*

Доведення Візьмемо $\varepsilon > 0$ з означення рівномірної ультраметрики. Покажемо спочатку, що $d_K(\mu, \nu) > 0$, якщо $\mu \ne \nu$. Якщо $F(q_K)(\mu) = F(q_K)(\nu)$, то $d_K(\mu, \nu) = \tilde{d}(\mu, \nu) > 0$. У протилежному випадку $d_K(\mu, \nu) > \varepsilon > 0$.

Очевидно, що функція d_K симетрична.

Доведемо для функції d_K нерівність трикутника. Нехай $\mu, \nu, \tau \in F(X)$ — попарно різні елементи простору $F(X)$. Якщо

$$F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu) = F(q_K)(\tau),$$

то нерівність трикутника випливає з (сильної) нерівності трикутника для метрики $\tilde{d}$. Якщо $F(q_K)(\mu) = F(q_K)(\nu) \neq F(q_K)(\tau)$, то

$$d_K(\mu,\nu) \leq K < K+\varepsilon \leq \max\{d_K(\mu,\tau), d_K(\nu,\tau)\}.$$

Якщо $F(q_K)(\mu) \neq F(q_k)(\nu) = F(q_K)(\tau)$, то $\max\{d_K(\mu,\tau), d_K(\nu,\tau)\} = d_K(\mu,\tau)$. При цьому, якщо $d_K(\mu,\nu) = K+\varepsilon$, то нерівність доведено. Тому припускаємо, що $d_K(\mu,\nu) = d_{F(q_K(X))}(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\nu))$. Але тоді також $d_K(\mu,\tau) = d_{F(q_K(X))}(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\tau))$ і нерівність трикутника має місце.

Аналогічні міркування застосовуємо для випадку, коли $F(q_K)(\mu), F(q_k)(\nu), F(q_K)(\tau)$ — попарно різні елементи простору $F(X)$.

Тепер перевіримо умову з означення K-ультраметрики. Надалі нехай $\mu,\nu,\tau \in F(X)$ — попарно різні елементи простору $F(X)$.

Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $d_{F(q_K(X))}(\mu,\nu) \leq K$. Якщо також $d_{F(q_K(X))}(\nu,\tau) \leq K$, то з сильної нерівності трикутника для метрики $\tilde{d}$ випливає, що

$$d_{F(q_K(X))}(\mu,\nu) \leq \max\{d_{F(q_K(X))}(\mu,\tau), d_{F(q_K(X))}(\tau,\nu)\}.$$

Тепер якщо $d_{F(q_K(X))}(\mu,\nu) \leq K$ і $d_{F(q_K(X))}(\nu,\tau) \geq K+\varepsilon$, то також і $d_{F(q_K(X))}(\mu,\tau) \geq K+\varepsilon$, а отже

$$\begin{aligned} d_{F(q_K(X))}(\mu,\tau) =& d_K(F(q_K)(\mu), F(q_K)(\tau)) = d_K(F(q_K)(\nu), F(q_K)(\tau)) = d(\nu,\tau) \\ =& \max\{d(\mu,\nu), d(\nu,\tau)\}. \end{aligned}$$

Перевіримо, що функція d_K є рівномірною K-ультраметрикою. Нехай $\mu,\nu \in F(X)$ і $d_K(\mu,\nu) < K+\varepsilon$. З означення функції d_K випливає, що тоді $F(q_K)(\mu) = F(q_k)(\nu)$, а тому $d_K(\mu,\nu) \leq K$.

Зауважимо, що ця конструкція може бути здійснена також і у випадку некомпактних просторів. Справді, існує продовження за Чигогідзе [13] функтора F на категорію тихоновських просторів (ми зберігаємо для цього продовження ту ж саму літеру F). Маючи $a,b \in F(X)$, розглянемо звуження метрики на компактну множину $\mathrm{supp}(a) \cup \mathrm{supp}(b)$ і для цієї метрики означимо відстань між a і b як вище.

Означимо категорію $\mathbf{UUMET}_K$. Її об'єктами є K-ультраметричні простори, а морфізмами простору (X,d) у простір (Y,ϱ) — K-нерозтягуючі відображення, тобто неперервні відображення $f\colon X \to Y$ такі, що $\varrho(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ для кожних $x,y \in X$ таких, що $d(x,y) \leq K$.

Теорема 2 *Наведена вище конструкція визначає функтор на категорії рівномірних K-ультраметричних просторів та K-нерозтягуючих відображень.*

Доведення Якщо $\mu, \nu \in F(X)$ і $d_K(\mu,\nu) \le K$, то $d_K(\mu,\nu) = \tilde{d}(\mu,\nu)$. Позначимо через $q'_S \colon Y \to Y/\sim_S$ для $S \in (0,K]$. З умови K-нерозтягуваності випливає, що для кожного $S \in (0,K]$ існує відображення $f_S \colon X/\sim_S \to Y/\sim_S$ таке, що $q'_S f = f_S q_S$. Звідси $F(q'_S)F(f) = F(f_S)F(q_S)$, а тому

$$\varrho_K(F(f)(\mu), F(f)(\nu)) = \tilde{\varrho}(F(f)(\mu), F(f)(\nu)) \le \tilde{d}(\mu,\nu) = d_K(\mu,\nu).$$

3 Приклади

Тут ми подаємо деякі приклади метризовних функторів.

Почнемо з функтора напівнеперервних згори ємностей. Через $\exp X$ позначаємо множину всіх непорожніх компактних підмножин простору X, наділену метрикою Гаусдорфа. Ємністю на компакті X називають функцію $c\colon \exp X \cup \{\emptyset\} \to [0,1]$, що задовольняє умови:

1. $c(\emptyset) = 0,\ c(X) = 1$;
2. якщо $F \subset G$, то $c(F) \le c(G)$ (монотонність);
3. якщо $c(F) < a$, то існує окіл U множини F такий, що $c(G) < a$ для кожної замкненої множини $G \subset U$ (напівнеперервність згори).

Для кожної ємності μ і кожної неперервної функції φ задається інтеграл Шоке
$$\mu(\varphi) = \int_X \varphi d\mu = \int_0^\infty \mu(\varphi \ge t)dt - \int_{-\infty}^0 (1 - \mu(\varphi \ge t))dt.$$
Через $\mathrm{n-LIP} = \mathrm{n-LIP}(X,d)$ позначаємо множину всіх ліпшицевих функцій з ліпшицевою константою $\le n$ з множини $C(X)$.

Кожна метрика d на X тепер породжує метрику $\hat{d}$ на множині $M(X)$ всіх напівнеперервних згори ємностей на X:

$$\hat{d}(\mu,\nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \in 1 - \mathrm{LIP}\}$$

(див. [8]).

Для неперервного відображення $f\colon X \to Y$ відображення $M(f)\colon M(X) \to M(Y)$ задаємо формулою: $M(f)(c)(F) = c(f^{-1}(F))$, для кожного $c \in M(X)$ і замкненої підмножини $F \subset Y$.

Відомо, що функтор напівнеперервних згори ємностей M майже нормальний.

Теорема 3 *Відображення носія* $\mathrm{supp} = \mathrm{supp}_X\colon M(X) \to \exp X$ *є* K*-нерозтягуючим.*

Доведення цього факту повторює відповідне доведення для функтора ймовірнісних мір, запропоноване в [9]. Нескладно перевірити, що клас відображень supp_X складає природне перетворення функтора M в функтор exp.

Застосовуючи конструкцію попереднього параграфа, одержуємо K-ультраметризацію простору напівнеперервних згори ємностей на K-ультраметричному просторі.

Функтор ідемпотентних мір розглянуто у статті [10]. Нехай c_X означає функцію на топологічному просторі X, тотожньо рівну c. За традиціями ідемпотентної математики через $c \odot \varphi$ позначаємо функцію $c_X + \varphi$. Через $\varphi \oplus \psi$ позначаємо максимум функцій φ і ψ.

Означення 1 *Нехай X — компактний гаусдорфовий простір. Функціонал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ називається* ідемпотентною мірою *(мірою* Маслова*), якщо*

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

Відомо, що довільна ідемпотентна міра є неперервним функціоналом на нормованому просторі $C(X)$.

Застосовуючи перетворення $t \mapsto e^t$, одержуємо альтернативний опис ідемпотентних мір. Через $C_+(X)$ позначаємо множину всіх невід'ємних неперервних функцій на X. Вважаємо, що ідемпотентна міра на X — це функціонал $\mu\colon C_+(X) \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови:

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(c\varphi) = c\mu(\varphi)$ для кожного $c > 0$;
3. $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

Нехай $I(X)$ множина всіх ідемпотентних мір на X. Наділимо $I(X)$ слабкою* топологією. Базу цієї топології складають множини

$$O(\mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon) = \{\nu \in I(X) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\}.$$

В [6] доведено, що $I(X)$ є компактним гаусдорфовим простором.

Розглянемо приклад ідемпотентної міри на просторі X. Нехай $x_1, \dots, x_n \in X$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — набір чисел таких, що $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 1$. Означимо $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ наступним чином:

$$\mu(\varphi) = \max\{\lambda_i \odot \varphi(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Для довільного $x \in X$ через δ_x означимо функціонал на $C(X)$ наступним чином: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Тоді можна записати, що $\mu = \oplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

Для заданого неперервного відображення $f\colon X \to Y$, задамо відображення $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ наступним чином. Нехай $\varphi \in C(Y)$, тоді, для даної $\mu \in O(X)$, задамо $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$.

Ми отримали коваріантний функтор I на категорії **Comp**.

З [6] відомо, що I зберігає клас вкладень. Як наслідок, для кожної замкненої підмножини A компактного гаусдорфового простору X, множині $I(A)$ можемо поставити у відповідність підмножину $I(\iota)(A)$ множини $I(X)$, де $\iota\colon A \to X$ позначає вкладення. Це дає змогу означити носії ідемпотентних мір, аналогічно до ймовірнісних мір. Носій ідемпотентної міри μ позначаємо через $\mathrm{supp}(\mu)$.

Нагадаємо, що якщо d — деяка метрика на просторі X, то на множині $I(X)$ ідемпотентних мір на X з компактними носіями метрику можна означити такою конструкцією (див. [1]).

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для кожних $\mu, \nu \in I(X)$ нехай

$$\tilde{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \in \mathrm{n-LIP}\}.$$

У статті [1] показано, що функція $\tilde{d}_n$ є псевдометрикою на множині $I(X)$.

Тоді функція $\tilde{d}\colon I(X) \times I(X) \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{d}_n(\mu, \nu)}{2^i},$$

є метрикою на множині $I(X)$.

Через d_{HZ} позначаємо метрику на множині ідемпотентних мір з компактними носіями на ультраметричних просторах, означену у статті [3]. Вона рівна метриці, означеній загальною конструкцією у попередньому параграфі. Таким чином, одержуємо конструкцію K-ультраметризації простору ідемпотентних мір з компактними носіями (див. [10]).

Важливими прикладами рівномірно K-ультраметричних просторів є $(K + \varepsilon)$-дискретні простори, тобто метричні простори, що задовольняють умову: $d(x, y) \geq K + \varepsilon$ для кожних $x, y \in X$, $x \neq y$. Метрика на $I(X)$ для $(K + \varepsilon)$-дискретного простору (X, d) задається формулою: $d_K(\mu, \nu) = \max\{d_{HZ}(\mu, \nu), K + \varepsilon\}$, якщо $\mu \neq \nu$. Отриманий метричний простір знову є $(K + \varepsilon)$-дискретним.

Нагадаємо, що через P позначається функтор ймовірнісних мір на категорії $\mathbf{UUMET}_K$ (див. [9]).

Теорема 4 *Функтори I та P на категорії $\mathbf{UUMET}_K$ не ізоморфні.*

Доведення Ми модифікуємо приклад з статті [6]. Нехай

$$X = \{a, b\},\ Y = \{c, d\},\ Z = \{(a, c), (a, d), (b, d)\} \subset X \times Y.$$

Вважаємо, що відстані між попарно різними точками у просторах X, Y, Z рівні 1. Нехай $p_1\colon Z \to X$ та $p_2\colon Z \to Y$ — обмеження проектування на перший і другий співмножник відповідно. Тоді пара відображень $P(p_1), P(p_2)$ розділяє точки у множині $P(Z)$. Водночас, це не так для пари $I(p_1), I(p_2)$. Справді, нехай

$$\mu = 0 \odot \delta_{(a,c)} \oplus (-1) \odot \delta_{(a,d)} \oplus 0 \odot \delta_{(b,d)},\ \mu = 0 \odot \delta_{(a,c)} \oplus (-2) \odot \delta_{(a,d)} \oplus 0 \odot \delta_{(b,d)}.$$

Тоді

$$I(p_1)(\mu) = I(p_1)(\nu) = 0 \odot \delta_a \oplus 0 \odot \delta_b,\ I(p_2)(\mu) = I(p_2)(\nu) = 0 \odot \delta_c \oplus 0 \odot \delta_d.$$

4 Зауваження

У асимптотичній топології відомі твердження про те, що кожен метричний простір еківалентний, як у сенсі категорії $\mathcal{A}$ (асимптотичної категорії Дранішникова), так і в сенсі так званої грубої категорії Роу [4] дискретному метричному просторові. Це дасть змогу застосувати результати попереднього параграфа до вивчення функторіальних конструкцій у асимптотичній топології.

Існує метризація Прохорова функтора ймовірнісних мір, а також аналогічна до неї метризація функтора напівнеперервних згори ємностей [8]. Ці метризації породжують K-ультраметризації функторів ймовірнісних мір та напівнеперервних згори ємностей відповідно.

Література

1. L. Bazylevych, D. Repovš, M. Zarichnyi, *Spaces of idempotent measures of compact metric spaces.* - Topol. Appl., 157 (2010), P. 136–144.
2. O. Hubal', *Capacity functor on the category of ultrametric spaces.* - Mat. Stud. 32 (2009), P. 132–139.
3. O. Hubal, M. Zarichnyi, *Idempotent probability measures on ultrametric spaces.* - J. Math. Anal. Appl. 343 (2008), no. 2, P. 1052–1060.
4. А. Н. Дранишников, *Асимптотическая топология.* - УМН, 55:6(336) (2000), С.71–116.
5. Г. Л. Литвинов, *Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение.* - Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII, Зап. научн. сем. ПОМИ, 326, ПОМИ, СПб., 2005, 145–182
6. М. М. Заричный, *Пространства и отображения идемпотентных мер.* - Изв. РАН. Сер. матем., 74:3 (2010), С. 45–64.

7. M. Zarichnyi, *Spaces of measures related to dequantization.* - J. Phys. Stud. 11(1) (2007), P. 34—40.
8. М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин, *Функтор емкостей в категории компактов.* - Матем. сб., 199:2 (2008), С. 3—26.
9. О. Савченко, *Функтори на категорії -ультраметричних просторів .* - Математичний вісник НТШ., 8 (2011), С. 100–110.
10. О. Г. Савченко, *Ідемпотентні міри і -ультраметричні простори.* - Праці міжнародного геометричного центру, 4:1 (2011), С. 42–49.
11. В. В. Федорчук, *Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия.* - УМН, 36:3(219) (1981), С. 177-–195.
12. В. В. Федорчук, *Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов.* - Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:2 (1990), С. 396—417.
13. А. Чигогидзе, *О продолжении нормальных функторов.* - Вестник Московского Университета. Серия мат.-мех. – 6 (1984), С. 23-—26.

Л. Є. Базилевич

Національний університет “Львівська політехніка”,

Львів, вул. Степана Бандери, 12; E-mail: izar@litech.lviv.ua

М. М. Зарічний

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, вул. Університетська, 1; E-mail: mzar@litech.lviv.ua

О. Г. Савченко

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, вул. Університетська, 1; E-mail: mzar@litech.lviv.ua

L.E. Bazylevych

National University “Lviv Polytechnica”, Lviv, Stepana Bandert Str 12

M.M. Zarichnyi

Lviv Ivan Franko National University, Lviv, Universytetska Str 1

A.G. Savchenko

Kherson State Agrarian University, Kherson, Rozy Lyuksemburg Str 23

Metrizable functors and K-ultrametrics

The notion of K-ultrametric space is intermediate between that of metric space and of ultrametric (non-Archimedean) space. We describe a general construction of K-ultrametrization for metrizable functors in the sense of V.V. Fedorchuk.

Quantum Geometry: Quantization of quasistationary states of the Dirac-Kohn-Sham equation in heavy ion collision problem

O.Yu. Khetselius

Abstract An advanced approach to quantization of the quasi-stationary states of the Dirac-Kohn-Shan equation in the heavy ion collision problem is proposed and based on the consistent unified quantum mechanical operator perturbation theory and gauge-invariant quantum-electrodynamical description. An effective numerical procedure for determination of the electron-positron pair production cross-section during the ions collision is presented. The illustrative results for for cross-sections of the U–U collision with using the two-pocket nuclear potential are listed and compared with other data.

Keywords Quantum geometry · Dirac-Kohn-Sham equation · collision problem · Quantization of quasi-stationary states

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

A development of the consistent methods of calculating a spectra of energy eigen values, sets of the eigen functions, different spectral and dynamical parameters (collision cross-section, decay probabilities etc) for relativistic Hamiltonian of the heavy relativistic many-body systems with direct, consistent account of the relativistic and nuclear effects is still actual and fundamentally important problem of the modern quantum geometry and relativistic quantum theory of the many-fermion systems (see, for example, [1]–[15]). Especial interest attracts solving this problem in theory of relativistic many-body systems collision, such as collision of heavy ions (nuclei). Here it is very important a development of the consistent procedures for quantization of the quasi-stationary states of the corresponding relativistic equation (such Dirac equation etc) and elaboration an effective numerical procedures for determination of the decay probability, collision cross-sections etc. Let us remind (see, e.g., [2]–[9]) that upon collisions of heavy atomic ions (nuclei) the electron–positron pair production (EPPP) is allowed for the collision energy $E > 1$ MeV . That's why the energy region close to the Coulomb barrier (it corresponds to the energy of several MeV per nucleon) is of a great interest. Naturally the cross-section $\sigma(\varepsilon, E)$ of this process depends on the collision energy E and the positron energy ε. Presently such collisions are under extensive theoretical and experimental study (see, for example, [4]–[9] and references therein). Especial attention attract the narrow peaks in the differential cross-section $d\sigma(\varepsilon, E)/d\varepsilon$. The nature of these peaks has not yet any acceptable reasonable interpretation. Generally speaking [1]–[9], the positron spectrum structure can be related with the resonances phenomena of different nature (resonances in the residual electron shell of colliding ions or resonances of the compound nucleus which is created by the colliding nuclei or resonances of new non-identified particles etc.). In general it should be noted [14] that the modern physics of the heavy atoms inner shells deals with the processes which energy and time scales are comparable with those of the low-energy nuclear processes. As the result, the interaction of the inner nuclear and electronic degrees of freedom open new reaction channels in both subsystems or leads to appreciable corrections to observable. The correct description of these processes requires an using the consistent quantum–mechanical theory of the complicated compound-like system taking into account the quantum-electrodynamical (QED) properties of the electron subsystem. Besides, to get the adequate results concerning the collision process one must perform the accurate modelling of inner-nuclear dynamics. Moreover, even a little variation of parameters of the inter-nuclear potential within the reasonable limits can lead to qualitative changing of positron spectra. In refs. [5]–[9] the heavy ion collision process has been theoretically studied on the basis of the operator perturbation theory and QED treating the electronic subsystem with using the Dirac-Fock equation. The nuclear subsystem and electron subsystem have been considered on the equal foot as two parts of the complicated system interacting one with another through the model potential. According to [5]–[9], the solution of the total electron-nuclear system quantum–mechanical equation is based on the formally exact perturbation theory with the zeroth order Hamiltonian H of the total system being determined by its energy spectrum and the set of the eigenfunctions without specifying analytic form of zero order potential. More details concerning the general formulation of the operator perturbation theory in non-relativistic and relativistic versions can be found in Refs, [9]–[12]. All the spontaneous decay or the new particle (particles) production processes are excluded in the zero order. The approach treats the widely known distorted waves approximation as the zeroth order approximation in the formally exact quantum–mechanical perturbation theory allowing for successive refinement of calculations. In this paper, which goes on our investigations [8], [13]–[15] we will propose an advanced approach to quantization of the quasi-stationary states of the Dirac-Kohn-Shan equation (the electronic subsystem) in the heavy ion collision problem within an advanced operator perturbation theory and gauge-invariant QED description and develop an effective numerical procedure for determination of the EPPP cross-section. The illustrative results for the differential cross-sections of the U–U (total nuclear system charge being $Z = 184$) collision energies E_1 (E_1 =162.0 keV – the third s-resonance and E_1 =247.6 keV – the fourth s-resonance) are listed and are in a reasonable agreement with the one-pocket nuclear potential results by Ivanov et al and two-pocket potential results by Glushkov et al [5]–[8].

