

ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 5, No. 1, 2012

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том.5, No. 1, 2012

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том.5, No. 1, 2012

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 5, No. 1, 2012

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Екологія"
2012

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою

Одеської національної академії харчових технологій

(протокол № 8 від 06.03.2012)

Головний редактор: **Володимир Шарко**

Заступники головного редактора: **Йосип Красильщик, Ігор Микитюк, Анатолій Мілка.**

Відповідальні редактори: **Надія Коновенко, Віктор Кузаконь.**

Відповідальні секретарі: **Олексій Мойсеєнок, Юлія Федченко.**

Редакційна колегія:

Алексєєвский Д.	Кац І.	Сергєєва О.
Андерсен Я.	Кіріченко В.	Страуме Е.
Балан В.	Кирилов В.	Толстіхіна А.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Машков О.	Фоменко А.
Діскант В.	Мікеш Й.	Фоменко В.
Євтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожний В.	Пришляк О.	Шуригін В.
Зарічний М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ібрагимов Н.	Рубцов В.	

©Благодійний фонд наукових досліджень "Наука 2012

Главный редактор: **Владимир Шарко**

Заместители главного редактора: **Иосиф Красильщик, Игорь Микитюк,**

Анатолий Милка.

Ответственные редакторы: **Надежда Коновенко, Виктор Кузаконь.**

Ответственные секретари: **Алексей Мойсеенок, Юлия Федченко.**

Редакционная коллегия:

Алексеевский Д.	Кац И.	Сергеева А.
Андерсен Я.	Кириченко В.	Страуме Э.
Балан В.	Кириллов В.	Толстихина Г.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Микеш Й.	Фоменко А.
Дискант В.	Машков О.	Фоменко В.
Евтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожный В.	Пришляк А.	Шурыгин В.
Заричный М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ибрагимов Н.	Рубцов В.	

Editor-in-Chief: **Vladimir Sharko**

Deputies Editor-in-Chief: **Joseph Krasilshchik, Igor Mikityuk, Anatoliy Milka.**

Managing Editors: **Nadiia Konovenko, Viktor Kuzakon.**

Executive Secretary: **Alexei Moysyeyenok, Juliya Fedchenko.**

Editorial Board:

Alekseevsky D.	Ibragimov N.	Roubtsov V.
Anderson I.	Kats I.	Sergeeva A.
Balan V.	Kirichenko V.	Shelekhov A.
Banah T.	Kirillov V.	Shurygin V.
Diskant V.	Litvinov G.	Straume E.
Evtushik L.	Mashkov O.	Tolstikhina G.
Fedosov S.	Mikes J.	Yakubchik B.
Fomenko A.	Mormul P.	Zadorozhnyi W.
Fomenko V.	Prishlyak A.	Zarichnyi M.
Gurevich D.	Rahula M.	

Зміст

Бондаренко А.М. Відображення тривимірних многовидів на площину	6
Кабанова М. И. λE -структури	25
Obikhod T.V. Derived category and new physics at the LHC	31
Пришляк А., Пришляк Е., Лукова-Чуйко Н. Гомотопия функций общего положения без критических точек на римановом диске	42
Гегамян Г.Д. О шестимерных групповых три-тканях с тривиальной сердцевиной	50

Відображення тривимірних многовидів на площину

А.М. Бондаренко

Анотація Ми вводимо поняття p - графу і описуємо його зміну при ізотопії проєкції для класифікації відображень з тривимірних многовидів на площину. Розглянуто проблеми реалізації графу і класифікації відображень.

Ключові слова Многовид · Функція Морса

УДК 515.12

1 Вступ

Класифікацією відображень тривимірних многовидів на площину займалися О. Саєкі[4], [5], В. Мотта, П. Порто[5] та інші. В роботі досліджуються функції, що мають критичні точки двох типів: визначеної та невизначеної складки. Для таких функцій будуються p -графи, які демонструють зміну графа Ріба функції, при проектуванні проєкції на деяку пряму. Мета роботи – отримати класифікацію таких функцій. В роботі доведено ряд теорем класифікації, розглянуто проблему реалізації графів, наведено приклади.

2 Попередні відомості

Нехай $f : M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ є відображенням класу C^∞ замкненого орієнтованого 3 - многовиду M на площину. Локально особливості такого відображення бувають трьох типів: точки визначеної складки, точки невизначеної склад-

ки, точки зборки[4]. Відмітимо, що множина особливостей $S(f)$ є гладким одновимірним підмноговидом M .

Стійке відображення $f : M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ є простим, якщо воно не має точок зборки і кожна компонента слою $f^{-1}(x)$ містить не більше однієї критичної точки для всіх $x \in \mathbf{R}^2$.