2 Energy approach to calculation of the EPPP cross section

The formulae of EPPP' cross-section can be obtained on the basis of the energy approach [5]–[9]. As in refs. [5]–[8], a one-center model is chosen as a zero-order approximation. The energy approach allows using the well developed stationary-state methods to the collisional problem with variable number of particles. Moreover, an approach to quantization of the quasi-stationary states for any corresponding relativistic equation can be naturally reformulated. Below we at first use the Dirac-Kohn-Shan equation to treat the electronic subsystem dynamics. in principle the similar equations with the corresponding interaction potential can be used in treating the nuclear subsystem. Then within formulated scheme the determination of the EPPP cross-section can be reduced to the solution of the ordinary differential equation system [9]. The latter includes: (i) equations for the potentials $V(R)$, $U(r)$ (internuclear potential and electric potential of the compound nucleus), (ii) relativistic quantum–mechanical equations for nuclear system– and electron system–state functions, equations for all matrix elements of perturbation theory. The non-stationary feature of our problem manifests itself in the way of the normalization of the nuclear system initial state function and in the principle of the electron system bound state quantization when this state dives into the lower continuum. The motion of nuclear system is described

Table 1 Energies E and width Γ of s-resonances of the compound U–U nucleus, generated by the potential V

E, keV	25.9	85.8	162.0	247.6	225.2
Γ, eV	0.20×10^{-3}	0.12×10^{-1}	0.86	0.42×10^{2}	0.16×10^{4}

by the Dirac-Kohn-Sham equation whose radial part is represented by

$$\begin{aligned} F' &= -F(\kappa + |\kappa|)/T - G(E + 2M\tilde{\alpha}^{-2} - V)\tilde{\alpha}, \\ G' &= G(\kappa - |\kappa|)/T + F(E - V)\tilde{\alpha}, \end{aligned} \tag{1}$$

where κ is the Dirac angular quantum number, E is the state energy, F, G being the large and small radial components correspondingly. The two-pocket nuclear potential $V(R)$ is in further used. It is defined by the following differential equation [10]:

$$dV(R) = z \times (R_B/2 - R) \times (3R_B/4 - R) \times (R_B - R) \times R^3(V_B + 8R^8). \tag{2}$$

This potential has the same asymptotics at $R \to 0$, $R \to \infty$ as the one-pocket potential used in calculation [5]–[7]. Further, as usually, the model parameters are found from the physical conditions: potential generates five S-resonances, the difference $V(R_B) - V(\infty)$ coincide with the experimental energy of the near-barrier collision. It is supposed that $R_B = R_U \approx 6$ fm (radius of compound nucleus charge distribution). It corresponds to the internuclear distance $2R_B \approx 12$ fm. The potential generates the under-barrier s-resonances, whose positions and level widths are listed in the Table 1 (from Refs.[5]–[7]). The widths of the nuclear subsystem states, related to the purely nuclear process, were calculated by the same method as the width of the quasi-stationary state of the electron-positron vacuum with a dived atomic level.

The correct procedure has been proposed by Ivanov- et al [5]–[7], [9] and is in the following. In zeroth order of perturbation theory it is used the Hamiltonian generating the same energy spectrum as the potential $V(R)$ but possessing only stationary states. Further note that contrary to the case of the stationary states we use the alternative principle of quantization of the quasi-stationary stales, however as we use the another type of relativistic equation , its realization has some specificities in comparison with similar methodics [5]–[7]. The final scheme includes the following steps. At the first step we suppose that the trial nuclear subsystem state energy to be E and preset the function norm by the condition $F(T = 0) = 1$. Secondly, we will integrate the system (1) under this conditions up to asymptotically large T with the simultaneous evaluation of the norm of the state function for the asymptotically free motion:

$$X(E) = \lim_{T \to x} T^{2|x|}((E + 2M\tilde{\alpha}^2 - V)G^2 + (E - V)F^2). \quad (3)$$

Thirdly, we realize the minimization procedure of the value X as a function of state energy E. We suppose that the stationary points of E correspond to the resonances of the system. The quantization principle for the electron slate dived into continuum is described in Refs. [4]–[7] . In fact the principle is equivalent to the principle of the quantization in the case of potential $V(R)$ with a barrier. The main difference is that the role of the potential plays here another function:

$$U_{eff} = (\epsilon s + 2\tilde{\alpha}^2 - U)(\epsilon s - U). \quad (4)$$

The effective potential has two turning points T_1, T_2, dividing the whole integration region into three parts, where $U < \epsilon s$ $(T < T_1)$, $\varepsilon s < U < \epsilon s + 2\tilde{\alpha}^2$ $(T_1 < T < T_2)$, and $U > \epsilon s + 2\tilde{\alpha}^2$ $(T > T_2)$.

The quasi-stationary state function must decrease in the second region and oscillate in the third one. The quantization principle implies the minimization of the following function of the trial electron system energy

$$\lim_{T \to \infty} T^{2|x|}((\varepsilon s + 2M\tilde{\alpha}^{-2} - U)G^2 + (\varepsilon s - U)F^2). \quad (5)$$

When having found state energy $\varepsilon(1s)$ one must define all the ES' state functions for the zero-order potential U_0. All the level positions in the potential U_0 coincide with those in the potential of the compound nucleus electric field U. Functions of all states above the lower continuum are preserved too, the restructuring concerns only the $1s$-state and the lower continuum states.

According to the energy approach, the cross-section of the EPPP is directly determined by the imaginary part of energy of the system. In the lowest perturbation theory order the second-order diagram describing the polarization of the electron-positron vacuum is determined as follows ([5]–[9]):

$$\mathrm{Im}E = -\Gamma/2 = \mathrm{Im}\Sigma(M_{1s,1,F,\varepsilon s})^2/(E_F + \varepsilon(ns) - E_1 - \varepsilon s). \quad (6)$$

The differential cross-section is as follows:

$$d\sigma(\varepsilon, E)/d\varepsilon = \pi(M_{1s,1,F,\varepsilon s})^2(dP_F/dE_F),$$

where P and E are the momentum and energy of the nuclear system final state. The details of numeric procedure are described in refs. ([8]–[15])

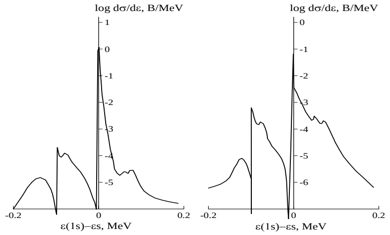

Fig. 1 The differential cross-section $d\sigma(\varepsilon s, E_1)/d\varepsilon s$ plotted against $\varepsilon(1s) - \varepsilon s$ (in B/MeV) for the nuclear subsystem collision energies: (a) $E_1 = 162.0$ keV; (b) $E_1 = 247.6$ keV.

3 Results and conclusion

In Ref. [8] we have presented the results of calculation of the differential cross-section for the nuclear subsystem collision energy $E_1 = 352.2$ keV (fifth upper s-resonance). Here we consider calculation results for the differential cross-section $d\sigma(\varepsilon s, E_1)/d\varepsilon s$ (plotted against $\varepsilon(1s) - \varepsilon s$, in B/MeV) for the nuclear subsystem collision energies E_1: (a) $E_1 = 162.0$ keV (the third s-resonance) and (b) $E_1 = 247.6$ keV (the fourth s-resonance). The main difference of present calculation from analogous calculations [5]–[8] is provided by the following moments. Firstly, we have used the Dirac-Kohn-Sham equations in order to describe the electron subsystem dynamics. Besides, we have used the two-pocket nuclear potential and more correct procedure for account of the perturbation theory higher-order diagrams, describing the additional attraction in the final state of the nuclear subsystem due to the bound electrons. The calculation results for $d\sigma(\varepsilon, E_1)/d\varepsilon$ at two different collisional energies $E_1 < V_B$ are presented in Fig. 1. The analysis of our data and comparison with the similar results of Refs. [5]–[8] shows that in a whole the cross-sections details of the both calculations are coincide with besides appearance of some additional peaks. from other side, using the Dirac-Kohn-Sham equations to the electronic and possibly nuclear subsystem has a great advantage under studying the heavy multi-electron ions collision, which is surrounding by the EPPP. In the calculational aspect this equation is significantly more simple in comparison with other relativistic equations.

Acknowledgement. The author would like to thank Prof. A.Glushkov for useful discussion and critical comments.

References

1. Aumayr, F., Winter,H., eds. : Photonic, Electronic and Atomic Collisions – Singapore, World Scientific (1997), 650p.
2. Gryb, A., Mamaev, S. and Mostepanenko, V. : Quantum Effects in Intensive External Fields – Moscow, Nauka (1980), 280p.

3. Oberacker, V., Soff, G. and Greiner, W.: Internal Pair Formation Following Coulomb Excitation of Heavy Nuclei – Phys.Rev., **36** (1976), P.1024-1027.
4. Zagrebaev, V., Oganessian, Yu., Itkis, M. and Greiner, W. : Superheavy nuclei and quasi-atoms produced in collisions of transuranium ions – Phys.Rev., **C73** (2006), P.031602 (12p.).
5. Ivanov, L., Zueva, T. : Electron-positron pair production in heavy atomic nucleus collisions. Consistent quantum-mechanical approach – Phys. Scripta., **43** (1991), P.368-373.
6. Ivanov, L. and Glushkov, A. : An advanced energy approach to electron-positron pair production in heavy ions collisions – Preprint ISAN (Moscow-Troitsk)., **AS-5** (1991), 12p.
7. Glushkov, A. : Energy Approach to resonance states of compound super-heavy nucleus and EPPP in heavy nucleus collisions – Low Energy Antiproton Phys., AIP Serie., **796** (2005), P.206-210.
8. Glushkov, A. and Khetselius, O. : Resonance states of compound super-heavy nucleus and EPPP in heavy ions collisions: Advance energy approach – Preprint OSENU (Odessa)., **M1** (2012), 8p.
9. Glushkov, A., Ivanov, L. and Ivanova, E: Radiation decay of atomic states: Generalized energy approach – Autoionization phenomena in atoms – Moscow, Moscow State Univ. (1986), P.58-160.
10. Glushkov, A. and Ivanov, L.: Radiation decay of atomic states: Atomic residue and gauge non-invariant contributions – Phys. Lett.A., **170** (1992), P.33-37.
11. Glushkov, A. and Ivanov, L. : DC Strong-Field Stark-Effect: New consistent quantum-mechanical approach – J.Phys.B: At.Mol.Opt. Phys., **26** (1993), P.L379-386.
12. Glushkov, A. : Advanced relativistic energy approach to radiative decay processes in multielectron atoms and multicharged ions – Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications. Ser.: Frontiers in Theor. Phys. and Chem. (Springer)., **26** (2012) P.231-252.
13. Khetselius, Yu.: Relativistic calculating the hyperfine structure parameters for heavy-elements and laser detecting the isotopes and nuclear reaction products – Phys. Scripta., **T135** (2009) P.014023 (6p.).
14. Khetselius, Yu.: Relativistic energy approach to cooperative electron-gamma-nuclear processes: NEET Effect – Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications. Ser.: Frontiers in Theor. Phys. and Chem. (Springer)., **26** (2012) P.217-230.
15. Khetselius, Yu.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasistationary states of Dirac equation for superheavy ion and calculating hyperfine structure parameters – Proc. of Internat. Geometry Center, **5**,N3(2012) P.39-45.

O.Yu. Khetselius

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.

E-mail: nuckhet@mail.ru

An advanced approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Slater equation

Yu.G. Chernyakova, Yu.V. Dubrovskaya, T.A. Florko, A.V. Romanova, L.A. Vitavetskaya

Abstract An advanced procedure for quantization of the quasi-stationary states of the relativistic Dirac-Fock equation with a local potential is developed within a gauge-invariant relativistic many-body perturbation theory ([1], [2]). New numerical local Dirac-Fock approach to calculating spectra of the quantum (atomic) systems with an account of relativistic and exchange-correlation corrections is presented. Numerical test results are presented.

Keywords Dirac-Slater equation · Quasi-stationary states · Eigen functions and eigen values of energy

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

As it is known ([1]–[7]), the problems of calculating the eigen values and eigen functions of the the different quantum operators is relating to a number of the most important and actual problems of the modern quantum geometry and quantum theory of the many-body systems. In this paper we present an advanced procedure for quantization of the quasi-stationary states of the relativistic Dirac-Fock equation with introduced local Dirac-Fock potential. All consideration, as usually, is performed within gauge-invariant relativistic many-body perturbation theory ([2], [3],[7]-[10]). In our previous papers [7]-[12] the same task has been considered for a few classes of the relativistic differential equations (Dirac, Dirac-Kohn-Sham, Dirac-Slater etc). The developed approaches have been tested on calculating a set of the energy and spectral parameters for different multi-electron systems.Here we consider the Dirac-Fock equation with a local potential. The main difference of these equations of the standard Dirac-Fock ones is that the standard equation contain non-local potential and correspondingly the calculational scheme of their solving is very complicated because of the cited non-locality (the exchange interaction term). The more details about the modern art of state concerning calculating the eigen values of energies and eigen functions for different operators (Hamiltonians) of the finite quantum (atomic) systems can be found in a number of recent books (see, for example,[1]–[7] and references therein)). we can remind such atomic multi-configuration Dirac-Fock codes as the Desclaux program, Dirac package etc (see for example, [1]–[10]). The main idea of our approach is in using the local Dirac-Fock equations, i.e. using sufficiently simplified procedure for an account of relativistic, exchange-correlation effects. The general potential in these equations includes the self-consistent local mean field potential, the electric of a nucleus (within the Fermi model). New element of the approach is connected with using ab initio consistent quantum electrodynamics approach to construction of the optimal one-quasiparticle representation in the local Dirac-Fock approach.

2 Local Dirac-Fock equation: quantization of the quasistationary states

In this section we describe the key moments of our approach to quantization of the quasistationary (stationary) states of the relativistic local Dirac-Fock equation which is indeed very similar to schemes of Refs.[7]-[10]), however contains other potentials.

One-particle wave functions are found from solution of the relativistic local Dirac-Fock equation, which can be written in the central field in a two-component form (see, for example,([1], [5]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} + (1+\chi)\frac{F}{r} - (\epsilon + m - V_{loc}(b,r))G = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial r} + (1-\chi)\frac{G}{r} - (\epsilon - m - V_{loc}(b,r))F = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

where all notations are standard, b is the special gauge-invariant parameter (look below).Here we put the fine structure constant $\alpha = 1$. The moment number

$$\chi = \begin{cases} -(1+1), & j > 1 \\ \quad 1, & J < 1 \end{cases} \tag{2}$$

The general potential $V_{loc}(b, r)$ includes the self-consistent local Dirac-Fock potential (see, for example,([5], [11])). Further, as usually, (see [2],[7]), at large χ the radial functions F and G vary rapidly at the origin of co-ordinates:

$$F(r), G(r) \approx r^{\gamma-1}, \qquad \gamma = \sqrt{\chi^2 - \alpha^2 Z^2}. \tag{3}$$

This involves difficulties in numerical integration of the equations in the region $r \to 0$. To prevent the integration step becoming too small it is convenient to turn to new functions isolating the main power dependence: $f = Fr^{1-|\chi|}$, $g = Gr^{1-|\chi|}$. The Dirac equation for F and G components are transformed as (in the Coulomb units):

$$f' = -(\chi + |\chi|)\frac{f}{r} - \alpha Z V_{loc}(b, r) g - \left(\alpha Z E_{n\chi} + \frac{2}{\alpha Z}\right) g,$$
$$g' = (\chi - |\chi|)\frac{g}{r} - \alpha Z V_{loc}(b, r) f + \alpha Z E_{n\chi} f. \tag{4}$$

Naturally, the system of Eq. (4) has two fundamental, solutions. As usually, we are interested in the solution regular at $r \to 0$. The boundary values of the correct solution are found by the first term s of the expansion into the Taylor series (see [2]):

$$g = \frac{(V_{loc}(0) - E_{n\chi}) r \alpha Z}{2\chi + 1}; \qquad f = 1 \quad \text{at} \quad \chi < 0,$$
$$f = \left(V_{loc}(0) - E_{n\chi} - \frac{2}{\alpha^2 Z^2}\right) \alpha Z; \qquad g = 1 \quad \text{at} \quad \chi > 0. \tag{5}$$

The condition $f, g \to 0$ at $r \to \infty$ determines the quantified energies of the state $E_{n\chi}$. At correctly determined energy $E_{n\chi}$ of the asymptotic f and g at $r \to \infty$ are:

$$f, g \sim \exp\left(-r/n^*\right), \tag{6}$$

where $n^* = \sqrt{\frac{1}{2|E_{n=\chi}|}}$ is the effective main quantum number. The Eq.(4) was solved by the Runge-Kutt method (see details in ([1], [5]).

Regarding the nuclear potential of the local Dirac-Fock equation, as in Refs.([2], [7]) we use the Gauss model for the charge distribution in the nucleus $\rho(r)$. According to [2] one could write:

$$\rho(r|R) = \frac{4\gamma^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma r^2);$$
$$\int_0^\infty dr r^2 \rho(r|R) = 1; \tag{7}$$
$$\int_0^\infty dr r^3 \rho(r|R) = R,$$

where $\gamma = frac4\pi R^2$, R is the effective nucleus radius. The following simple dependence of R on Z assumed:

$$R = 1.60 \cdot 10^{-13} Z^{1/3} \quad \text{(cm)}. \tag{8}$$

The Coulomb potential for the spherically symmetric density $\rho(r|R)$ is:

$$V_{\text{nucl}}(r|R) = -\frac{1}{r}\int_0^r dr' r'^2 \rho(r'|R) + \int_r^\infty dr' r'^2 \rho(r'|R). \tag{9}$$

It is determined by the following system of differential equations ([1], [5]):

$$\begin{aligned} V_{\text{nucl}}(r,R) = \frac{1}{r^2}\int_0^r dr' r'^2 \rho(r',R) \equiv \frac{1}{r^2} y(r,R); \\ y'(r,R) = r^2 \rho(r,R); \\ \rho'(r,R) = -8\gamma^{5/2}\frac{r}{\sqrt{\pi}}\exp(-\gamma r^2) = -2\gamma r \rho(r,R) = -\frac{8r}{\pi r^2}\rho(r,R) \end{aligned} \tag{10}$$

with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} V_{\text{nucl}}(r,0) = -\frac{4}{\pi r}; \\ y(0,R) = 0; \\ \rho(0,R) = \frac{4\gamma^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{R^3}. \end{aligned} \tag{11}$$

The above written equations and a whole scheme determine a procedure for quantization of the quasi-stationary states of the relativistic Dirac-Fock equation with introduced local Dirac-Fock potential. The key question of any approach is performance of the gauge-invariance condition, by checking, for example, the Yord equalities.Naturallu it requires a construction of the corresponding Green's function of thew Dirac-Fock equations. More efficient and simultaneously simplified recept is connected with calculating the radiation transition probabilities (oscillator strengths)in two different transition operator (length and velocity) forms using the basis of the relativistic Dirac-Fock wave functions, in our case the local Dirac-Fock scheme. Earlier it was shown ([2], [3]) that an adequate description of the atomic characteristics requires using the optimized basis of wave functions. In Ref. [3] a new ab initio optimization procedure for construction of the optimized basis is proposed. It is reduced to minimization of the gauge dependent multielectron contribution $Im\Delta\ E_{ninv}$ of the lowest quantum-electrodynamical perturbation theory corrections to the radiation widths of atomic levels. In the fourth order of quantum-electrodynamical perturbation theory(the second order of the atomic perturbation theory) there appear the diagrams, whose contribution to the $Im\Delta\ E_{ninv}$ accounts for the correlation (polarization) effects (see, e.g., [2]). This contribution describes the collective effects and it is dependent upon the electromagnetic potentials gauge (the gauge non-invariant contribution). All the gauge non-invariant terms are multielectron by their nature (the particular case of the gauge non-invariance manifestation is a non-coincidence of the oscillator strengths values, obtained in the approximate calculations with the "length" and "velocity" transition operator forms). The corresponding expression for the imaginary part of the electron energy has been determined in Ref. [3]. We have performed the simplified numerical test in order to check the optimality properties of the wave functions by means the minimization of the value $Im\Delta\ E_{ninv}(b)$ with the parameter b. Our test has been carried out for the radiative 3s-3p transitions in spectra of the sodium-like ions SVI and $ClVII$. The empirical values of the oscillator strengths for these ions are : 0.66 ± 0.01 and 0.604 ± 0.015. The calculation results within the local Dirac-Fock scheme (without account of the correlation effects) are 0.69 and 0.64 correspondingly (here the gauge non-invariant contribution is 10 percents). The calculation result within the local Dirac-Fock scheme (with account of the correlation effects by means of the method [3]) are 0.663 and 0.608 correspondingly. In the last case, the gauge non-invariant contribution is 0.1 percents. This numerical result has shown that our approach (without an accounting the correlation effects) can hardly provide a high (spectroscopic) accuracy, however, an implementation of the correct multi-body correlation potentials into the local Dirac-Fock equations and using the formalism of the relativistic perturbation theory with the local Dirac-Fock potential will provide a sufficiently high accuracy of calculating the energy and spectral characteristics of the multi-electron atomic systems.

3 Conclusions

In conclusion let us underline that we have proposed a new procedure for quantization of the stationary and quasistationary states of the relativistic Dirac-Fock equation with a local potential within a gauge-invariant relativistic many-body perturbation theory ([2], [3]). Further we presented a numerical local Dirac-Fock approach to calculating spectra of the quantum (atomic) systems with an account of relativistic and exchange corrections. Within a propose scheme we have carried out the test calculation of the oscillator strengths for the radiative 3s-3p transitions in spectra of the sodium-like ions SVI and $ClVII$, which shown that the local Dirac-Fock approach without an accounting of the correlation effects can hardly provide a high accuracy of calculating the energy and spectral characteristics (oscillator strengths)of the multi-electron atomic systems. However, an implementation of the correct multi-body correlation potentials into it and using the formalism of the relativistic perturbation many-body theory with the local Dirac-Fock potential can provide a spectroscopic accuracy.

Acknowledgement. The authors are very thankful to Prof. A.V.Glushkov for useful discussion and critical comments.

References

1. Grant, I.: Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules –Oxford (2008), 650p
2. Glushkov, A. : Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems – Odessa, Astroprint (2008), 700p.
3. Glushkov, A., Ivanov, L.: Radiation decay of atomic states: Atomic residue and gauge non-invariant contributions – Phys. Lett.A., **170** (1992), P.33-37.
4. Parpia, F., Froese-Fischer, C., Grant, I.: Generalized relativistic atomic structure package: GRASP – Comp.Phys.Commun., **94** (1996), P.249-270.
5. Yerokhin, V., Artemyev, A., Shabaev, V.: QED treatment of electron correlation in Li-like ions – Phys.Rev.A., **75** (2007), P.062501 (12p.).
6. Safronova, U., Safronova, M.: Third-order relativistic many-body calculations of energies, transition rates, hyperfine constants, and blackbody radiation shift – Phys. Rev. A., **79** (2009), P.022512.
7. Glushkov, A., Khetselius, O., Florko, T. et al : Gauge-invariant QED perturbation theory approach to calculating nuclear electric quadrupole moments, hyperfine structure constants – Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics. Berlin, Springer, **18** (2008), P.504-522.
8. Florko, T.: Quantum Geometry : New numerical approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Slater equation – Proc. Int. geometry Center., **5**, N3 (2012) P.32-38.
9. Khetselius, Yu.: Relativistic perturbation theory calculation of the hyperfine structure parameters for some heavy-element isotopes – Int. Journ. of Quantum Chem., **109** (2009) P.3330-3335.
10. Khetselius, O.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasistationary states of Dirac equation for superheavy ion and calculating hyperfine structure parameters – Proc. Int. Geometry Center., **5**, N3 (2012) P.39-45.
11. Kruglyak, Yu., Korchevsky, D., Chernyakova, Yu., Florko, T.: Relativistic Dirac-Fock model approach to studying Fe plasma emission spectra in a low inductive vacuum spark – Photoelectronics., **21** (2012) P.60-62.
12. Kuznetsova, A., Kvasikova, A., Shakhman, A., Vitavetskaya, L.: Calculating the radiative vacuum polarization con-tribution to the energy shift of 2p-2s transition in muonic-hydrogen – Photoelectronics., **21** (2012) P.66-67.

Yu.G. Chernyakova, Yu.V. Dubrovskaya, T.A. Florko, A.V. Romanova, L.A. Vitavetskaya

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.

E-mail: quantche@mail.ru

Жесткость замкнутых выпуклых полиэдров

Анатолий Дмитриевич Милка

Аннотация Рассматривается Теорема Лежандра и Коши о жесткости замкнутых выпуклых полиэдров, определившая современное научное направление "Геометрия в целом". Опровергается популярная в прошлом столетии версия Штейница об ошибке, допущенной авторами в ее доказательстве. Список евклидовских "Начал" , в аксиоматических Определениях которых Лежандр увидел эту Теорему, отличается от восстановленного Гейбергом Оригинала "Начал". Список включает неполный и исправленный Вариант содержащейся в Оригинале предельно общей Теоремы о жесткости полиэдров, открытой профессиональными математиками задолго до времени Александрии и Афин. В статье доказывается эта Общая Теорема, названная Теоремой Евклида, и находятся ее естественные аналоги в сферическом, гиперболическом и де Ситтера пространствах. Статья продолжает работы автора: *Что такое геометрия "в целом"?* – Москва: Знание, 12, 1986, 32 с.; *Неопознанная египетская геометрия* // Proc. Int. Geom. Center, 2008, т.1, в.1-2, с.97-115; *Истоки и содержание аксиоматики "Начал"* // Proc. Int. Geom. Center, 2009, т.2, в.3, с.41-54; *Unidentified Egyptian Geometry* // Europ. J. of Combin., 2010, v.31, p.1065-1071.

Ключевые слова Изгибания, жесткость полиэдров, теорема Лежандра и Коши, теорема Евклида, теоремы Александрова и Минковского.

УДК 514

Вдохновение
Нужно в поэзии
Как и в геометрии
А.С. Пушкин

Памяти Вениамина Федоровича КАГАНА

1. Код Лежандра и Коши

В теории Лежандра и Коши о жесткости замкнутых выпуклых полиэдров есть два ключевых Предложения об изгибаниях плоских и сферических полигонов [1, 1794; 2, 1812]. Почти столетие геометры уделяли этим Предложениям особое внимание. Изложим первое Предложение вместе с доказательством, которыми открывается знаменитый мемуар Коши:

"**Лемма 1.1.** *Если в треугольнике ABC, плоском или сферическом, сохраняя длины сторон AB и BC, увеличить угол B, заключенный между этими сторонами, то противоположная сторона треугольника AC увеличится.*

Теорема 1.1. *Если в выпуклом полигоне $ABCDEFG$, плоском или сферическом, сохраняя длины сторон AB, BC, ... FG, увеличить одновременно углы B, C,... F, заключенные между этими сторонами, то замыкающая хорда полигона AG увеличится.*

Доказательство. Пусть увеличится один угол B; тогда увеличится угол ABG; значит, увеличится хорда AG. Аналогично можно увидеть, что при последовательном увеличении углов C, D, ... F хорда AG всегда увеличивается. Одновременное увеличение всех углов дает тот же эффект, что и их последовательное увеличение, рассматриваемая хорда AG только возрастает".

Доказательство не сопровождается надлежащим рисунком, и в сороковые годы немецкий математик Штейниц нашел у Лежандра и Коши ошибку [3, 1934]. Изогнутый полигон может оказаться невыпуклым, монотонное возрастание замыкающих хорд изогнутых полигонов будет нарушено, доказательство потеряет силу. Эта версия, начиная с Адамара, до последнего времени поддерживалась ведущими геометрами [4, 2004]. Интуитивно полагалось, что авторы непосредственно применяют цитированную Лемму. Но второе и третье предложения доказательства Теоремы, да и ее формулировка, ставшие для Штейница закрытым Кодом, свидетельствуют об обратном. Лежандр и Коши, глубже вникая в проблему, применяют Лемму опосредствованно, удобно представляя лишь первый шаг доказательства. Они прямо сравнивают замыкающую хорду каждого изогнутого полигона с хордой AG, характер возрастания хорд и выпуклость изогнутых полигонов их не интересуют. Из первого предложения только следует, что изгибание полигона осуществляется в плоскости и при сохранении локальной выпуклости; полигон называется локально выпуклым, если все его углы обращены относительно полигона в одну и ту же сторону.

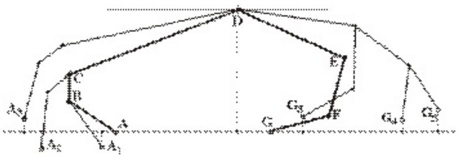

Рис. 1a

На Рис. 1a показаны исходный выпуклый и изогнутые локально выпуклые полигоны с общей фиксированной вершиной D, наивысшей из вершин полигонов над прямой AG. Очевидно, проекция на прямую AG замыкающей хорды каждого изогнутого полигона с избытком покрывает хорду AG. Так что действительно "хорда AG только возрастает". Образно говоря, в рассматриваемой конфигурации концы изогнутых полигонов располагаются ближе к "бесконечности" у прямой AG, чем концы хорды AG. Этим простым эффектным приемом и доказывается Теорема.

Версия Штейница не верна, доказательство Лежандра и Коши безупречно. Иллюстративный Рис. 1a точно соответствует авторскому тексту. Авторскому тексту соответствует и приведенное ниже доказательство для сферических полигонов; напомним, что именно вариант сферы требуется в решении проблемы о жесткости полиэдров, которая интересовала Лежандра и Коши.

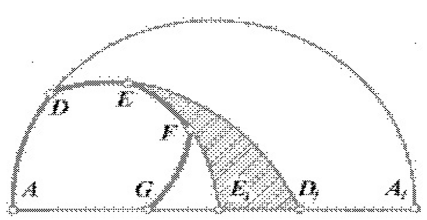

Рис. 1b

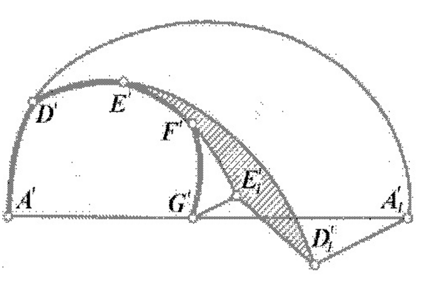

Рис. 1c

Доказательство Теоремы для изгибаний полигонов на сфере $ADEFG \to A'D'E'F'G'$, где Лемма применяется к внешним углам полигонов, изложено в брошюре автора [5, 1986]; его интерпретируют Рис. 1b и Рис. 1c.

Роль "бесконечности" у "прямых" линий на сфере AG и $A'G'$ для точек A и A' играют диаметральные к ним точки A_1 и A_1'; дуги $AA_1 = A'A_1'$, $DD_1 = D'D_1'$, $EE_1 = E'E_1'$. Замыкающие хорды исходного и изогнутого полигонов $AG < A'G'$, так как из неравенства треугольника и по Лемме

$$G'A_1' \leq G'E_1' + E_1'D_1' + D_1'A_1' < GE_1 + E_1D_1 + D_1A_1 = GA_1.$$

Теорема справедлива и для гиперболических полигонов, достаточно адекватно повторить доказательство, изложенное для плоскости. Аналог этой Теоремы для общих выпуклых кривых приводится в работе [6, 1970].

Замечание. Как показано в работах [4, 5], вопрос об изгибаниях полигонов с сохранением выпуклости представляет самостоятельный интерес.

Достоинством формулировки Теоремы Лежандра и Коши является ее чрезвычайная общность. Принадлежность плоскости или сфере изогнутых полигонов, их локальная выпуклость, увеличение всех углов полигонов суть только технические упрощения. Теорема справедлива и при изгибании полигона с потерей локальной выпуклости, даже если изогнутый полигон принимает пространственную форму. Это хорошо видно на сферических полигонах.

Теорема 1.2. *Если в выпуклом плоском, сферическом или гиперболическом полигоне $P \equiv A...D...G$, сохраняя длины сторон, изменить одновременно, не уменьшая, углы между сторонами, если при этом полигон потеряет локальную выпуклость либо локальная выпуклость сохранится, но хотя бы один из углов увеличится, то замыкающая хорда полигона AG увеличится.*

Доказательство. Рассмотрим изгибание полигона P в некоторый полигон P' с потерей локальной выпуклости в евклидовом и гиперболическом пространствах.

Допустим, что некоторые углы полигона P увеличились. Тогда выполним следующую Первую операцию. Изгибаем полигон P с сохранением локальной выпуклости, чтобы все углы полигона уравнялись с соответствующими углами полигона P'. При этом оставляем фиксированной специально выбранную вершину D (Рис. 1a).

Согласно условиям Теоремы, на полигоне P' есть некоторый участок из трех последовательных звеньев, не являющийся локально выпуклым полигоном. Пусть $R'S'T'K'$ и $RSTK$ – такой участок на P' и соответствующий ему участок на P. Тогда выполним следующую Вторую операцию в одном из вариантов: если $S' \neq D'$, то заменяем в полигонах P' и P участки $R'S'T'$ и RST новыми звеньями $R'T'$ и RT; если $T' \neq D'$, то заменяем в полигонах

P' и P участки $S'T'K'$ и STK новыми звеньями $S'K'$ и SK. В первом варианте угол при вершине T' полигона P' станет большим угла при вершине T полигона P, во втором варианте угол при вершине S' полигона P' станет большим угла при вершине S полигона P. Это увеличение углов поясняется равенством соответствующих углов исходных полигонов P' и P и применением в вершинах T' и T, S' и S неравенства треугольника для углов между звеньями.

Подвергая последовательно полигоны P и P' Первой и Второй операциям, приходим к конгруэнтным полигонам. На начальном этапе проекция замыкающей хорды изогнутого полигона P на исходную прямую AG стала большей хорды AG. В последующем эта проекция только увеличивалась. Вершины же A' и G' полигона P' оставались неподвижными. Эти положения и утверждают Теорему.

2. Деформации замкнутых полигонов

Второе ключевое, и ведущее, Предложение Лежандра и Коши (Теорема 2.1, евклидовы и сферические полигоны) относится к изгибаниям замкнутых полигонов. Оно устанавливается авторами на базе Теоремы 1.1; мы приводим иное, независимое и оптимальное доказательство. Рассматриваются евклидовы, сферические и гиперболические полигоны.

Лемма 2.1. *Если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, сохраняя длины сторон AB, BC, CD и выпуклость, увеличить углы B и C, заключенные между этими сторонами, то сторона четырехугольника AD увеличится.*

Лемма доказывается элементарно, так же, как и Лемма 1.1.

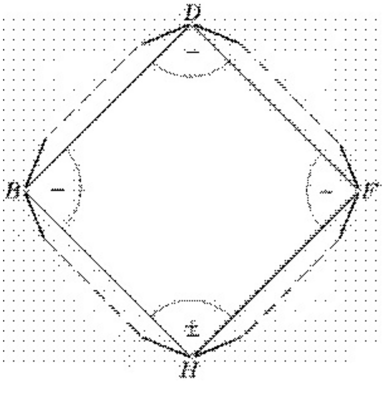

Рис. 2a

Теорема 2.1. *Пусть P и P' – неконгруэнтные замкнутые выпуклые полигоны с соответственно равными сторонами. Отметим углы полигонов знаками "+" или "– если конкретный угол одного полигона больше или* *меньше соответствующего угла другого полигона. Тогда при обходе каждого полигона будет не менее четырех перемен знаков.*

Доказательство. Число отмеченных вершин на каждом из полигонов – не меньше четырех. Если это число больше четырех, то на одном из полигонов, пусть на P, найдутся четыре отмеченные вершины, три из которых имеют знаки "$-$". Пусть такими вершинами будут B, D, F и H, как показано на Рис. 2а.

Будем непрерывно изгибать полигон P, изменяя углы в этих вершинах, уменьшая углы D, H. По Лемме 2.1 углы B, F четырехугольника $BDFH$ увеличиваются. Наступит момент, когда один из углов B, F, H полигона P станет равным соответствующему углу полигона P'. Число отмеченных вершин на полигонах уменьшится, число перемен знаков не увеличится, при этом еще останутся отмеченные вершины, так как угол D с изгибанием полигона P уменьшался.

Последовательно применяя к рассматриваемым полигонам описанную операцию, придем к полигонам P и P', имеющим точно по четыре отмеченные вершины. Снова учитывая Лемму 2.1, находим, что число перемен знаков равно четырем. Значит, на исходных полигонах было не меньше, чем по четыре перемены знака.

Приведенное доказательство Теоремы изложено в брошюре автора [5, 1986]; в дифференциальной геометрии этой Теореме соответствует известная Теорема о четырех вершинах овала [7, 1935].

Теорема 2.2. *Пусть P и P' – неконгруэнтные замкнутые выпуклые полигоны с соответственно равными углами, причем евклидовы полигоны ограничивают равные площади. Отметим стороны полигонов знаками "$+$" или "$-$ если конкретная сторона одного полигона больше или меньше соответствующей стороны другого полигона. Тогда при обходе каждого полигона будет не менее четырех перемен знаков.*

Эта Теорема двойственна Теореме 2.1 [5; 8, 1996]. В случае сферических полигонов она вытекает из Теоремы 2.1; стоит лишь перейти на сфере от рассматриваемых полигонов к полярным к ним полигонам. Для доказательства Теоремы в случае евклидовых и гиперболических полигонов нужны дополнительные сведения. Введем Определения. *Полосой* в гиперболической (евклидовой) плоскости называется область между расходящимися (параллельными) прямыми r и s, сторонами полосы; длина общего перпендикуляра $h(r, s)$ к сторонам полосы называется *шириной* полосы.

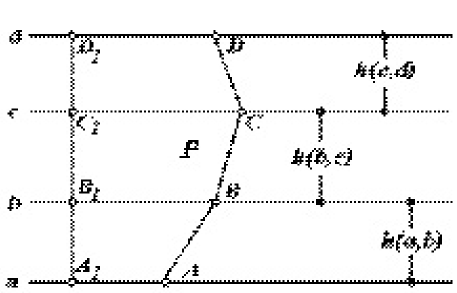

Рис. 2b

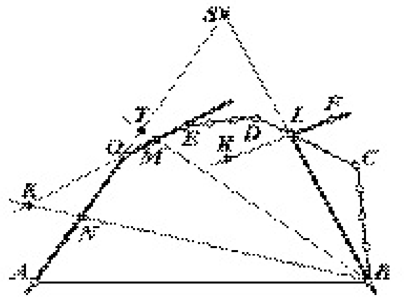

Рис. 2c

Лемма 2.2. *Пусть $P = A...BC...D$ и $P' = A'...B'C'...D'$ – гиперболические или евклидовы неконгруэнтные выпуклые полигоны с равными соответствующими углами, вписанные в полосы H и H' под равными ненулевыми наклонами к сторонам полос a и a', d и d' в вершинах A и A', D и D' соответственно. Пусть звенья полигона P – не меньшие соответствующих им звеньев полигона P'. Тогда ширина $h(a,d)$ полосы H больше ширины $h(a',d')$ полосы H'.*

Доказательство. Для евклидовых полигонов Лемма очевидна. Ограничимся трехзвенными гиперболическими полигонами $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Пусть $A_1'D_1'$ – общий перпендикуляр к сторонам полосы H', где $A_!' \in a'$, $D_1' \in d'$. Пусть b', c' – прямые линии, проходящие через вершины B', C' полигона P' перпендикулярно прямой $A_1'D_1'$ в точках $B_1' \in A_1'D_1'$, $C_1' \in A_1'D_1'$. Линии b', c' делят полосу H' на три меньшие полосы.

На Рис. 2b показаны элементы полосы H, соответствующие элементам полосы H': A_1D_1 – общий перпендикуляр к сторонам a и d полосы; b и c – прямые линии, проходящие через вершины B и C под теми же углами к звеньям полигона P, под какими соответствующие линии b' и c' наклонены к звеньям полигона P'; B_1 и C_1 – точки пересечения линий b и c с перпендикуляром A_1D_1. Линии b и c делят полосу H на три меньшие полосы, соответствующие меньшим полосам в полосе H'; на Рис. 2b показаны общие перпендикуляры к сторонам меньших полос.

Очевидно,

$$A_1B_1 \geq h(a,b), \quad B_1C_1 \geq h(b,c), \quad C_1D_1 \geq h(c,d).$$

Из условий Леммы следует, что

$$h(a,b) \geq h(a',b'), \quad n(b,c) \geq h(b',c'), \quad h(c,d) \geq h(c',d'),$$

и хотя бы одно из этих неравенств строгое, поскольку полигоны P и P' – неконгруэнтные. Этими положениями и утверждается Лемма:

$$h(a,d) = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 > h(a',b') + h(b',c') + h(c',d').$$

Лемма 2.3. *Пусть $P = AB...CD...E$ и $P' = A'B'...C'D'...E'$ – гиперболические или евклидовы неконгруэнтные выпуклые полигоны с равными соответствующими углами, вписанные одинаковыми сторонами в углы AOE и $A'O'E'$ под равными ненулевыми наклонами к лучам OA и $O'A'$, OE и $O'E'$ в вершинах A и A', E и E' соответственно. Пусть звенья полигона P – не большие соответствующих им звеньев полигона P'. Тогда площадь $\sigma(W)$ области W, отсекаемой полигоном P от угла AOE, меньше площади $\sigma(W')$ области W', отсекаемой полигоном P' от угла $A'O'E'$.*

Доказательство. Триангулируем область W' хордами $B'O'$, ..., $C'O'$, $D'O'$ ... . Направим в область W из вершин B, ..., C, D ... лучи b, ..., c, d ... под теми же углами к звеньям полигона P, под какими соответствующие хорды наклонены к звеньям полигона P'. Причислим к набору лучей также лучи AO и EO. В условиях Леммы у конкретного звена XY лучи x, y пересекаются в некоторой точке Z, определяя над звеном XY треугольник XYZ. Площадь этого треугольника не превосходит площади соответствующего треугольника $X'Y'O'$ триангуляции W'. Введем полигон $\tilde{P}(B)$, составленный из полигона $P(B) = B...CD...E$ и лучей b, EO; введем полигон $\tilde{P}'(B')$,составленный из полигона $P'(B') = B'...C'D'...E'$ и лучей $B'O'$, $E'O'$.

Пусть полигоны P и P' обращены к вершинам углов O и O' выпуклыми сторонами. И пусть луч b пересекает сторону AO во внутренней точке N. Тогда луч b также пересекает в некоторой точке K луч EO вне стороны EO; докажем это Предложение; в евклидовом случае Предложение очевидно. Деформируем полигон $\tilde{P}'(B')$, сохраняя его углы и последовательно уравнивая (в условиях Леммы – не увеличивая) звенья полигона $P'(B')$ с соответствующими звеньями полинома $P(B)$. В процессе деформации факт пересечения лучей $B'O'$ и $E'O'$ сохраняется, по завершении деформации полигон $\tilde{P}'(B')$ станет конгруэнтным полигону $\tilde{P}(B)$. Значит лучи b и EO действительно пересекаются. Область W покрывается треугольником ABN и новой областью $W(B)$, отсекаемой полигоном $P(B)$ от угла BKE. Аналогичная ситуация с покрытием области W возникает в случаях, когда луч b проходит через вершину O или когда луч b проходит через внутреннюю точку M стороны EO и пересекает в некоторой точке T луч AO вне стороны AO.

Пусть полигоны P и P' обращены к вершинам углов O и O' вогнутыми сторонами (Рис. 2c). И пусть луч b пересекает сторону AO во внутренней точке N. Тогда луч b также пересекает в некоторой точке K луч EO вне стороны EO; докажем это Предложение; в евклидовом случае Предложение очевидно. Положим, что лучи b и EO не пересекаются. Деформируем выпуклый полигон $\tilde{P}(B)$, сохраняя его углы и последовательно уравнивая (в условиях Леммы – не уменьшая) звенья полигона $P(B)$ с соответствующими звеньями полинома $P'(B')$. В процессе деформации факт непересечения лучей b и EO сохраняется, по завершении деформации полигон $\tilde{P}(B)$ станет конгруэнтным полигону $\tilde{P}'(B')$. Но лучи $B'O'$ и $E'O'$ пересекаются – противоречие; значит, лучи b и EO также пересекаются. Таким образом, если луч b пересекает в некоторой внутренней точке полигон AOE, то характер покрытия области W в принципе повторяет уже рассмотренные случаи покрытия, когда полигоны $P(B)$ и $P'(B')$ обращены к вершинам O и O' выпуклыми сторонами. Правда, здесь возникает еще особый вариант покрытия, когда луч b пересекает в некоторой точке L полигон $P(B)$.

Пусть L – внутренняя точка некоторой стороны CD, L' – точка стороны $C'D'$, делящая эту сторону в том же отношении, в каком точка L делит сторону CD. Добавим в области W' хорду $L'O'$. Направим в область W луч LR под теми же углами к звеньям стороны CD, под какими хорда $L'O'$ наклонена к звеньям стороны $C'D'$, и введем луч LF, противоположный лучу LR. Луч LR проходит вне угла BLC. Иначе устанавливается невозможное – что лучи $L'O'$ и $E'O'$ не пересекаются; подобный случай уже рассматривался. Пусть S – точка пересечения лучей b и AO вне стороны AO. Область W покрывается треугольником ABS и новой областью $W_1(B)$, отсекаемой полигоном $P_1(B) = B...CL$ от угла BLF. Треугольнику ABS отвечает треугольник $A'B'O'$, области $W_1(B)$ – область $W_1'(B')$, отсекаемая от угла $B'O'L'$ полигоном $P_1'(B') = B'...C'L'$. Подобно определяется и случай покрытия, когда луч b проходит через вершину E.

По изложенным схемам осуществляется покрытие области W либо полной системой треугольников вида XYZ, построенных на сторонах XY полигона P, либо неполной системой таких треугольников. В случае полной системы треугольников площадь покрытия области W не превосходит площади $\sigma(W')$; эта площадь покрытия меньше площади $\sigma(W')$, так как полигоны P и P' неконгруэнтные. Неполная система треугольников покрытия может возникнуть лишь в случае, когда полигоны P и P' обращены к вершинам углов O и O' вогнутыми сторонами. Площадь такого покрытия не превосходит площади части области W', эта площадь покрытия также меньше площади $\sigma(W')$. Лемма доказана.

Доказательство Теоремы 2.2.

В условиях Теоремы при обходах полигонов P и P' обязательно будут перемены знаков. Это есть следствие Леммы 2.3. Остается показать, что при обходах полигонов P и P' не может быть двух перемен знаков.

Пусть полигоны P и P' разделяются вершинами A, C и A', C' на полигоны $P(B) = A...B...C$, $P(D) = A...D...C$ и $P'(B') = A'...B'...C'$, $P'(D') = A'...D'...C'$ со знаками у сторон "+" , "−" и "−" , "+" соответственно. Проведем к полигонам P и P' через вершины A, C и A', C' опорные прямые линии a, c и a', c' под соответственно равными наклонами к сторонам этих полигонов. В условиях Теоремы опорные линии можно подобрать в двух следующих вариантах. Первый вариант: линии a, c и a', c' суть расходящиеся прямые линии для гиперболических и параллельные прямые линии для евклидовых полигонов P и P'. Второй вариант: линии a, c и a', c' пересекаются в некоторых точках O и O', причем полигоны P и P' обращены к точкам O и O' выпуклыми сторонами.

Первый вариант. Сравнивая полигоны $P(B)$ и $P'(B')$, по Лемме 2.2 находим, что ширины соответствующих полос связаны неравенством $h(a,c) > h(a',c')$. Сравнивая полигоны $P(D)$ и $P'(D')$, по Лемме 2.2 находим, что $h(a,c) < h(a',c')$. Противоречие.

Второй вариант. Обозначим Σ площади полигонов P и P', а σ, σ' и $\sigma+\Sigma$, $\sigma'+\Sigma$ – соответственно площади, отсекаемые полигонами $P(B)$, $P'(B')$ и $P(D)$, $P'(D')$ от углов ABC, $A'B'C'$. По Лемме 2.3 находим, что $\sigma > \sigma'$ и $\sigma + \Sigma < \sigma' + \Sigma$. Противоречие.

Полученные противоречия утверждают Теорему – при обходах полигонов P и P' будет не менее четырех перемен знаков.

3. Жесткость выпуклых полиэдров

Рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство E_1^3 с метрической формой $z^2 = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$. Сферы единичного и мнимоединичного радиусов в этом пространстве представляют собой плоскость де Ситтера и гиперболическую плоскость. Полный, не имеющий границы, полиэдральный конус в E_1^3 называется *полиэдральным углом*. Строго выпуклые полиэдральные углы с общей вершиной в начале координат – пространственно-подобный угол P и времени-подобный угол Q называются полярными углами, если каждое ребро одного угла внешне ортогонально некоторой грани другого угла и каждой грани одного угла внешне ортогонально некоторое ребро другого угла. Полигон $\bar{Q}$, пересечение угла Q с гиперболической сферой, называется полигоном, полярным к углу P. Пусть α – произвольная грань угла P, A – вершина полигона $\bar{Q}$, определяемая ребром угла Q, ортогональным к грани α. Очевидно, внешний угол полигона $\bar{Q}$ в вершине A равен плоскому углу грани α. Пусть a – произвольное ребро угла P, $\bar{a}$ – сторона полигона $\bar{Q}$, определяемая гранью угла Q, ортогональной ребру a. Очевидно, сторона $\bar{a}$ равна внешнему двугранному углу полиэдра P при ребре a. Отсюда, в частности, следует, что кривизна угла P – отрицательная – сумма плоских углов пространственно-подобного строго выпуклого полиэдрального угла превосходит 2π, для проверки надо лишь перейти к полярному полигону $\bar{Q}$; весьма полезная геометрическая интерпретация этого факта.

Лемма 3. *Пусть P и P' – неконгруэнтные пространственно-подобные строго выпуклые полиэдральные углы с соответственно равными плоскими углами. Отметим внешние двугранные углы полигонов знаками "+" или "−", если конкретный двугранный угол одного полиэдрального угла больше или меньше соответствующего двугранного угла другого полиэдрального угла. Тогда при обходе вокруг вершины каждого полиэдрального угла будет не меньше четырех перемен знаков.*

Лемма вытекает из Теоремы 2.2; надо лишь перейти к полярным полигонам $\bar{Q}$ и $\bar{Q}'$, соответствующим полиэдральным углам P и P'.

Теорема 3. *Одинаково составленные замкнутые строго выпуклые полиэдры в евклидовом пространстве, у которых соответствующие плоские углы равны, а соответствующие грани имеют равные площади, полиэдры в сферическом и гиперболическом пространствах, у которых соответствующие плоские углы равны, и пространственно-подобные полиэдры в пространстве де Ситтера, у которых соответствующие плоские углы равны, конгруентны.*

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство E_1^4 с метрической формой $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$. Сферы единичного и мнимоединичного радиусов в этом пространстве представляют собой пространство де Ситтера и гиперболическое пространство. Строго выпуклые полиэдральные углы с общей вершиной в начале координат – пространственно-подобный угол P и времени-подобный угол Q – называются *полярными* углами, если каждое ребро одного угла внешне ортогонально некоторой грани другого угла и каждой грани одного угла внешне ортогонально некоторое ребро другого угла. Строго выпуклые полиэдры $\bar{P}$ и $\bar{Q}$, пересечения углов P и Q со сферой де Ситтера и гиперболической сферой, называются пространственноподобным и времени-подобным полярными полиэдрами; гранями этих полиэдров соответственно являются стандартные сферические и гиперболические полигоны. Каждым вершине, ребру, грани одного из полиэдров $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ соответствуют полярные грань, ребро, вершина другого полиэдра; каждое ребро одного из полиэдров $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ равно внешнему двугранному углу при полярном ребре другого полиэдра.

Доказательство Теоремы 3 проводится известными методами Коши-Лежандра [1, 2] и Александрова [9, 1950]. Сначала, по Лежандру и Коши, устанавливается равенство соответствующих двугранных углов рассматриваемых полиэдров; при этом применяется комбинаторика Коши, основанная на Теореме Эйлера. Затем, по Александрову, с помощью Теоремы 2.2 устанавливается равенство соответствующих ребер многогранников; применяется метод, двойственный методу Коши-Лежандра. Этим и доказывается Теорема 3. Очевидно, нет необходимости приводить подробное ее доказательство.

Александров качественно упростил доказательство Коши-Лежандра, применяя вместо комбинаторики Коши и Теоремы Эйлера Теорему Жордана для сферы; ведь Теорема Эйлера тоже основывается на Теореме Жордана. Добавим, что для случаев сферического, гиперболического и де Ситтера пространств второй этап доказательства Теоремы может быть сокращен. С этой целью, наряду с рассматриваемыми полиэдрами вводятся полярные к ним полиэдры, которые оказываются тоже с равными соответствующими плоскими углами. На первом этапе устанавливается равенство соответствующих двугранных углов как у исходных, так и у полярных полиэдров. На втором этапе, по изложенному ранее геометрическому признаку полярных ребер, из равенства соответствующих двугранных углов полиэдров извлекается необходимое равенство их соответствующих ребер – Теорема о конгруентности полиэдров доказана.

Евклидов вариант Теоремы 3 содержится в Определении 10 книги XI "Начал" издания Гейберга [10, 1948-1950]; издание основано на сравнительном анализе различных списков "Начал" и признано историками как ближайшее к Оригиналу. Это вариант представляет предельно общий результат о жесткости замкнутых выпуклых полиэлров, открытый профессиональными математиками задолго до времени Александрии и Афин [11, 2008]. Определение 9 есть вспомагательное Предложение к Определению 10.

Определение 9. *Подобными телесными фигурами будут заключенные между равными по количеству подобными плоскостями.*

Определение 10. *Равные же и подобные телесные фигуры будут заключенные между равными по количеству и по величине подобными плоскостями.*

Здесь "телесные фигуры" и "плоскости" – полиэдры и полигоны, грани полиэдров; "телесные фигуры, заключенные между равными по количеству подобными плоскостями" – одинаково составленные (комбинаторно эквивалентные) полиэдры с равными соответствующими плоскими углами; "равные телесные фигуры" и "равные по величине плоскости" – полиэдры с равными по длине соответствующими ребрами и соответствующие полигоны с равными площадями.

В "Началах" рассматриваются без каких-либо определений только выпуклые полигоны и полиэдры. Если необходимые определения и были в Оригинале, то они устранены "исправлениями" переписчиков. Например, это подтверждается Предложением 21 из книги XI: *"Всякий телесный угол заключается между плоскими углами, меньшими [чем] четыре прямых <угла>"*; Предложение верно только для выпуклых "телесных углов".

Д.Д. Мордухай-Болтовской приводит следующий Комментарий 6 (Подобие тел) к книге XI "Начал" [10]: *"В Определении 9 выступает дисгармония с определением подобия плоских фигур в шестой книге "Начал" (Определение 1). Там подобные фигуры определяются как такие, которые имеют соответственно равные углы, и стороны, заключающие эти углы, пропорциональны."* По тексту "Начал" этот признак "подобие" относится лишь к "прямолинейным фигурам" – к полигонам. Такое определение подобия не применимо к "телесным фигурам и не только из-за дисгармонии с Определением 9. Требование Определения 1 "стороны пропорциональны" противоречит требованию Определения 10 "равные по величине плоскости" – оно перегружает Определение 10. Поэтому в Определениях 9 и 10 и для "плоскостей и для "телесных фигур" признак "подобны" означает "соответствующие плоские углы равны"; у "телесных фигур" двугранный угол характеризуется "плоским углом" – линейным углом в современной терминологии. В подтверждение этого вывода достаточно сравнить Определение 8 (Плоский угол) и Определение 6 (Наклон плоскости к плоскости) из книг I и XI "Начал"; углы фигур здесь определяются общей терминологией. По свидетельствам Аристотеля и Прокла, так квалифицировалось подобие фигур Пифагором – как равенство соответствующих плоских углов; это вполне гармонирует с наглядными, опытными представлениями.

В связи с изложенным, вспомогательное Определение 9 читается как Теорема: *Комбинаторно эквивалентные замкнутые выпуклые полиэдры, у граней которых соответствующие углы равны, имеют равные соответствующие двугранные углы.*

Определения 9 и 10 в "Началах" являются аксиомами, необходимыми для построения Теории объемов и относящимися к треугольным пирамидам и призмам. Следовательно, сами Определения в качестве Теорем для произвольных выпуклых полиэдров были известным много ранее разработки содержательного Учения о геометрии, какими являются "Начала" [12, 2010]. Отдавая должное высокому научному и аксиоматическому уровню этого Учения, а также непревзойденной Школе его Создателей, мы называем евклидов вариант Теоремы 3 (Определения 10) Теоремой Евклида [11, 12]. Учением называл "Начала" Д. Гильберт, их высоко ценил и К.Ф. Гаусс.

Теорема Евклида. *Замкнутые одинаково составленные выпуклые полиэдры конгруентны, если у них соответствующие плоские углы равны и площади соответствующих граней равны.*

В заключение напомним Теоремы о жесткости выпуклых полиэдров, заложившие основы важного направления современной Геометрии "в целом" – внутренней и внешней Геометрии общих выпуклых поверхностей.

Теорема 3.1. (Лежандр и Коши) *Замкнутые выпуклые полиэдры, одинаково составленные из конгруентных граней, конгруэнтны.*

Теорема следует из Теоремы - Определения 9. Как отмечает Коши, Лежандр увидел эту Теорему [также] в Определении 9 книги XI "Начал"; к сожалению, у Лежандра был список "Начал" , явно испорченный переписчиками. В подтверждение приводим оригинальные формулировки из [2]:

"*Следствие 1. Из предыдущей Теоремы следует, что выпуклые полиэдры, одинаково составленные из конгруэнтных граней, конгруэнтны. Это есть то, что составляет Теорему, заключающуюся в Определении 9 книги XI Евклида.*

Следствие 2. Из предыдущей Теоремы следует, что выпуклые полиэдры, одинаково составленные из подобных граней, подобны. Это есть то, что составляет Теорему, заключающуюся в Определении 10 цитированной книги."

Теорема 3.2. (Минковский) *Если у двух замкнутых выпуклых полиэдров грани соответственно параллельны и имеют равные площади, то полиэдры конгруэнтны и параллельно расположены.*

Теорема следует из Теоремы-Опеределения 10 [9]. Минковский получил эту теорему, рассматривая задачу о заполнении пространства равными и параллельно расположенными выпуклыми полиэдрами – параллелоэдрами. Задача возникла при исследовании проблем геометрической Теории чисел и Кристаллографии Федоровым.

Теорема 3.3. (Александров) *Если у двух замкнутых выпуклых полиэдров грани соответственно параллельны и если соответствующие грани не могут быть параллельным переносом помещены одна в другой, то полиэдры конгруэнтны и параллельно расположены.*

Теорема широко обобщает Теорему 3.2 [9].

4. Проблемы

Представляем актуальную проблематику, связанную с Теоремой.

Жесткость полиэдров при минимальных данных.

Проблема 1. *Доказать, что комбинаторно эквивалентные замкнутые выпуклые полиэдры в R^n конгруэнтны, если (a) площади сферических изображений их соответствующих вершин равны, (b) средние кривизны их соответствующих ребер всех размерностей равны, (c) площади их соответствующих гиперграней равны.*

Эта проблема формулировалась автором в the workshop "Rigidity and Flexibility Vienna, Austria, 2006 [13, Problem section].

Аналог проблемы Стокера (J.J. Stoker, 1968).

Проблема 2. *Доказать, что комбинаторно эквивалентные неевклидовы замкнутые выпуклые полиэдры конгруэнтны, если их соответствующие ребра или их соответствующие двугранные углы равны.*

В.А. Александровым доказано, что существуют сферические и гиперболические замкнутые невыпуклые полиэдры без самопересечений, допускающие нетривиальные непрерывные деформации с сохранением двугранных углов [14].

Аналог проблемы Брикара (R. Bricard, 1897).

Проблема 3. *Доказать, что существуют евклидовы, сферические, гиперболические, пространственно-подобные деситтеровы замкнутые невыпуклые полиэдры без самопересечений, которые допускают нетривиальные непрерывные деформации с сохранением углов граней и, в евклидовом случае, с сохранением площадей граней.*

Непрерывно изгибаемые по Коши замкнутые невыпуклые полиэдры-флексоры без самопересечений в R^3 открыты Р. Коннели [15]; инвариантность объемов полиэдров при изгибаниях доказана И.Х. Сабитовым. Решение этой проблемы важно для теории оболочек. Как подчеркивает И.И. Ворович в Послесловии к известной монографии А.В. Погорелова [16], необходимо исследовать устойчивость оболочек, "имеющих нулевую жесткость на изгиб и конечную жесткость на растяжение" , у которых "энергия, накопленная при растяжении, пропорциональна изменению площади". Такое исследование может расширить класс модельных флексоров, открытых автором [17].

Аналог проблемы Миндинга (E.F.A. Minding, 1836).

Проблема 4. *Доказать, что пространственно-подобные деситтеровы замкнутые выпуклые изометричные поверхности конгруэнтны.*

Эта проблема в евклидовом и сферическом пространствах решена А.В. Погореловым [18], а в гиперболическом - А.Д. Милкой [19].

Список литературы

1. A.M. Legendre. Elements de Geometrie. Premier edition. Paris, Note XII, (1794), p. 321 – 334.
2. A.L. Cauchy. Sur les polygones et polyedres. Seconde memoire // J. de l'Ecole Polytechnique – (1813). - 9. - p. 87 – 98.
3. E. Steinitz , H. Rademacher. Vorlesungen uber die Theorie der Polyeder. Berlin: Springer-Verlag, (1934).
4. И.Х. Сабитов. Вокруг доказательства леммы Лежандра-Коши о многоугольниках // Сиб. матем. журн. – (2004) - 45, N4. - с. 892 – 919.
5. А.Д. Милка. Что такое геометрия "в целом"? Москва: Знание, (1986), 32 с.
6. А.Д. Милка Об одной теореме Шура-Шмидта // Укр. геом. сборник – (1970). - 8. - с. 91 – 94.
7. В. Бляшке Дифференциальная геометрия. М.-Л.: ОНТИ-НКТП, (1935), 332 с.
8. A.D. Milka. Space-like convex surfaces in pseudo-Euclidean spaces // AMS translations – (1996). - 176. - p. 97 – 150.
9. А.Д. Александров. Выпуклые многогранники. М.-Л.: Гостехиздат, (1950), 428 с.
10. Д.Д. Мордухай-Болтовской. "Начала"Евклида. М.-Л.: Гостехиздат, (1948), 448 с.
11. А.Д. Милка. Неопознанная египетская геометрия // Proc. Int. Geom. Center – (2008). - 1, N1-2. - с. 97 – 114. Сокращенный перевод: A.D Milka . Unidentified Egyptian geometry // European Journal of Combinatorics – (2010). - 31. - p. 1065 – 1070.
12. А.Д. Милка. Истоки и содержание аксиоматики "Начал"// Proc. Int. Geom. Center – (2009). - 2, N3.
13. Special issue on Rigidity and Related Topics in Geometry // Eur. Journ. Combinatorics – (2010), 31.
14. V.A. Alexandrov. Continuous deformations of polyhedra that do not alter the dihedral angles // arXiv: 1212.4676, (2012).
15. R. Connelly. A flexible sphere // Math. Intell. – (1978). - 1(3). - p. 130 – 131.
16. А.В. Погорелов. Геометрическая теория устойчивости оболочек. М.: Наука, (1966).
17. A.D. Milka. Linear bending of star-like pyramids // C.R. Mecanique – (2003). - 12.
18. А.В. Погорелов Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, (1969), 760 с.
19. А.Д. Милка. Однозначная определенность общих замнкутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского // Укр. геом. сборник – 1980. - 23. - р. 99 – 107.

Анатолий Дмитриевич Милка
ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: milka@ilt.kharkov.ua

Anatoliy Milka
B. Verkin Institute for Low temperature Physics and Engineering of NAS of Ukraine, Kharkiv, Ukraine.

Rigidity of closed convex polyhedra

We discuss Theorem of Legendre and Cauchy concerning the rigidity of closed convex polyhedra, which determined the actual scientific direction of "Geometry in large". We deny the version of Steinitz, which was popular in the last century, about a mistake admitted in the proof by Legendre and Cauchy. A version of Euclid's "Elements" , in which axiomatic Definitions Legendre has seen this Theorem, differs from the Original version of "Elements"restored by Heiberg. This version of "Elements"includes an incomplete and corrected Variant of an extremely general Theorem, contained in the Original, concerning the rigidity of polyhedra, which had been opened by professional mathematicians long before the time of Alexandria and Athens. In our paper we prove this General Theorem, named Theorem of Euclid, and find its natural analogues in spherical, hyperbolic and de Sitter spaces. Article continues the previous paper of the author: *What is the geometry "in large" ?* – Moscow: Znanie, 12, 1986, 32 p.; *Unidentified Egyptian Geometry* // Proc. Int. Geom. Center, 2008, v.1, n.1-2, p.97-115; *Sources and contents of the axiomatic of "Elements"* // Proc. Int. Geom. Center, 2009, v.2, n.3, p.41-54; *Unidentified Egyptian Geometry* // Europ. J. of Combin., 2010, v.31, p.1065-1071.

О три-тканях с эластичными координатными лупами

К.Р. Джукашев

Аннотация Найдены все соотношения на тензоры кручения и кривизны эластичной три-ткани до пятой дифференциальной окрестности включительно.

Ключевые слова Три-ткань Бола, эластичная лупа, эластичная ткань

УДК 514.763.7

Введение. Многомерная три-ткань W образована тремя слоениями λ_α, $\alpha = 1, 2, 3$ размерности r на $2r$-мерном многообразии X.

Как известно [1], с каждой точкой многообразия X, несущего три-ткань W, связана координатная лупа этой ткани. Эластичной три-тканью или тканью E называется три-ткань, в координатных лупах которой выполняется тождество эластичности:

$$(xy)x = x(yx), \tag{1}$$

где xy - операция в координатной лупе ткани [1].

На три-ткани E замыкаются фигуры E (рис. 1), образованные слоениями этой ткани, соответствующие тождеству эластичности, см. [2].

В отличие от других классов многомерных три-тканей, ткани E изучались относительно мало. Систематическое изучение тканей E начато в [2], где доказано, что эти ткани образуют подкласс средних тканей Бола и их основные тензоры связаны соотношением $b(x, y, [xy]) = 0$. До этого в [3] было

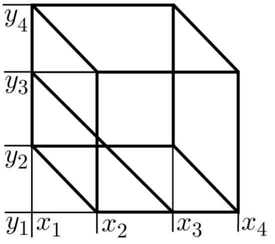

Рис. 1 Фигура E

доказано, что в координатных лупах тканей E выполняется более сильное тождество $(x^m y)x^n = x^m(yx^n)$ для любых целых m и n.

В работе [4] проведена классификация тканей E минимальной размерности и показано, что существует всего две шестимерные ткани E (E_1 и E_2).

В работе [5] начато исследование пятой дифференциальной окрестности тканей E. В настоящей работе мы детализируем некоторые результаты из [5] и даем подробное доказательство анонсированных там утверждений.

1. Согласно [1], зададим слоения $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$, вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$ и $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, $i = 1, ..., r$, где формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ образуют кобазис на многообразии X.

Структурные уравнения три-ткани имеют вид [1]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \tag{2}$$

$$d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{3}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \tag{4}$$

Внешнее дифференцирование структурных уравнений приводит в дифференциальным уравнениям на тензоры a и b:

$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l, \tag{5}$$

$$\nabla b^i_{jkl} = \underset{1}{c}^i_{jklm}\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{c}^i_{jklm}\underset{2}{\omega}^m, \tag{6}$$

$$\nabla \underset{1}{c}^i_{jklm} = \underset{11}{c}^{\,i}_{jklmn}\underset{1}{\omega}^n + \underset{12}{c}^{\,i}_{jklmn}\underset{2}{\omega}^n, \tag{7}$$

$$\nabla \underset{2}{c}^i_{jklm} = \underset{21}{c}^{\,i}_{jklmn}\underset{1}{\omega}^n + \underset{22}{c}^{\,i}_{jklmn}\underset{2}{\omega}^n, \tag{8}$$

причем тензоры a, b, $\underset{1}{c}$ и т.д. связаны некоторыми соотношениями, а ∇ - дифференциальный оператор, определяемый формулой [1]:

$$\nabla a^i_{jk} \overset{def}{=} da^i_{jk} + a^m_{jk}\omega^i_m - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k.$$

Так как ткани E являются средними тканями Бола, то их тензоры связаны следующими соотношениями [1]:

$$b(x,y,z) = -b(x,z,y), \tag{9}$$

$$b(x,y,z) + b(y,z,x) + b(z,x,y) = 2([[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y]), \tag{10}$$

$$b(x,y,[zt]) - b(y,x,[zt]) + b([xy],z,t) = [xb(y,z,t)] - [yb(x,z,t)], \tag{11}$$

$$\underset{1}{c}(x,y,z,t) = -\underset{2}{c}(x,y,z,t) = -b(x,[zt],y) + b(x,[yz],t) + b(x,[yt],z). \tag{12}$$

Для тканей Бола уравнения (5) и (6) примут следующий вид [1]:

$$\bigtriangledown a^i_{jk} = -b^i_{[jk]l}(\underset{1}{\omega}^l - \underset{2}{\omega}^l), \tag{13}$$

$$\bigtriangledown b^i_{jkl} = c^i_{jklm}(\underset{1}{\omega}^m - \underset{2}{\omega}^m), \tag{14}$$

где обозначено $\underset{1}{c} = -\underset{2}{c} \equiv c$. Как было сказанно выше, для тканей E справедливо ещё одно соотношение:

$$b(x,y,[xy]) = 0. \tag{15}$$

Линеаризируя это соотношение, получим равенство

$$b(x,y,[zt]) + b(x,t,[zy]) + b(z,y,[xt]) + b(z,t,[xy]) = 0. \tag{16}$$

Из (9) получаем равенство, которое пригодится нам в дальнейшем:

$$b(x,y,y) = 0. \tag{17}$$

2. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности единицы $e(0,0,\ldots,0)$ функции xy, задающей операцию в координатной лупе ткани [1]:

$$\begin{gathered} xy = x + y + \Lambda(x,y) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,y) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,y) + \frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y) + \\ + \frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y) + \frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) + \frac{1}{24}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,x,y) + \frac{1}{12}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,y,y) + \\ + \frac{1}{12}\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,y) + \frac{1}{24}\underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,y) + \{6\}, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\Lambda(x,y)$ - кососимметричная форма, $\underset{uv}{\Lambda}(x,..,x,y,..y)$ - однородный многочлен, симметричный по первым u и последним v компонентам.

С помощью этого ряда мы вычисляем правую и левую части равенства (1), затем приравниваем многочлены одного порядка с одинаковым набором переменных и получаем соотношения на коэффициенты ряда (18). Далее пользуемся соотношениями, связывающими коэффициенты ряда и основные тензоры ткани, найденными в [1] и [6]:

$$\Lambda(x,y) = -a(x,y) = -[xy], \tag{19}$$

$$b(x,y,z) = \underset{12}{\Lambda}(y,x,z) - \underset{21}{\Lambda}(y,x,z) + [y[xz]] - [[yx]z], \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \underset{1}{c}(x,y,z,u) &= \underset{22}{\Lambda}(y,u,x,z) - \underset{31}{\Lambda}(y,u,x,z) + [ub(x,y,z)] + [yb(x,u,z)] - \\ -b(x,[uy],z) &+ [\underset{21}{\Lambda}(y,u,x)z] - \underset{21}{\Lambda}([xy],u,z) - \underset{21}{\Lambda}(y,[xu],z) - \underset{21}{\Lambda}(y,u,[xz]), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \underset{2}{c}(x,y,z,u) &= \underset{13}{\Lambda}(y,x,z,u) - \underset{22}{\Lambda}(y,x,z,u) + [b(x,y,z)u] + [b(x,y,u)z] - \\ -b(x,y,[zu]) &- [y\underset{12}{\Lambda}(x,z,u)] + \underset{12}{\Lambda}([yx],z,u) + \underset{12}{\Lambda}(y,[zx],u) + \underset{12}{\Lambda}(y,z,[ux]), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \underset{11}{c}(x,y,z,u,v) &= \underset{32}{\Lambda}(y,u,v,x,z) - \underset{41}{\Lambda}(y,u,v,x,z) + [y\underset{1}{c}(x,v,z,u)] + \\ &+ [u\underset{1}{c}(x,y,z,v)] + [v\underset{1}{c}(x,y,z,u)] - \underset{1}{c}(x,[uy],z,v) - \underset{1}{c}(x,[vy],z,u) - \\ &- \underset{1}{c}(x,y,z,[vu]) + [\underset{31}{\Lambda}(v,y,u,x)z] + \underset{31}{\Lambda}([vx],y,u,z) - \underset{31}{\Lambda}(v,y,u,[xz]) - \\ &- \underset{31}{\Lambda}(v,[xy],u,z) - \underset{31}{\Lambda}(v,y,[xu],z) + [yb(x,[uv],z)] + [ub(x,[vy],z)] + \\ &+ [vb(x,[uy],z)] - b(x,[v[uy]],z) - b(x,[u[vy]],z) + b(x,\underset{21}{\Lambda}(u,v,y),z) - \\ &- \underset{21}{\Lambda}(y,u,b(x,v,z)) - \underset{21}{\Lambda}(y,v,b(x,u,z)) - \underset{21}{\Lambda}(u,v,b(x,y,z)) - \\ &- \underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(u,v,x),y,z) - \underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,u,x),v,z) - \underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,v,x),u,z), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \underset{12}{c}(x,y,z,u,v) &= \underset{23}{\Lambda}(y,u,x,z,v) - \underset{32}{\Lambda}(y,u,x,z,v) + [\underset{1}{c}(x,y,v,u)z] + \\ &+ [\underset{1}{c}(x,y,z,u,)v] - \underset{1}{c}(x,y,[zv],u) + [y\underset{2}{c}(x,u,z,v)] + [u\underset{2}{c}(x,y,z,v)] - \\ &- \underset{2}{c}(x,[uy],z,v) - \underset{22}{\Lambda}(y,u,[xv],z) - \underset{22}{\Lambda}(y,u,[xz],v) + \underset{22}{\Lambda}([yx],u,z,v) + \\ &+ \underset{22}{\Lambda}(y,[ux],z,v) + \underset{21}{\Lambda}(y,u,\underset{12}{\Lambda}(x,z,v)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,u,x),z,v) + \\ &+ b(x,b(y,u,v),z) - \underset{12}{\Lambda}(y,b(x,u,z),v) - \underset{12}{\Lambda}(u,b(x,y,z),v) - \\ &- \underset{21}{\Lambda}(b(x,y,v),u,z) - \underset{21}{\Lambda}(b(x,u,v),y,z) - [y[b(x,u,z)v]] + [yb(x,u,[zv])] - \\ &- [[ub(x,y,v)]z] - [[yb(x,u,v)]z] - [u[b(x,y,z)v]] + [yb(x,y,[zv])] + \\ &+ [b(x,[uy],z)v] + [b(x,[uy],v)z] - b(x,[uy],[zv]), \end{aligned} \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{21}{c}(x,y,z,u,v) = \underset{23}{\Lambda}(y,v,x,z,u) - \underset{32}{\Lambda}(y,x,v,z,u) + [\underset{1}{c}(x,y,z,v)u]+\\
&+[\underset{1}{c}(x,y,u,v)z] - \underset{1}{c}(x,y,[zu],v) + [y\underset{2}{c}(x,v,z,u)] + [v\underset{2}{c}(x,y,z,u)]-\\
&-\underset{2}{c}(x,[vy],z,u) - \underset{22}{\Lambda}(y,v,[xz],u) - \underset{22}{\Lambda}([xy],v,z,u) - \underset{22}{\Lambda}(y,v,[xu],z)-\\
&-\underset{22}{\Lambda}(y,[xv],z,u) + \underset{21}{\Lambda}(y,v,\underset{21}{\Lambda}(x,z,u)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,v,x),z,u)-\\
&-b(x,y,b(z,u,v)) - \underset{12}{\Lambda}(b(x,y,z),v,u) - \underset{21}{\Lambda}(b(x,y,u),v,z)-\\
&-\underset{12}{\Lambda}(y,b(x,v,z),u) - \underset{13}{\Lambda}(y,b(x,v,u),z) - [[vb(x,u,z)]u]+\\
&+[vb(x,y,[zu])] + [b(x,[vy],z)u] - b(x,[vy],[zu]) - [y[b(x,v,z)u]]-\\
&-[y[b(x,v,u)z]] + [yb(x,v,[zu]] + [b(x,[vy],u)z] - [[vb(x,y,u)]z,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{22}{c}(x,y,z,u,v) = \underset{14}{\Lambda}(y,x,z,u,v) - \underset{23}{\Lambda}(y,x,z,u,v) + [\underset{2}{c}(x,y,z,v)u]+\\
&+[\underset{2}{c}(x,y,z,u)v] + [\underset{2}{c}(x,y,u,v)z] - \underset{2}{c}(x,y,[zu],v) - \underset{2}{c}(x,y,[zv],u)-\\
&-\underset{2}{c}(x,y,z,[uv]) + \underset{12}{\Lambda}(y,\underset{12}{\Lambda}(x,z,u),v) + \underset{12}{\Lambda}(y,\underset{12}{\Lambda}(x,z,v),u)+\\
&+\underset{12}{\Lambda}(y,\underset{12}{\Lambda}(x,u,v),z) - \underset{12}{\Lambda}(b(x,y,z),u,v) + b(x,y,\underset{12}{\Lambda}(z,u,v))-\\
&-\underset{12}{\Lambda}(b(x,y,v),z,u) - \underset{12}{\Lambda}(b(x,y,u),z,v) - b(x,y,[[zv]u]) + [b(x,y,[zv])u]+\\
&+[b(x,y,[zu])v] - b(x,y,[[zu]v]) + [b(x,y,[uv])z] + [\underset{13}{\Lambda}(x,z,u,v)y]-\\
&-\underset{13}{\Lambda}([xy],z,u,v) - \underset{13}{\Lambda}(y,[xz],u,v) - \underset{13}{\Lambda}(y,z,[xu],v) - \underset{13}{\Lambda}(y,z,u,[xv]).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

С помощью этих соотношений заменяем в полученных равенствах коэффициенты ряда на тензоры и получаем тензорные соотношения, характеризующие эластичные ткани.

3. Для начала рассмотрим окрестности до третьего порядка включительно.

Лемма 1 *В окрестности второго порядка тождество (1) не дает соотношений на основные тензоры ткани.*

Доказательство Используя (18) распишем правую и левую часть выражения (1) до членов второго порядка включительно:

$$x(yx) = x + yx + \Lambda(x, yx) + \{3\} = 2x + y + \Lambda(y,x) + \Lambda(x,x) + \Lambda(x,y) + \{3\};$$

$$(xy)x = xy + x + \Lambda(xy, x) + \{3\} = 2x + y + \Lambda(x,y) + \Lambda(x,x) + \Lambda(y,x) + \{3\}.$$

Как видно, члены первого и второго порядка в этих разложениях одинаковы.

Лемма 2 *При рассмотрении третьей окрестности тождества (1) получаем соотношение на тензор кривизны:*

$$b(x,y,z) = -b(x,z,y).$$

Доказательство Используя (18), распишем правую и левую часть выражения (1). Выпишем только члены третьего порядка:

$$\begin{aligned} \underset{3}{\Lambda}(x(yx)) = \Lambda(x,\Lambda(y,x)) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,y) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,x) + \\ + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,y) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(y,x,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(y,y,x), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \underset{3}{\Lambda}((xy)x) = \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,y) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,y) + \Lambda(\Lambda(x,y),x) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,x) + \\ + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(y,x,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,x) + \underset{21}{\Lambda}(x,y,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(y,y,x). \end{aligned} \tag{28}$$

Приравниваем правые части равенств (27) и (28), приводим подобные:

$$\Lambda(x,\Lambda(y,x)) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,y) = \Lambda(\Lambda(x,y),x) + \underset{21}{\Lambda}(x,y,x),$$

$$\underset{12}{\Lambda}(x,y,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,y,x) + \Lambda(x,\Lambda(y,x)) - \Lambda(\Lambda(x,y),x) = 0.$$

В силу соотношений (19) эти равенства запишем в виде:

$$\underset{12}{\Lambda}(x,y,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,y,x) + [x[yx]] - [[xy]x] = 0.$$

Сравнивая с соотношением (20), получим равенство (17). Линеаризуем его:

$$b(x,u+v,u+v) = 0,$$

$$b(x,u,u) + b(x,u,v) + b(x,v,u) + b(x,v,v) = 0.$$

В силу соотношений (17) отсюда получаем соотношение (9).

Как известно, соотношение (9) необходимо и достаточно для того, чтобы три-ткань была средней тканью Бола [1]. Таким образом, эластичная ткань является средней тканью Бола B_m и для нее справедливы написанные выше соотношения (9)-(12).

Лемма 3 *Коэффициенты третьего порядка ряда Тейлора (18) эластичной ткани связаны между собой соотношением:*

$$\underset{12}{\Lambda}(x,y,z) = \underset{21}{\Lambda}(z,y,x). \tag{29}$$

Доказательство Для доказательства этого факта воспользуемся тождеством (10), которое с учетом (9) перепишем в следующем виде:

$$b(x,y,z)-b(y,x,z)+b(z,x,y)=2([[xy]z]+[[yz]x]+[[zx]y]).$$

Используя соотношение (20), выразим тензор кривизны b через коэффициенты ряда Тейлора и подставим его в предыдущее соотношение. Получим:

$$\begin{aligned}&\underset{12}{\Lambda}(y,x,z)-\underset{21}{\Lambda}(y,x,z)+[y[xz]]-[[yx]z]-\\ &-\underset{12}{\Lambda}(x,y,z)+\underset{21}{\Lambda}(x,y,z)-[x[yz]]+[[xy]z]+\\ &+\underset{12}{\Lambda}(x,z,y)-\underset{21}{\Lambda}(x,z,y)+[x[zy]]-[[xz]y]=\\ &=2([[xy]z]+[[yz]x]+[[zx]y]).\end{aligned}$$

После приведения подобных слагаемых получим (29).

4. Рассмотрим четвертую окрестность равенства (1).

Лемма 4 *При рассмотрении четвертой окрестности тождества (1) получим следующее соотношение на основные тензоры ткани E:*

$$b(x,y,a(x,y))=0. \tag{30}$$

Доказательство 1. Используя (18), распишем правую и левую часть равенства (1). Выпишем только члены четвертого порядка:

$$\begin{aligned}\underset{4}{\Lambda}((xy)x)&=\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y)+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)+\\ &+\frac{1}{2}\Lambda(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x)+\frac{1}{2}\Lambda(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x)+\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x)+\\ &+\underset{21}{\Lambda}(x,\Lambda(x,y),x)+\underset{21}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,x)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,x)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)+\\ &+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,x)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(y,x,x,x)+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x)+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,x)+\\ &+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(y,x,x,x)+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(y,y,x,x)+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x);\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\underset{4}{\Lambda}(x(yx))&=\frac{1}{2}\Lambda(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\frac{1}{2}\Lambda(x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x))+\\ &+\underset{12}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x))+\underset{12}{\Lambda}(x,y,\Lambda(y,x))+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y)+\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,y)+\\ &+\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,x)+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,x)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,y)+\\ &+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,x)+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)+\\ &+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x)+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x).\end{aligned} \tag{32}$$

Приравнивая в правых частях этих равенств коэффициенты при одинаковых наборах переменных, получим равенства:

$$\begin{gathered}\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)+\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x)+\frac{1}{2}\Lambda(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x)+\underset{21}{\Lambda}(x,\Lambda(x,y),x)+\\+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(y,x,x,x)+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(y,x,x,x)=\frac{1}{2}\Lambda(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\\+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x))+\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,y)+\frac{1}{2}\Lambda(x,\underset{21}{\Lambda}(y,x,x)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,y)+\\+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x),\end{gathered}\tag{33}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)+\frac{1}{2}\Lambda(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x)+\underset{21}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,x)+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x)+\\+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(y,y,x,x)=\frac{1}{2}\Lambda(x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))+\underset{12}{\Lambda}(x,y,\Lambda(y,x))+\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,y)+\\+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x).\end{gathered}\tag{34}$$

2. Рассмотрим равенство (33). После приведения подобных придем к равенству

$$\begin{gathered}\underset{12}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x)+\Lambda(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x)+2\underset{21}{\Lambda}(x,\Lambda(x,y),x)+\underset{22}{\Lambda}(y,x,x,x)+\\+\underset{31}{\Lambda}(y,x,x,x)-\Lambda(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-\underset{21}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x))-\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,y)-\\-2\Lambda(x,\underset{21}{\Lambda}(y,x,x)-\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,y)=0.\end{gathered}$$

Перепишем это равенство, воспользовавшись формулой (19):

$$\begin{gathered}\underset{12}{\Lambda}([yx],x,x)+[x\underset{21}{\Lambda}(x,x,y)]+2\underset{21}{\Lambda}([yx],x,x)+\underset{22}{\Lambda}(y,x,x,x)+\\+\underset{31}{\Lambda}(y,x,x,x)-[\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),x]-2\underset{12}{\Lambda}(x,x,[xy])-\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,y)-\\-[\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),x]-\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,y)=0.\end{gathered}\tag{35}$$

В данном равенстве содержатся разности $\underset{31}{\Lambda}(y,x,x,x)-\underset{22}{\Lambda}(x,x,x,y)$ и $\underset{22}{\Lambda}(y,x,x,x)-\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,y)$. Найдём их с помощью формул (21) и (22), из которых получаем:

$$\begin{gathered}\underset{1}{c}(y,x,x,x)=\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,x)-\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,x)+[xb(y,x,x)]+[xb(y,x,x)]-\\-b(y,[xx],x)+[\underset{21}{\Lambda}(x,x,y)x]-\underset{21}{\Lambda}([yx],x,x)-\underset{21}{\Lambda}(x,[yx],x)-\underset{21}{\Lambda}(x,x,[yx]),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\underset{2}{c}(y,x,x,x)=\underset{13}{\Lambda}(x,y,x,x)-\underset{22}{\Lambda}(x,y,x,x)+[b(y,x,x)x]+[b(y,x,x)x]-\\-b(y,x,[xx])-[x\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)]+\underset{12}{\Lambda}([xy],x,x)+\underset{12}{\Lambda}(x,[xy],x)+\underset{12}{\Lambda}(x,x,[xy]).\end{gathered}$$

Так как тензоры $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$, b кососимметричны по второму и третьему аргументу, а операция [ ] также кососимметрична, то отсюда имеем:

$$0 = \underset{22}{\Lambda}(x,x,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,x,y,x) + [\underset{21}{\Lambda}(x,x,y)x] - \\ -\underset{21}{\Lambda}([yx],x,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,[yx],x) - \underset{21}{\Lambda}(x,x,[yx]),$$

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(x,y,x,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,x,x) - [x\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)] + \\ +\underset{12}{\Lambda}([xy],x,x) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],x) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,[xy]).$$

Выразим разности $\underset{31}{\Lambda}(y,x,x,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,x,x,y)$ и $\underset{22}{\Lambda}(y,x,x,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,x,x,y)$. Так как $\underset{31}{\Lambda}$ - симметрична по первым трём, $\underset{22}{\Lambda}$ - по первым двум и последним двум, $\underset{13}{\Lambda}$ - по последним трём аргументам, то получаем:

$$\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,x,y,x) = [\underset{21}{\Lambda}(x,x,y)x] - \\ -\underset{21}{\Lambda}([yx],x,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,[yx],x) - \underset{21}{\Lambda}(x,x,[yx]),$$

$$\underset{22}{\Lambda}(x,y,x,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,y,x,x) = -[x\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)] + \\ +\underset{12}{\Lambda}([xy],x,x) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],x) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,[xy]).$$

Подставив эти разности в (35), получим равенство:

$$\underset{12}{\Lambda}([yx],x,x) + [x\underset{21}{\Lambda}(x,x,y)] + 2\underset{21}{\Lambda}([yx],x,x) - [\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),x] - 2\underset{12}{\Lambda}(x,x,[xy]) - \\ -[\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),x] + [\underset{21}{\Lambda}(x,x,y)x] - \underset{21}{\Lambda}([yx],x,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,[yx],x) - \underset{21}{\Lambda}(x,x,[yx]) - \\ -[x\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],x,x) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],x) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,[xy]) = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно. Таким образом, равенство (33) не дает новых соотношений на тензоры эластичной три-ткани.

3. Рассмотрим равенство (34). Перепишем его в следующей форме, перенеся все слагаемые в одну сторону и приведя подобные:

$$\frac{1}{2}\Lambda(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x) + \underset{21}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,x) + \frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(y,y,x,x) - \\ -\frac{1}{2}\Lambda(x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x)) - \underset{12}{\Lambda}(x,y,\Lambda(y,x)) - \frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,y) = 0.$$

Далее умножим равенство на 2 и заменим Λ по формуле (19):

$$[x\underset{12}{\Lambda}(x,y,y)] + 2\underset{21}{\Lambda}([yx],y,x) + \underset{31}{\Lambda}(y,y,x,x) - \\ -[\underset{21}{\Lambda}(y,y,x)x] - 2\underset{12}{\Lambda}(x,y,[xy]) - \underset{13}{\Lambda}(x,x,y,y) = 0. \tag{36}$$

Равенство содержит разность $\underset{31}{\Lambda}(y,y,x,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,x,y,y)$. Выразим ее через тензоры и многочлены более низкого порядка. Для этого воспользуемся формулами (21) и (22), из которых находим:

$$\underset{1}{c}(y,x,x,y) = \underset{22}{\Lambda}(x,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,x) + [yb(y,x,x)] + [xb(y,y,x)] -$$
$$-b(y,[yx],x) + [\underset{21}{\Lambda}(x,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}([yx],y,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,[yy],x) - \underset{21}{\Lambda}(x,y,[yx]),$$

$$\underset{2}{c}(y,x,x,y) = \underset{13}{\Lambda}(x,y,x,y) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,x,y) + [b(y,x,x)y] + [b(y,x,y)x] -$$
$$-b(y,x,[xy]) - [x\underset{12}{\Lambda}(y,x,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],x,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],y) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,[yy]).$$

Используя кососиметричность тензоров $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$, b и симметричность многочленов ряда Тейлора, получим:

$$0 = \underset{22}{\Lambda}(x,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,x) + [xb(y,y,x)] -$$
$$-b(y,[yx],x) + [\underset{21}{\Lambda}(x,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}([yx],y,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,y,[yx]),$$

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,y,x) + [b(y,x,y)x] -$$
$$-b(y,x,[xy]) - [x\underset{12}{\Lambda}(y,x,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],x,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],y).$$

Складывая, находим разность $\underset{31}{\Lambda}(x,y,y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,x)$:

$$\underset{31}{\Lambda}(x,y,y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,x) = 2[xb(y,y,x)] + [\underset{21}{\Lambda}(x,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}([yx],y,x) -$$
$$-\underset{21}{\Lambda}(x,y,[yx]) + 2b(y,x,[yx]) - [x\underset{12}{\Lambda}(y,x,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],x,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],y).$$

Подставляем найденную разность в исходное тождество (36):

$$2[xb(y,y,x)] + [\underset{21}{\Lambda}(x,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}([yx],y,x) - \underset{21}{\Lambda}(x,y,[yx]) + 2b(y,x,[yx]) -$$
$$-[x\underset{12}{\Lambda}(y,x,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],x,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,[xy],y) + [x\underset{12}{\Lambda}(x,y,y)] + 2\underset{21}{\Lambda}([yx],y,x) -$$
$$-[\underset{21}{\Lambda}(y,y,x)x] - 2\underset{12}{\Lambda}(x,y,[xy]) = 0.$$

Используя кососимметричность коммутатора и симметричность многочленов ряда Тейлора, перепишем это соотношение в следующей форме:

$$[xb(y,y,x)] - [x\underset{21}{\Lambda}(x,y,y)] - [x\underset{12}{\Lambda}(y,y,x)] + [x\underset{12}{\Lambda}(x,y,y)] + [x\underset{21}{\Lambda}(y,y,x)] +$$
$$+2b(y,x,[yx]) + \underset{21}{\Lambda}([xy],y,x) + \underset{21}{\Lambda}(x,y,[xy]) + \underset{12}{\Lambda}([xy],x,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,y,[xy]) -$$
$$-2\underset{21}{\Lambda}([xy],y,x) - 2\underset{12}{\Lambda}(x,y,[xy]) = 0.$$

Приведём подобные:

$$[x, 2b(y, y, x) + \underset{12}{\Lambda}(x, y, y) - \underset{21}{\Lambda}(x, y, y) + \underset{21}{\Lambda}(y, y, x) - \underset{12}{\Lambda}(y, y, x)] +$$
$$+ 2b(y, x, [yx]) + \underset{12}{\Lambda}([xy], y, x) - \underset{21}{\Lambda}([xy], y, x) + \underset{21}{\Lambda}(x, y, [xy]) - \underset{12}{\Lambda}(x, y, [xy]) = 0. \tag{37}$$

Воспользуемся формулой (20), записанной в следующей форме:

$$\underset{12}{\Lambda}(y, x, z) - \underset{21}{\Lambda}(y, x, z) = b(x, y, z) - [y[xz]] + [[yx]z].$$

Отсюда, учитывая кососимметричность коммутатора, получаем следующие тождества:

$$\underset{12}{\Lambda}(x, y, y) - \underset{21}{\Lambda}(x, y, y) = b(y, x, y) + [[xy]y],$$

$$\underset{12}{\Lambda}(y, y, x) - \underset{21}{\Lambda}(y, y, x) = b(y, y, x) - [y[yx]],$$

$$\underset{12}{\Lambda}([xy], y, x) - \underset{21}{\Lambda}([xy], y, x) = b(y, [xy], x) + [[[xy]y]x],$$

$$\underset{12}{\Lambda}(x, y, [xy]) - \underset{21}{\Lambda}(x, y, [xy]) = b(y, x, [xy]) - [x[y[xy]]].$$

Подставляя полученные равенства в (37), получаем:

$$[x, 2b(y, y, x) + b(y, x, y) + [[xy]y] - b(y, y, x) + [y[yx]]] +$$
$$+ 2b(y, x, [yx]) + b(y, [xy], x) + [[[xy]y]x] - b(y, x, [xy]) + [x[y[xy]]] = 0.$$

Приводим подобные, используя кососимметричность тензоров, и приходим к тождеству (30):

$$b(y, x, [yx]) = 0.$$

5. Используя ранее доказанные равенства, можно найти новые соотношения в четвертой окрестности и окрестностях более высокого порядка.

Лемма 5 *Основные тензоры ткани E связаны следующими соотношениями:*

$$b(x, y, [x[xy]]) = 0, \tag{38}$$

$$b(x, x, [xy]) = 0, \tag{39}$$

$$b(x, y, [y[xy]]) = 0, \tag{40}$$

$$b([xy], y, [xy]) = 0, \tag{41}$$

$$b(x, x, [y[xy]]) = 0. \tag{42}$$

Доказательство 1. Линеаризуем соотношение (30) по второму и четвертому аргументу:

$$b(x,u,[xv]) + b(x,v,[xu]) = 0. \tag{43}$$

Полагая в (43) $u = y$ и $v = [xy]$, получим

$$b(x,y,[x[xy]]) + b(x,[xy],[xy]) = 0.$$

В силу кососимметричности тензора b по двум последним аргументам, отсюда получаем соотношение (38).

Полагая в (43) $u = x$ и $v = y$, получаем:

$$b(x,x,[xy]) + b(x,y,[xx]) = 0,$$

из которого следует соотношение (39).

2. Линеаризуем соотношение (30) по первому и третьему аргументу:

$$b(u,y,[vy]) + b(v,y,[uy]) = 0. \tag{44}$$

Полагая в (44) $u = x$ и $v = [xy]$, получим:

$$b(x,y,[[xy]y]) + b([xy],y,[xy]) = 0. \tag{45}$$

Воспользуемся соотношением (11). Положим в нём $z = y$ и $t = [xy]$:

$$b(x,y,[y[xy]]) - b(y,x,[y[xy]]) + b([xy],y,[xy]) = [xb(y,y,[xy])] - [yb(x,y,[xy])],$$

и воспользуемся соотношением (30), а также уже доказанными (38) и (39). В результате придем к равенству

$$b(x,y,[y[xy]]) + b([xy],y,[xy]) = 0. \tag{46}$$

Далее решая систему, состоящую из (46) и (45), получаем соотношения (40) и (41).

3. Линеаризуем соотношение (30):

$$b(x,y,[uv]) + b(u,y,[xv]) + b(x,v,[uy]) + b(u,v,[xy]) = 0.$$

Полагая $x = y$ и $v = [xu]$, получаем:

$$b(x,x,[u[xu]]) + b(u,x,[x[xu]]) + b(x,[xu],[ux]) + b(u,[xu],[xx]) = 0.$$

Отсюда, с учётом ранее доказанного тождества (40) и коссосимметричности тензоров a и b, получаем (42).

Продифференцируем полученное соотношение (30), используя ковариантное дифференцирование $\bigtriangledown$. Для этого перепишем (30) в координатной форме:

$$\underset{j,l}{Sym}\ \underset{k,m}{Sym}\ b^i_{jkp}a^p_{lm} = 0,$$

где $\underset{j,l}{Sym}$ — оператор симметрирования по индексам j и l. Дифференцируем данное соотношение, в силу свойств оператора дифференцирования находим:

$$\underset{j,l}{Sym}\ \underset{k,m}{Sym}\ (\bigtriangledown b^i_{jkp}a^p_{lm} + b^i_{jkp} \bigtriangledown a^p_{lm}) = 0. \tag{47}$$

Используя (13) и (14), получим:

$$\underset{j,l}{Sym}\ \underset{k,m}{Sym}\ (c^i_{jkpq}a^p_{lm} - b^i_{jkp}b^p_{[lm]q}) = 0,$$

$$\underset{j,l}{Sym}\ \underset{k,m}{Sym}\ (b^i_{jsq}a^s_{kp}a^p_{lm} - b^i_{jsk}a^s_{pq}a^p_{lm} - b^i_{jsp}a^s_{qk}a^p_{lm} - \frac{1}{2}b^i_{jkp}b^p_{lmq} + \frac{1}{2}b^i_{jkp}b^p_{mlq}) = 0.$$

Запишем эти равенства в векторной форме и затем отождествим переменные, по которым ведется симметрирование. Получим:

$$b(x,[y[xy]],z) - b(x,[[xy]z],y) - b(x,[zy],[xy]) - \frac{1}{2}b(x,y,b(x,y,z)) + \frac{1}{2}b(x,y,b(y,x,z)) = 0.$$

Полагая здесь $z = x$ или $z = y$, получаем:

$$b(x,[y[xy]],x) - b(x,[[xy]x],y) - b(x,[xy],[xy]) - \frac{1}{2}b(x,y,b(x,y,x)) + \frac{1}{2}b(x,y,b(y,x,x)) = 0,$$

$$b(x,[y[xy]],y) - b(x,[[xy],y]y) - b(x,[yy],[xy]) - \frac{1}{2}b(x,y,b(x,y,y)) + \frac{1}{2}b(x,y,b(y,x,y)) = 0.$$

Далее, пользуясь кососимметричностью тензора b и ранее доказанными соотношениями (38)—(42), получим новые соотношения на тензоры кривизны:

$$b(x,y,b(x,x,y)) = 0, \tag{48}$$

$$b(x,y,b(y,y,x)) = 0. \tag{49}$$

6. Рассмотрим пятую окрестность соотношения (1). Распишем правую и левую часть, используя ряд Тейлора и выпишем только многочлены пятого порядка:

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\Lambda}((xy)x) = {} & \frac{1}{24}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,x,y) + \frac{1}{12}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,y,y) + \frac{1}{12}\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,y)+ \\
& +\frac{1}{24}\underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,y) + \frac{1}{6}\Lambda(\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y),x) + \frac{1}{4}\Lambda(\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y),x)+ \\
& +\frac{1}{6}\Lambda(\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y),x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+ \\
& +\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),y,x) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\Lambda(x,y),\Lambda(x,y),x)+ \\
& +\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x) + \frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x) + \frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x,x)+ \\
& +\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,y,x) + \frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,y,x) + \frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x,x)+ \\
& +\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,x,x) + \frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x,x) + \frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,y,x)+ \\
& +\frac{1}{4}\underset{41}{\Lambda}(x,x,y,y,x) + \frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x,y,y,y,x) + \frac{1}{24}\underset{41}{\Lambda}(y,y,y,y,x)+ \\
& +\frac{1}{4}\underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,x) + \frac{1}{4}\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x) + \frac{1}{12}\underset{32}{\Lambda}(y,y,y,x,x)+ \\
& +\frac{1}{6}\underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,x) + \frac{1}{12}\underset{23}{\Lambda}(y,y,x,x,x) + \frac{1}{24}\underset{14}{\Lambda}(y,x,x,x,x),
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{5}{\Lambda}(x(yx)) = {} & \frac{1}{24}\underset{41}{\Lambda}(y,y,y,y,x) + \frac{1}{12}\underset{32}{\Lambda}(y,y,y,x,x) + \frac{1}{12}\underset{23}{\Lambda}(y,y,x,x,x)+ \\
& +\frac{1}{24}\underset{14}{\Lambda}(y,x,x,x,x) + \Lambda(x,\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x)) + \Lambda(x,\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x))+ \\
& +\Lambda(x,\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(y,y,x)) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+ \\
& +\underset{12}{\Lambda}(x,x,\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(y,y,x)) + \underset{12}{\Lambda}(x,x,\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)) + \underset{12}{\Lambda}(x,y,\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))+ \\
& +\underset{12}{\Lambda}(x,y,\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,\Lambda(y,x),\Lambda(y,x)) + \frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,\Lambda(y,x))+ \\
& +\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x),x) + \frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x),y) + \frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,\Lambda(y,x))+ \\
& +\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,\Lambda(y,x)) + \frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,\Lambda(y,x),y,y) + \frac{1}{24}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+ \\
& +\frac{1}{6}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,x,y) + \frac{1}{12}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,y,y) + \frac{1}{4}\underset{23}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+ \\
& +\frac{1}{4}\underset{23}{\Lambda}(x,x,x,y,y) + \frac{1}{12}\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,y) + \frac{1}{6}\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+ \\
& +\frac{1}{4}\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,y,y) + \frac{1}{6}\underset{14}{\Lambda}(x,x,y,y,y) + \frac{1}{24}\underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,y).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Далее приравниваем правые части (50) и (51). Приравнивая компоненты с одинаковым набором переменных получим три равенства:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\Lambda(\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x),x)+\frac{1}{6}\Lambda(\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y),x)+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\\
&-\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\\
&+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x,x)-\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,\Lambda(y,x))+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x,x)-\\
&-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x),x)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,x,x)-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,\Lambda(y,x))+\\
&+\frac{1}{4}\underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,x)-\frac{1}{6}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,y,x)-\\
&-\frac{1}{4}\underset{23}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,x)-\frac{1}{6}\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,x,y)=0,
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Lambda(\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y),x)+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x)+\\
&+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\Lambda(x,y),\Lambda(x,y),x)+\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,y,x)+\\
&+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,x,x)+\frac{1}{4}\underset{41}{\Lambda}(x,x,y,y,x)+\frac{1}{4}\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x)-\\
&-\frac{1}{4}\Lambda(x,\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x))-\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\\
&-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,\Lambda(y,x),\Lambda(y,x))-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,\Lambda(y,x),y)-\\
&-\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,\Lambda(y,x))-\frac{1}{4}\underset{23}{\Lambda}(x,x,x,y,y)-\frac{1}{4}\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,y,y)=0,
\end{aligned}
\tag{53}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\Lambda(\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y),x)+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),y,x)+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),y,y,x)+\\
&+\frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x,y,y,y,x)-\Lambda(x,\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\\
&-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,\Lambda(y,x),y,y)-\frac{1}{6}\underset{14}{\Lambda}(x,x,y,y,y)=0.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Лемма 6 *Равенство (52) удовлетворяется тождественно.*

Доказательство 1. Сначала с помощью формулы (19) исключим в (52) многочлены Λ:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{6}[x\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)]+\frac{1}{6}[x\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)]+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\\
-\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\\
+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}([yx],x,x,x)-\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,[xy])+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([yx],x,x,x)-\\
-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,[xy],x)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}([yx],x,x,x)-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,[xy])+\\
+\frac{1}{4}\underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,x)-\frac{1}{6}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,y,x)-\\
-\frac{1}{4}\underset{23}{\Lambda}(x,x,x,x,y)+\frac{1}{6}\underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,x)-\frac{1}{6}\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,x,y)=0.
\end{gathered}
\tag{55}
$$

2. Равенство (55) содержит разности: $\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,y,x)-\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,y,x)$, $\underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,x)-\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,x,y)$ и $\underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,x)-\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,x,x)$. Выразим их через многочлены более низкого порядка и тензоры три-ткани с помощью формул (23)-(26):

$$
\begin{gathered}
\underset{11}{c}(y,x,x,x,x)=\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,y,x)-\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,y,x)+[x\underset{1}{c}(y,x,x,x)]+\\
+[x\underset{1}{c}(y,x,x,x)]+[x\underset{1}{c}(y,x,x,x)]-\underset{1}{c}(y,[xx],x,x)-\underset{1}{c}(y,[xx],x,x)-\\
-\underset{1}{c}(y,x,x,[xx])+[\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)x]+\underset{31}{\Lambda}([xy],x,x,x)-\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,[yx])-\\
-\underset{31}{\Lambda}(x,[yx],x,x)-\underset{31}{\Lambda}(x,x,[yx],x)+[xb(y,[xx],x)]+[xb(y,[xx],x)]+\\
+[xb(y,[xx],x)]-b(y,[x[xx]],x)-b(y,[x[xx]],x)+b(y,\underset{21}{\Lambda}(x,x,x),x)-\\
-\underset{21}{\Lambda}(x,x,b(y,x,x))-\underset{21}{\Lambda}(x,x,b(y,x,x))-\underset{21}{\Lambda}(x,x,b(y,x,x))-\\
-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\underset{22}{c}(y,x,x,x,x)=\underset{14}{\Lambda}(x,y,x,x,x)-\underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,x)+[\underset{2}{c}(y,x,x,x)x]+\\
+[\underset{2}{c}(y,x,x,x)x]+[\underset{2}{c}(y,x,x,x)x]-\underset{2}{c}(y,x,[xx],x)-\underset{2}{c}(y,x,[xx],x)-\\
-\underset{2}{c}(y,x,x,[xx])+\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),x)+\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),x)+\\
+\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),x)-\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,x),x,x)+b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,x,x))-\\
-\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,x),x,x)-\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,x),x,x)-b(y,x,[[xx]x])+[b(y,x,[xx])x]+\\
+[b(y,x,[xx])x]-b(y,x,[[xx]x])+[b(y,x,[xx])x]+[\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)x]-\\
-\underset{13}{\Lambda}([yx],x,x,x)-\underset{13}{\Lambda}(x,[yx],x,x)-\underset{13}{\Lambda}(x,x,[yx],x)-\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,[yx]),
\end{gathered}
$$

$$\begin{aligned}
\underset{12}{c}(y,x,x,x,x) = \underset{23}{\varLambda}(x,x,y,x,x) - \underset{32}{\varLambda}(x,x,y,x,x) + [\underset{1}{c}(y,x,x,x)x]+\\
+[\underset{1}{c}(y,x,x,x,)x] - \underset{1}{c}(y,x,[xx],x) + [x\underset{2}{c}(y,x,x,x)] + [x\underset{2}{c}(y,x,x,x)]-\\
-\underset{2}{c}(y,[xx],x,x) - \underset{22}{\varLambda}(x,x,[yx],x) - \underset{22}{\varLambda}(x,x,[yx],x) + \underset{22}{\varLambda}([xy],x,x,x)+\\
+\underset{22}{\varLambda}(x,[xy],x,x) + \underset{21}{\varLambda}(x,x,\underset{12}{\varLambda}(y,x,x)) - \underset{12}{\varLambda}(\underset{21}{\varLambda}(x,x,y),x,x)+\\
+b(y,b(x,x,x),x) - \underset{12}{\varLambda}(x,b(y,x,x),x) - \underset{12}{\varLambda}(x,b(y,x,x),x)-\\
-\underset{21}{\varLambda}(b(y,x,x),x,x) - \underset{21}{\varLambda}(b(y,x,x),x,x) - [x[b(y,x,x)x]] + [xb(y,x,[xx])]-\\
-[[xb(y,x,x)]x] - [[xb(y,x,x)]x] - [x[b(y,x,x)x]] + [xb(y,x,[xx])]+\\
+[b(y,[xx],x)x] + [b(y,[xx],x)x] - b(y,[xx],[xx]).
\end{aligned}$$

Перепишем эти сотношения, используя кососимметричность тензоров $\underset{11}{c}$, $\underset{12}{c}$, $\underset{22}{c}$, $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$ и тензора b по второму и третьему аргументам, а также кососимметричность оператора [ ]:

$$\begin{aligned}
0 = \underset{32}{\varLambda}(x,x,x,y,x) - \underset{41}{\varLambda}(x,x,x,y,x) + [\underset{31}{\varLambda}(x,x,x,y)x] + \underset{31}{\varLambda}([xy],x,x,x)-\\
-\underset{31}{\varLambda}(x,x,x,[yx]) - \underset{31}{\varLambda}(x,[yx],x,x) - \underset{31}{\varLambda}(x,x,[yx],x) + b(y,\underset{21}{\varLambda}(x,x,x),x)-\\
-\underset{21}{\varLambda}(\underset{21}{\varLambda}(x,x,y),x,x) - \underset{21}{\varLambda}(\underset{21}{\varLambda}(x,x,y),x,x) - \underset{21}{\varLambda}(\underset{21}{\varLambda}(x,x,y),x,x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \underset{14}{\varLambda}(x,y,x,x,x) - \underset{23}{\varLambda}(x,y,x,x,x) + \underset{12}{\varLambda}(x,\underset{12}{\varLambda}(y,x,x),x) + \underset{12}{\varLambda}(x,\underset{12}{\varLambda}(y,x,x),x)+\\
+\underset{12}{\varLambda}(x,\underset{12}{\varLambda}(y,x,x),x) + b(y,x,\underset{12}{\varLambda}(x,x,x)) + [\underset{13}{\varLambda}(y,x,x,x)x] - \underset{13}{\varLambda}([yx],x,x,x)-\\
-\underset{13}{\varLambda}(x,[yx],x,x) - \underset{13}{\varLambda}(x,x,[yx],x) - \underset{13}{\varLambda}(x,x,x,[yx]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \underset{23}{\varLambda}(x,x,y,x,x) - \underset{32}{\varLambda}(x,x,y,x,x) - \underset{22}{\varLambda}(x,x,[yx],x) - \underset{22}{\varLambda}(x,x,[yx],x)+\\
+\underset{22}{\varLambda}([xy],x,x,x) + \underset{22}{\varLambda}(x,[xy],x,x) + \underset{21}{\varLambda}(x,x,\underset{12}{\varLambda}(y,x,x)) - \underset{12}{\varLambda}(\underset{21}{\varLambda}(x,x,y),x,x).
\end{aligned}$$

Далее приводим подобные и выражаем искомые разности:

$$\begin{aligned}
\underset{41}{\varLambda}(x,x,x,y,x) - \underset{32}{\varLambda}(x,x,x,y,x) = [\underset{31}{\varLambda}(x,x,x,y)x] + 3\underset{31}{\varLambda}([xy],x,x,x)+\\
+\underset{31}{\varLambda}(x,x,x,[xy]) + b(y,\underset{21}{\varLambda}(x,x,x),x) - 3\underset{21}{\varLambda}(\underset{21}{\varLambda}(x,x,y),x,x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{23}{\varLambda}(x,y,x,x,x) - \underset{14}{\varLambda}(x,y,x,x,x) = 3\underset{12}{\varLambda}(x,\underset{12}{\varLambda}(y,x,x),x) + b(y,x,\underset{12}{\varLambda}(x,x,x))+\\
+[\underset{13}{\varLambda}(y,x,x,x)x] + \underset{13}{\varLambda}([xy],x,x,x) + 3\underset{13}{\varLambda}(x,[xy],x,x),
\end{aligned}$$

$$\underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,x)-\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,x,x)=2\underset{22}{\Lambda}(x,x,[xy],x)+2\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,x)+$$
$$+\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x).$$

3. Подставляем найденные разности в (55):

$$\frac{1}{6}[x\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)]+\frac{1}{6}[x\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)]+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-$$
$$-\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))+$$
$$+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}([yx],x,x,x)-\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,[xy])+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([yx],x,x,x)-$$
$$-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,[xy],x)+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}([yx],x,x,x)-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,x,x,[xy])+$$
$$+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,[xy],x)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,x)+\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-$$
$$-\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)+\frac{1}{6}[\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y)x]+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}([xy],x,x,x)+$$
$$+\frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,[xy])+\frac{1}{6}b(y,\underset{21}{\Lambda}(x,x,x),x)-\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),x)+\frac{1}{6}b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,x,x))+\frac{1}{6}[\underset{13}{\Lambda}(y,x,x,x)x]+$$
$$+\frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}([xy],x,x,x)+\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,[xy],x,x)=0.$$

Приводим подобные, используя лемму 3, и получаем, что данное равенство удовлетворяется тождественно.

Лемма 7 *Равенство (53) удовлетворяется тождественно.*

Доказательство 1. Для начала заменим в (53) многочлены Λ, используя (19):

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}[x\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)]+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x)+\\+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\Lambda(x,y),\Lambda(x,y),x)+\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\underset{31}{\Lambda}(\Lambda(x,y),x,y,x)+\\+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([yx],y,x,x)+\frac{1}{4}\underset{41}{\Lambda}(x,x,y,y,x)+\frac{1}{4}\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x)-\\-\frac{1}{4}[\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x)x]-\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\\-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,\Lambda(y,x),\Lambda(y,x))-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,[xy],y)-\\-\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,[xy])-\frac{1}{4}\underset{23}{\Lambda}(x,x,x,y,y)-\frac{1}{4}\underset{14}{\Lambda}(x,x,x,y,y)=0.\end{gathered}\tag{56}$$

Данное равенство содержит разности $\underset{41}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{14}{\Lambda}(x,y,x,y,x)$ и $\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,x)$. Выразим их через многочлены более низкого порядка и тензоры три-ткани.

2. Рассмотрим первую разность. Используя формулы (23)-(26), находим:

$$
\begin{aligned}
\underset{11}{c}(y,x,x,y,x) &= \underset{32}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{41}{\Lambda}(x,y,x,y,x) + [x\underset{1}{c}(y,x,x,y)]+\\
&+[y\underset{1}{c}(y,x,x,x)] + [x\underset{1}{c}(y,x,x,y)] - \underset{1}{c}(y,[yx],x,x) - \underset{1}{c}(y,[xx],x,y)-\\
&-\underset{1}{c}(y,x,x,[xy]) + [\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,y)x] + \underset{31}{\Lambda}([xy],x,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,x,y,[yx])-\\
&-\underset{31}{\Lambda}(x,[yx],y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,x,[yy],x) + [xb(y,[yx],x)] + [yb(y,[xx],x)]+\\
&+[xb(y,[yx],x)] - b(y,[x[yx]],x) - b(y,[y[xx]],x) + b(y,\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),x)-\\
&-\underset{21}{\Lambda}(x,y,b(y,x,x)) - \underset{21}{\Lambda}(x,x,b(y,y,x)) - \underset{21}{\Lambda}(y,x,b(y,x,x))-\\
&-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,x,y),x,x) - \underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),x,x) - \underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{12}{c}(x,y,y,x,x) &= \underset{23}{\Lambda}(y,x,x,y,x) - \underset{32}{\Lambda}(y,x,x,y,x) + [\underset{1}{c}(x,y,x,x)y]+\\
&+[\underset{1}{c}(x,y,y,x)x] - \underset{1}{c}(x,y,[yx],x) + [y\underset{2}{c}(x,x,y,x)] + [x\underset{2}{c}(x,y,y,x)]-\\
&-\underset{2}{c}(x,[xy],y,x) - \underset{22}{\Lambda}(y,x,[xx],y) - \underset{22}{\Lambda}(y,x,[xy],x) + \underset{22}{\Lambda}([yx],x,y,x)+\\
&+\underset{22}{\Lambda}(y,[xx],y,x) + \underset{21}{\Lambda}(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,y,x)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),y,x)+\\
&+b(x,b(y,x,x),y) - \underset{12}{\Lambda}(y,b(x,x,y),x) - \underset{12}{\Lambda}(x,b(x,y,y),x)-\\
&-\underset{21}{\Lambda}(b(x,y,x),x,y) - \underset{21}{\Lambda}(b(x,x,x),y,y) - [y[b(x,x,y)x]] + [yb(x,x,[yx])]-\\
&-[[xb(x,y,x)]y] - [[yb(x,x,x)]y] - [x[b(x,y,y)x]] + [yb(x,y,[yx])]+\\
&+[b(x,[xy],y)x] + [b(x,[xy],x)y] - b(x,[xy],[yx]),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{22}{c}(y,x,x,y,x) &= \underset{14}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,y,x,y,x) + [\underset{2}{c}(y,x,x,x)y]+\\
&+[\underset{2}{c}(y,x,x,y)x] + [\underset{2}{c}(y,x,y,x)x] - \underset{2}{c}(y,x,[xy],x) - \underset{2}{c}(y,x,[xx],y)-\\
&-\underset{2}{c}(y,x,x,[yx]) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,y),x) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),y)+\\
&+\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x),x) - \underset{12}{\Lambda}(b(y,x,x),y,x) + b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,y,x))-\\
&-\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,x),x,y) - \underset{12}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) - b(y,x,[[xx]y]) + [b(y,x,[xx])y]+\\
&+[b(y,x,[xy])x] - b(y,x,[[xy]x]) + [b(y,x,[yx])x] + [\underset{13}{\Lambda}(y,x,y,x)x]-\\
&-\underset{13}{\Lambda}([yx],x,y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,[yx],y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,x,[yy],x) - \underset{13}{\Lambda}(x,x,y,[yx]).
\end{aligned}
$$

Упрощаем, используя кососимметричность тензоров и соотношения (12), (30), (38)-(42) :

$$\begin{aligned}0 = \underset{32}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{41}{\Lambda}(x,y,x,y,x) + [\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,y)x] + \\ +2\underset{31}{\Lambda}([xy],x,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,x,y,[yx]) + b(y,\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),x) - \\ -\underset{21}{\Lambda}(x,x,b(y,y,x)) - 2\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),x,x) - \underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = \underset{23}{\Lambda}(y,x,x,y,x) - \underset{32}{\Lambda}(y,x,x,y,x) - \underset{22}{\Lambda}(y,x,[xy],x) + \underset{22}{\Lambda}([yx],x,y,x) + \\ +\underset{21}{\Lambda}(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,y,x)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),y,x) - \underset{12}{\Lambda}(y,b(x,x,y),x) - \\ -\underset{21}{\Lambda}(b(x,y,x),x,y) - [y[b(x,x,y)x]] - [[xb(x,y,x)]y],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = \underset{14}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,y,x,y,x) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),y) + \\ +2\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x),x) + b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,y,x)) - \underset{12}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) + \\ +[\underset{13}{\Lambda}(y,x,y,x)x] - \underset{13}{\Lambda}([yx],x,y,x) - 2\underset{13}{\Lambda}(x,[yx],y,x).\end{aligned}$$

Сложим эти три равенства и выразим разность $\underset{41}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{14}{\Lambda}(x,y,x,y,x)$:

$$\begin{aligned}\underset{41}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{14}{\Lambda}(x,y,x,y,x) = [\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,y)x] + 2\underset{31}{\Lambda}([xy],x,y,x) - \\ -\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,[yx]) + b(y,\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),x) - \underset{21}{\Lambda}(x,x,b(y,y,x)) - 2\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),x,x) - \\ -\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x),y) - \underset{22}{\Lambda}(y,x,[xy],x) + \underset{22}{\Lambda}([yx],x,y,x) + \\ +\underset{21}{\Lambda}(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,y,x)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,x,x),y,x) - \underset{12}{\Lambda}(y,b(x,x,y),x) - \underset{21}{\Lambda}(b(x,y,x),x,y) - \\ -[y[b(x,x,y)x]] - [[xb(x,y,x)]y] + 2\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x),x) + b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(x,y,x)) - \\ -\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) + [\underset{13}{\Lambda}(y,x,y,x)x] - \underset{13}{\Lambda}([yx],x,y,x) - 2\underset{13}{\Lambda}(x,[yx],y,x).\end{aligned}$$

Приведём подобные, используя кососимметричность тензора b и оператора [ ], а также симметричность многочленов и формулу (29):

$$\begin{aligned}\underset{41}{\Lambda}(x,y,x,y,x) - \underset{14}{\Lambda}(x,y,x,y,x) = [\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,y)x] + [\underset{13}{\Lambda}(y,x,y,x)x] + \\ +2\underset{31}{\Lambda}([xy],x,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,x,y,[yx]) - \underset{22}{\Lambda}(y,x,[xy],x) + \\ +\underset{22}{\Lambda}([yx],x,y,x) - \underset{13}{\Lambda}([yx],x,y,x) - 2\underset{13}{\Lambda}(x,[yx],y,x).\end{aligned} \tag{57}$$

3. Теперь найдём разность $\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x)-\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,x)$. Для этого используем формулу (24). Из нее находим:

$$\begin{aligned}
\underset{12}{c}(y,x,x,y,x) &= \underset{23}{\Lambda}(x,y,y,x,x)-\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x)+[\underset{1}{c}(y,x,x,y)x]+\\
&+[\underset{1}{c}(y,x,x,y)x]-\underset{1}{c}(y,x,[xx],y)+[x\underset{2}{c}(y,y,x,x)]+[y\underset{2}{c}(y,x,x,x)]-\\
&-\underset{2}{c}(y,[yx],x,x)-\underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],x)-\underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],x)+\underset{22}{\Lambda}([xy],y,x,x)+\\
&+\underset{22}{\Lambda}(x,[yy],x,x)+\underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\\
&+b(y,b(x,y,x),x)-\underset{12}{\Lambda}(x,b(y,y,x),x)-\underset{12}{\Lambda}(y,b(y,x,x),x)-\\
&-\underset{21}{\Lambda}(b(y,x,x),y,x)-\underset{21}{\Lambda}(b(y,y,x),x,x)-[x[b(y,y,x)x]]+[xb(y,y,[xx])]-\\
&-[[yb(y,x,x)]x]-[[xb(y,y,x)]x]-[y[b(y,x,x)x]]+[xb(y,x,[xx])]+\\
&+[b(y,[yx],x)x]+[b(y,[yx],x)x]-b(y,[yx],[xx]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{12}{c}(x,x,x,y,y) &= \underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,y)-\underset{32}{\Lambda}(x,y,x,x,y)+[\underset{1}{c}(x,x,y,y)x]+\\
&+[\underset{1}{c}(x,x,x,y)y]-\underset{1}{c}(x,x,[xy],y)+[x\underset{2}{c}(x,y,x,y)]+[y\underset{2}{c}(x,x,x,y)]-\\
&-\underset{2}{c}(x,[yx],x,y)-\underset{22}{\Lambda}(x,y,[xy],x)-\underset{22}{\Lambda}(x,y,[xx],y)+\underset{22}{\Lambda}([xx],y,x,y)+\\
&+\underset{22}{\Lambda}(x,[yx],x,y)+\underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(x,x,y))-\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,x),x,y)+\\
&+b(x,b(x,y,y),x)-\underset{12}{\Lambda}(x,b(x,y,x),y)-\underset{12}{\Lambda}(y,b(x,x,x),y)-\\
&-\underset{21}{\Lambda}(b(x,x,y),y,x)-\underset{21}{\Lambda}(b(x,y,y),x,x)-[x[b(x,y,x)y]]+[xb(x,y,[xy])]-\\
&-[[yb(x,x,y)]x]-[[xb(x,y,y)]x]-[y[b(x,x,x)y]]+[xb(x,x,[xy])]+\\
&+[b(x,[yx],x)y]+[b(x,[yx],y)x]-b(x,[yx],[xy]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{12}{c}(y,x,x,x,y) &= \underset{23}{\Lambda}(x,x,y,x,y)-\underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,y)+[\underset{1}{c}(y,x,y,x)x]+\\
&+[\underset{1}{c}(y,x,x,x)y]-\underset{1}{c}(y,x,[xy],x)+[x\underset{2}{c}(y,x,x,y)]+[x\underset{2}{c}(y,x,x,y)]-\\
&-\underset{2}{c}(y,[xx],x,y)-\underset{22}{\Lambda}(x,x,[yy],x)-\underset{22}{\Lambda}(x,x,[yx],y)+\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,y)+\\
&+\underset{22}{\Lambda}(x,[xy],x,y)+\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,y))-\underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,y)+\\
&+b(y,b(x,x,y),x)-\underset{12}{\Lambda}(x,b(y,x,x),y)-\underset{12}{\Lambda}(x,b(y,x,x),y)-\\
&-\underset{21}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x)-\underset{21}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x)-[x[b(y,x,x)y]]+[xb(y,x,[xy])]-\\
&-[[xb(y,x,y)]x]-[[xb(y,x,y)]x]-[x[b(y,x,x)y]]+[xb(y,x,[xy])]+\\
&+[b(y,[xx],x)y]+[b(y,[xx],y)x]-b(y,[xx],[xy]).
\end{aligned}$$

Используя кососимметричность тензоров и формулы (12), (30), (38) — (42), упростим эти выражения:

$$
\begin{aligned}
0 = \underset{23}{\Lambda}(x,y,y,x,x) - \underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x) - 2\underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],x) + \\
+\underset{22}{\Lambda}([xy],y,x,x) + \underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),x,x) + b(y,b(x,y,x),x) - \\
-\underset{12}{\Lambda}(x,b(y,y,x),x) - \underset{21}{\Lambda}(b(y,y,x),x,x) - 2[x[b(y,y,x)x]],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \underset{23}{\Lambda}(x,y,x,x,y) - \underset{32}{\Lambda}(x,y,x,x,y) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,[xy],x) + \underset{22}{\Lambda}(x,[yx],x,y) + \\
+\underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(x,x,y)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,x),x,y) - \underset{12}{\Lambda}(x,b(x,y,x),y) - \underset{21}{\Lambda}(b(x,x,y),y,x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \underset{23}{\Lambda}(x,x,y,x,y) - \underset{32}{\Lambda}(x,x,y,x,y) - \underset{22}{\Lambda}(x,x,[yx],y) + 2\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,y) + \\
+\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,y)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,y) + b(y,b(x,x,y),x) - \\
-\underset{21}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) - \underset{21}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) - 2[[xb(y,x,y)]x].
\end{aligned}
$$

Вычтем второе равенство из суммы первого и третьего. После некоторых преобразований получим:

$$
\begin{aligned}
\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,x) = -2\underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],x) + \underset{22}{\Lambda}([xy],y,x,x) + \\
+\underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),x,x) + b(y,b(x,y,x),x) - \underset{12}{\Lambda}(x,b(y,y,x),x) - \\
-\underset{21}{\Lambda}(b(y,y,x),x,x) - 2[x[b(y,y,x)x]] + \underset{22}{\Lambda}(x,y,[xy],x) - \underset{22}{\Lambda}(x,[yx],x,y) - \\
-\underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(x,x,y)) + \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,x),x,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,b(x,y,x),y) + \underset{21}{\Lambda}(b(x,x,y),y,x) + \\
-\underset{22}{\Lambda}(x,x,[yx],y) + 2\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,y) + \underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{12}{\Lambda}(y,x,y)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),x,y) + \\
+b(y,b(x,x,y),x) - \underset{21}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) - \underset{21}{\Lambda}(b(y,x,y),x,x) - 2[[xb(y,x,y)]x].
\end{aligned}
$$

Приведём подобные, используя кососимметричность тензора b и коммутатора [ ], а также соотношение (29). Получим:

$$
\begin{aligned}
\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,x,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,x) = -3\underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],x) + \\
+\underset{22}{\Lambda}([xy],y,x,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,x,[yx],y) + 3\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,y).
\end{aligned}
\tag{58}
$$

4. Найденные нами разности (57) и (58) подставим в исходное тождество (56):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}[x\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)]+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,x,y),y,x)+\\
&+\frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}([xy],[xy],x)+\frac{1}{4}\underset{12}{\Lambda}(\underset{12}{\Lambda}(x,y,y),x,x)+\underset{31}{\Lambda}([yx],x,y,x)+\\
&+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([yx],y,x,x)-\frac{1}{4}[\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x)x]-\frac{1}{4}\underset{21}{\Lambda}(x,x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\\
&-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,x,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,x,x))-\frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,[xy],[xy])-\\
&-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,x,[xy],y)-\underset{13}{\Lambda}(x,x,y,[xy])+\frac{1}{4}[\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,y)x]+\\
&+\frac{1}{4}[\underset{13}{\Lambda}(y,x,y,x)x]+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}([xy],x,y,x)-\frac{1}{4}\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,[yx])-\\
&-\frac{1}{4}\underset{13}{\Lambda}([yx],x,y,x)-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,[yx],y,x)-\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],x)+\\
&+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}([xy],y,x,x)-\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,[yx],y)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([xy],x,x,y)=0
\end{aligned}$$

Приведём подобные, пользуясь кососимметричностью коммутатора и соотношением (29). Получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}[x,\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y)-\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,y)+\underset{22}{\Lambda}(y,y,x,x)-\underset{13}{\Lambda}(y,x,y,x)]+\\
&+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}([yx],y,x,x)-\frac{1}{4}\underset{13}{\Lambda}([yx],y,x,x)+\frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,[yx])-\frac{1}{4}\underset{31}{\Lambda}(x,x,y,[yx])+\\
&+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}([xy],x,y,x)-\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}([xy],x,y,x)+\frac{1}{2}\underset{22}{\Lambda}(x,y,x,[xy])-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,y,x,[xy])=0.
\end{aligned} \tag{59}$$

5. Как видим, в (59) встречается одна и та же сумма: $\underset{22}{\Lambda}(x,y,z,u)-\underset{31}{\Lambda}(x,y,z,u)+\underset{22}{\Lambda}(u,z,y,x)-\underset{13}{\Lambda}(u,z,y,x)$. Найдём её с помощью формул (21) — (22), из которых следует:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{c}(x,y,z,u)=\underset{22}{\Lambda}(y,u,x,z)-\underset{31}{\Lambda}(y,u,x,z)+[ub(x,y,z)]+[yb(x,u,z)]-\\
&-b(x,[uy],z)+[\underset{21}{\Lambda}(y,u,x)z]-\underset{21}{\Lambda}([xy],u,z)-\underset{21}{\Lambda}(y,[xu],z)-\underset{21}{\Lambda}(y,u,[xz]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{2}{c}(x,z,y,u)=\underset{13}{\Lambda}(z,x,y,u)-\underset{22}{\Lambda}(z,x,y,u)+[b(x,z,y)u]+[b(x,z,u)y]-\\
&-b(x,z,[yu])-[z\underset{12}{\Lambda}(x,y,u)]+\underset{12}{\Lambda}([zx],y,u)+\underset{12}{\Lambda}(z,[yx],u)+\underset{12}{\Lambda}(z,y,[ux]).
\end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе. С учётом (12) получим:

$$\begin{gathered}2c(x,y,z,u)=\underset{22}{\Lambda}(y,u,x,z)-\underset{31}{\Lambda}(y,u,x,z)+[ub(x,y,z)]+[yb(x,u,z)]-\\ -b(x,[uy],z)+[\underset{21}{\Lambda}(y,u,x)z]-\underset{21}{\Lambda}([xy],u,z)-\underset{21}{\Lambda}(y,[xu],z)-\underset{21}{\Lambda}(y,u,[xz])-\\ -\underset{13}{\Lambda}(z,x,y,u)+\underset{22}{\Lambda}(z,x,y,u)-[b(x,z,y)u]-[b(x,z,u)y]+\\ +b(x,z,[yu])+[z\underset{12}{\Lambda}(x,y,u)]-\underset{12}{\Lambda}([zx],y,u)-\underset{12}{\Lambda}(z,[yx],u)-\underset{12}{\Lambda}(z,y,[ux]).\end{gathered}$$

Приведём подобные, используя кососимметричность тензоров и соотношение (29). Получим:

$$\begin{gathered}2c(x,y,z,u)-2b(x,z,[uy])=\underset{22}{\Lambda}(y,u,x,z)-\underset{31}{\Lambda}(y,u,x,z)-\\ -\underset{13}{\Lambda}(z,x,u,y)+\underset{22}{\Lambda}(z,x,u,y).\end{gathered} \tag{60}$$

6. Подставляя соотношение (60) в (59), придем к равенству

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}[x,2\underset{1}{c}(y,x,y,x)-2b(y,y,[xx])]+\frac{1}{4}(2c(x,[yx],x,y)-2b(x,x,[y[yx]]))+\\ +\frac{1}{2}(2c(y,[xy],x,x)-2b(y,x,[x[xy]]))=0.\end{gathered}$$

Это равенство удовлетворяется тождественно в силу (12) и леммы 5.

Лемма 8 *Равенство (54) удовлетворяется тождественно.*

Доказательство 1. Сначала перепишем равенство (54), используя формулы (19) и (29):

$$\begin{gathered}\frac{1}{6}[x\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y)]+\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}([yx],y,y,x)+\frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x,y,y,y,x)-\\ -\frac{1}{6}[\underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x)x]-\frac{1}{2}\underset{13}{\Lambda}(x,[xy],y,y)-\frac{1}{6}\underset{14}{\Lambda}(x,x,y,y,y)=0.\end{gathered} \tag{61}$$

2. Как видим, в данном равенстве присутствует разность $\underset{41}{\Lambda}(x,y,y,y,x)-\underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,x)$. Найдём её, воспользовавшись формулами (23) — (26), из которых находим:

$$\begin{gathered}\underset{11}{c}(y,x,x,y,y)=\underset{32}{\Lambda}(x,y,y,y,x)-\underset{41}{\Lambda}(x,y,y,y,x)+[x\underset{1}{c}(y,y,x,y)]+\\ +[y\underset{1}{c}(y,x,x,y)]+[y\underset{1}{c}(y,x,x,y)]-\underset{1}{c}(y,[yx],x,y)-\underset{1}{c}(y,[yx],x,y)-\\ -\underset{1}{c}(y,x,x,[yy])+[\underset{31}{\Lambda}(y,x,y,y)x]+\underset{31}{\Lambda}([yy],x,y,x)-\underset{31}{\Lambda}(y,x,y,[yx])-\\ -\underset{31}{\Lambda}(y,[yx],y,x)-\underset{31}{\Lambda}(y,x,[yy],x)+[xb(y,[yy],x)]+[yb(y,[yx],x)]+\\ +[yb(y,[yx],x)]-b(y,[y[yx]],x)-b(y,[y[yx]],x)+b(y,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x),x)-\\ -\underset{21}{\Lambda}(x,y,b(y,y,x))-\underset{21}{\Lambda}(x,y,b(y,y,x))-\underset{21}{\Lambda}(y,y,b(y,x,x))-\\ -\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,y,y),x,x)-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),y,x)-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),y,x),\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\underset{12}{c}(y,x,y,y,x) = \underset{23}{\Lambda}(x,y,y,y,x) - \underset{32}{\Lambda}(x,y,y,y,x) + [\underset{1}{c}(y,x,x,y)y]+\\
+[\underset{1}{c}(y,x,y,y,)x] - \underset{1}{c}(y,x,[yx],y) + [x\underset{2}{c}(y,y,y,x)] + [y\underset{2}{c}(y,x,y,x)]-\\
-\underset{2}{c}(y,[yx],y,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],y) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,[yy],x) + \underset{22}{\Lambda}([xy],y,y,x)+\\
+\underset{22}{\Lambda}(x,[yy],y,x) + \underset{21}{\Lambda}(x,y,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x)) - \underset{12}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),y,x)+\\
+b(y,b(x,y,x),y) - \underset{12}{\Lambda}(x,b(y,y,y),x) - \underset{12}{\Lambda}(y,b(y,x,y),x)-\\
-\underset{21}{\Lambda}(b(y,x,x),y,y) - \underset{21}{\Lambda}(b(y,y,x),x,y) - [x[b(y,y,y)x]] + [xb(y,y,[yx])]-\\
-[[yb(y,x,x)]y] - [[xb(y,y,x)]y] - [y[b(y,x,y)x]] + [xb(y,x,[yx])]+\\
+[b(y,[yx],y)x] + [b(y,[yx],x)y] - b(y,[yx],[yx]),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{22}{c}(y,x,y,y,x) = \underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,y,y,y,x) + [\underset{2}{c}(y,x,y,x)y]+\\
+[\underset{2}{c}(y,x,y,y)x] + [\underset{2}{c}(y,x,y,x)y] - \underset{2}{c}(y,x,[yy],x) - \underset{2}{c}(y,x,[yx],y)-\\
-\underset{2}{c}(y,x,y,[yx]) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,y),x) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x),y)+\\
+\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x),y) - \underset{12}{\Lambda}(b(y,x,y),y,x) + b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x))-\\
-\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,x),y,y) - \underset{12}{\Lambda}(b(y,x,y),y,x) - b(y,x,[[yx]y]) + [b(y,x,[yx])y]+\\
+[b(y,x,[yy])x] - b(y,x,[[yy]x]) + [b(y,x,[yx])y] + [\underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x)x]-\\
-\underset{13}{\Lambda}([yx],y,y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,[yy],y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,y,[yy],x) - \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,[yx]).
\end{aligned}$$

Приведём подобные, используя кососимметричность тензоров, также леммы 5 и 3, формулу (12). Получим:

$$\begin{aligned}
0 = \underset{32}{\Lambda}(x,y,y,y,x) - \underset{41}{\Lambda}(x,y,y,y,x) + [\underset{31}{\Lambda}(y,x,y,y)x] - \underset{31}{\Lambda}(y,x,y,[yx])-\\
-\underset{31}{\Lambda}(y,[yx],y,x) + b(y,\underset{21}{\Lambda}(y,y,x),x) - 2\underset{21}{\Lambda}(x,y,b(y,y,x))-\\
-\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(y,y,y),x,x) - 2\underset{21}{\Lambda}(\underset{21}{\Lambda}(x,y,y),y,x),
\end{aligned}$$

$$\underset{12}{c}(y,x,y,y,x) = \underset{23}{\Lambda}(x,y,y,y,x) - \underset{32}{\Lambda}(x,y,y,y,x) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,[yx],y) + \underset{22}{\Lambda}([xy],y,y,x)$$

$$\begin{aligned}
\underset{22}{c}(y,x,y,y,x) = \underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,x) - \underset{23}{\Lambda}(x,y,y,y,x) + \underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,y),x)+\\
+2\underset{12}{\Lambda}(x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x),y) - 2\underset{12}{\Lambda}(b(y,x,y),y,x) + b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x))+\\
+[\underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x)x] - \underset{13}{\Lambda}([yx],y,y,x) - \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,[yx]).
\end{aligned}$$

Складывая эти равенства, находим:

$$0=\mathop{\Lambda}\limits_{32}(x,y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{41}(x,y,y,y,x)+[\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,y)x]-\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,[yx])-$$
$$-\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,[yx],y,x)+b(y,\mathop{\Lambda}\limits_{21}(y,y,x),x)-2\mathop{\Lambda}\limits_{21}(x,y,b(y,y,x))-\mathop{\Lambda}\limits_{21}(\mathop{\Lambda}\limits_{21}(y,y,y),x,x)-$$
$$-2\mathop{\Lambda}\limits_{21}(\mathop{\Lambda}\limits_{21}(x,y,y),y,x)+\mathop{\Lambda}\limits_{23}(x,y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{32}(x,y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{22}(x,y,[yx],y)+$$
$$+\mathop{\Lambda}\limits_{22}([xy],y,y,x)+\mathop{\Lambda}\limits_{14}(x,y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{23}(x,y,y,y,x)+\mathop{\Lambda}\limits_{12}(x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,y),x)+$$
$$+2\mathop{\Lambda}\limits_{12}(x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,x),y)-2\mathop{\Lambda}\limits_{12}(b(y,x,y),y,x)+b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,x))+$$
$$+[\mathop{\Lambda}\limits_{13}(y,y,y,x)x]-\mathop{\Lambda}\limits_{13}([yx],y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,[yx]).$$

После приведения подобных выразим разность $\mathop{\Lambda}\limits_{41}(x,y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{14}(x,y,y,y,x)$:

$$\mathop{\Lambda}\limits_{41}(x,y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{14}(x,y,y,y,x)=[\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,y)+\mathop{\Lambda}\limits_{13}(y,y,y,x),x]-\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,[yx])-$$
$$-\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,[yx],y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{22}(x,y,[yx],y)+\mathop{\Lambda}\limits_{22}([xy],y,y,x)+b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,x))-$$
$$-b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{21}(y,y,x))-\mathop{\Lambda}\limits_{13}([yx],y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,[yx]).$$

3. Подставим найденную разность в (61):

$$\frac{1}{6}[x\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,y)]+\frac{1}{2}\mathop{\Lambda}\limits_{31}([yx],y,y,x)-\frac{1}{6}[\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,y,y,x)x]-\frac{1}{2}\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,[xy],y,y)+$$
$$+\frac{1}{6}[\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,y)+\mathop{\Lambda}\limits_{13}(y,y,y,x),x]-\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,[yx])-\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,[yx],y,x)-$$
$$-\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{22}(x,y,[yx],y)+\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{22}([xy],y,y,x)+\frac{1}{6}b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,x))-$$
$$-\frac{1}{6}b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{21}(y,y,x))-\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{13}([yx],y,y,x)-\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,[yx])=0.$$

После приведения подобных получим:

$$\frac{1}{6}[x,\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,y)+\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{31}(x,y,y,y)-\mathop{\Lambda}\limits_{13}(y,y,y,x)]+$$
$$+\frac{1}{3}\mathop{\Lambda}\limits_{31}([yx],y,y,x)-\frac{1}{3}\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,[xy],y,y)+\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,x,y,[xy])-$$
$$+\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{22}(x,y,[xy],y)+\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{22}([xy],y,y,x)+\frac{1}{6}\mathop{\Lambda}\limits_{13}([xy],y,y,x)$$
$$+\frac{1}{6}b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{21}(y,y,x))=0,$$

или

$$\frac{1}{6}[x,\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,y)+\mathop{\Lambda}\limits_{31}(y,y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{31}(x,y,y,y)-\mathop{\Lambda}\limits_{13}(y,y,y,x)]-$$
$$-\frac{1}{3}(\mathop{\Lambda}\limits_{31}([xy],y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{22}([xy],y,y,x)+\mathop{\Lambda}\limits_{13}(x,y,y,[xy])-\mathop{\Lambda}\limits_{22}(x,y,y,[xy]))+$$
$$+\frac{1}{6}(\mathop{\Lambda}\limits_{31}(x,y,y,[xy])-\mathop{\Lambda}\limits_{22}(x,y,y,[xy])+\mathop{\Lambda}\limits_{13}([xy],y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{22}([xy],y,y,x))+$$
$$+\frac{1}{6}b(y,x,\mathop{\Lambda}\limits_{12}(y,y,x)-\mathop{\Lambda}\limits_{21}(y,y,x))=0.$$

Далее воспользуемся формулой (60), с учётом которой последнее равенство примет вид:

$$\frac{1}{6}[x, \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) + \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x)]-$$
$$-\frac{1}{3}(-2c(y,[xy],x,y) + 2b(y,x,[y[xy]]) + \frac{1}{6}(-2c(y,x,[xy],y) + 2b(y,[xy],[yx]))+$$
$$+\frac{1}{6}b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x) - \underset{21}{\Lambda}(y,y,x)) = 0.$$

В силу (12) и леммы 5 это соотношение перепишется в виде:

$$\frac{1}{6}[x, \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) + \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x)]-$$
$$+\frac{1}{6}b(y,x,\underset{12}{\Lambda}(y,y,x) - \underset{21}{\Lambda}(y,y,x)) = 0.$$

В силу (20) имеем:

$$\frac{1}{6}[x, \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) + \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x)]+$$
$$+\frac{1}{6}b(y,x,b(y,y,x)) - \frac{1}{6}b(y,x,[y[yx]]) + \frac{1}{6}b(y,x,[[yy]x]) = 0.$$

С помощью формул (48) и (38) приведём рассматриваемое соотношение к виду:

$$\frac{1}{6}[x, \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) + \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x)] = 0. \tag{62}$$

4. Покажем, что (62) удовлетворяется тождественно. Из (21) и (22) получаем:

$$\underset{1}{c}(y,y,y,x) = \underset{22}{\Lambda}(y,x,y,y) - \underset{31}{\Lambda}(y,x,y,y) + [xb(y,y,y)] + [yb(y,x,y)]-$$
$$-b(y,[xy],y) + [\underset{21}{\Lambda}(y,x,y)y] - \underset{21}{\Lambda}([yy],x,y) - \underset{21}{\Lambda}(y,[yx],y) - \underset{21}{\Lambda}(y,x,[yy]),$$

$$\underset{2}{c}(y,x,y,y) = \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,y,y) + [b(y,x,y)y] + [b(y,x,y)y]-$$
$$-b(y,x,[yy]) - [x\underset{12}{\Lambda}(y,y,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],y,y) + \underset{12}{\Lambda}(x,[yy],y) + \underset{12}{\Lambda}(x,y,[yy]),$$

$$\underset{1}{c}(y,y,x,y) = \underset{22}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) + [yb(y,y,x)] + [yb(y,y,x)]-$$
$$-b(y,[yy],x) + [\underset{21}{\Lambda}(y,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}([yy],y,x) - \underset{21}{\Lambda}(y,[yy],x) - \underset{21}{\Lambda}(y,y,[yx]),$$

$$\underset{2}{c}(y,y,y,x) = \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{22}{\Lambda}(y,y,y,x) + [b(y,y,y)x] + [b(y,y,x)y]-$$
$$-b(y,y,[yx]) - [y\underset{12}{\Lambda}(y,y,x)] + \underset{12}{\Lambda}([yy],y,x) + \underset{12}{\Lambda}(y,[yy],x) + \underset{12}{\Lambda}(y,y,[xy]).$$

Левые части в силу кососимметричности равны нулю, поэтому после приведения подобных получим равенства:

$$0 = \underset{22}{\Lambda}(y,x,y,y) - \underset{31}{\Lambda}(y,x,y,y) + [yb(y,x,y)] + [\underset{21}{\Lambda}(y,x,y)y] - \underset{21}{\Lambda}(y,[yx],y),$$

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{22}{\Lambda}(x,y,y,y) + 2[b(y,x,y)y] - [x\underset{12}{\Lambda}(y,y,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],y,y),$$

$$0 = \underset{22}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) + 2[yb(y,y,x)] + [\underset{21}{\Lambda}(y,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}(y,y,[yx]),$$

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{22}{\Lambda}(y,y,y,x) + [b(y,y,x)y] - [y\underset{12}{\Lambda}(y,y,x)] + \underset{12}{\Lambda}(y,y,[xy]).$$

Сложим первое равенство со втором, третье — с четвертым:

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,y) + [\underset{21}{\Lambda}(y,x,y)y] - \underset{21}{\Lambda}(y,[yx],y) + [b(y,x,y)y] - \\ -[x\underset{12}{\Lambda}(y,y,y)] + \underset{12}{\Lambda}([xy],y,y),$$

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x) - \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x) + [yb(y,y,x)] + [\underset{21}{\Lambda}(y,y,y)x] - \underset{21}{\Lambda}(y,y,[yx]) \\ -[y\underset{12}{\Lambda}(y,y,x)] + \underset{12}{\Lambda}(y,y,[xy]).$$

Вычитая первое уравнения из второго, с учетом леммы 5 получаем тождество:

$$0 = \underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{31}{\Lambda}(x,y,y,y) - \underset{13}{\Lambda}(y,y,y,x) + \underset{31}{\Lambda}(y,y,y,x).$$

В силу этого равенство (62) удовлетворяется тождественно, а, следовательно, (54) не дает новых соотношений на тензоры три-ткани.

Таким образом, верна:

Теорема 1 *[5] Пятая окрестность соотношения (1) не дает новых соотношений на тензоры кручения и кривизны ткани E.*

Отметим, что при доказательстве этой теоремы мы использовали только соотношения третьего и четвертого порядка, полученные из (1), и соотношения, полученные при их дифференцировании.

Список литературы

1. Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения:* Монография. - Тверь, Тверской государственный университет, 2010. - 308 с.
2. Шелехов А.М.: *О три-тканях с эластичными координатными лупами.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ 2.12.1987, N 8465-В87
3. Шелехов А.М., Шестакова М.А. *О тождествах в лупах со слабой ассоциативностью.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 115–121
4. Шелехов А.М. *Об аналитических решениях уравнения* $x(yx) = (xy)x$. Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140 (РЖМат, 1992, 5А550).
5. Баландина Г.А., Шелехов А.М. *Об общей теории эластичных тканей* // Межвузовский тематический сборник научных трудов. Тверь: ТГУ, 1995. с. 62-74.
6. Шелехов А.М. *О вычислении вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани* // Ткани и квазигруппы. Калинин: Калининский государственный университет, 1990. с. 10-18

К.Р. Джукашев

Тверской государственный университет, Тверь, Россия.

E-mail: dzhukashev@gmail.com

K.R. Dzhukashev

Tver State University, Tver, Russia.

About three-webs with flexible coordinate loops

All relations between torsion and curvature tensors of an elastic three-web in the fifth order differential neighborhood are found.

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік
№ 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлетень ВАК України. 2010. № 4)

Наклад 300 примірників. Зам. № .

Адреса редакції:
Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна
E-mail: geom-odessa@ukr.net
website: http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4

ISSN 2072-9812. ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.
2013. ТОМ 6. №2. 1-82