Граф-многовид це 3-многовид побудований з S^1 -розшарувань над поверхнями, склеєними вздовж границь їх торів.

Нехай M замкнений зв'язний орієнтований 3-многовид, а N – зв'язний 2-многовид з порожньою межею. Позначимо через $C^\infty(M, N)$ множину гладких відображень з M в N з C^∞ топологією Уїтні. Для гладкого відображення $f : M \rightarrow N$ визначимо через $S(f)$ множину особливостей, тобто множину тих точок, для яких ранг диференціалу df строго менший за 2. Гладке відображення $f : M \rightarrow N$ стійке, якщо існує відкритий окіл $N(f)$ функції f в $C^\infty(M, N)$, що кожна функція g еквівалентна з обох боків функції f .

Гладке відображення $f : M \rightarrow N$ стійке тоді і лише тоді, коли воно задовольняє наступні локальні і глобальні умови: для всіх $p \in M$ існує локальна система координат (u, x, y) з початком в точці p і (X, Y) з початком в $f(p)$ такі, що f набуває одного з наступних виглядів:

$$(L_0) : X \circ f = u, Y \circ f = x \text{ (} p \text{ регулярна)}$$

$$(L_1) : X \circ f = u, Y \circ f = x^2 + y^2 \text{ (} p \text{ визначена складка)}$$

$$(L_2) : X \circ f = u, Y \circ f = x^2 - y^2 \text{ (} p \text{ невизначена складка)}$$

$$(L_3) : X \circ f = u, Y \circ f = y^2 + ux - x^3 \text{ (} p \text{ зборка)}$$

і

$$(G_1) \text{ якщо } p \in M \text{ є точкою зборки, тоді } f^{-1}(f(p)) \cap S(f) = \{p\}$$

$$(G_2) f|(S(f) - \{\text{точки зборки}\}) \text{ є вкладенням з нормальними перетинами.}$$

Позначимо через $S_0(f)$ множину точок визначеної складки, $S_1(f)$ – точки невизначеної складки, $C(f)$ – точки зборки. Називатимемо компоненти $S_0(f)$ визначеними складками, $S_1(f)$ – невизначеними складками. Для $p, p' \in M$, вважаємо, що $p \sim p'$, якщо $f(p) = f(p')$ і p, p' належать одній і тій самій компоненті зв'язності $f^{-1}(f(p)) = f^{-1}(f(p'))$. Нехай $W_f (= M / \sim)$ є фактор-простором M по такому відношенню еквівалентності і означимо через $q_f : M \rightarrow W_f$ фактор-відображення. За означенням відношення еквівалентності маємо єдине відображення $\bar{f} : W_f \rightarrow N$, що $f = \bar{f} \circ q_f$. Фактор-простір W_f називається факторизацією Штейна. В загальному випадку W_f не є многовидом, однак він гомеоморфний 2-вимірному скінченному CW комплексу. Крім того, якщо $f : M \rightarrow N$ просте, то кожна точка $x \in W_f$ має окіл як на рисунку 0.

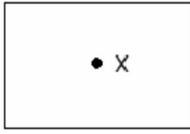
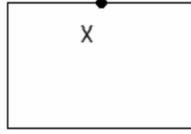
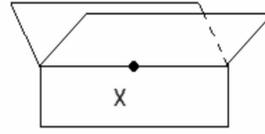
 $x \in W_f - q_f(S(f))$  $x \in q_f(S_0(f))$  $x \in q_f(S_1(f))$

Рис. 0

Позначимо $\Sigma_0(W_f) = q_f(S_0(f))$, $\Sigma_1(W_f) = q_f(S_1(f))$, тоді $\Sigma(W_f) = \Sigma_0(W_f) \cup \Sigma_1(W_f) (= q_f(s(f)))$. Відмітимо, що якщо $\Sigma(W_f) \neq 0$, то $W_f - \Sigma(W_f)$ є відкритим 2-многовидом. Нехай $f : M \rightarrow N$ просте стійке відображення, а C є компонентою $\Sigma(W_f)$. Якщо C є компонентою $\Sigma_0(W_f)$, то легко бачити, що $N(C)$ гомеоморфна $I \times C$ ($I = [0, 1]$), де $N(C)$ є регулярним оточенням C в W_f і $\{0\} \times C$ співпадає з C . Якщо C є компонентою $\Sigma_1(W_f)$, то $N(C)$ гомеоморфно Y -розшаруванню над S^1 , де $Y = \{r \exp(\sqrt{-1}\theta) \in \mathbf{C}; 0 \leq r \leq 1, \theta = 0, \pm \frac{2\pi}{3}\}$. Крім того, біля C , відображення $\bar{f} : W_f \rightarrow N$ локально C^0 еквівалентне з обох боків до $\pi \times id : Y \times I \rightarrow [-0, 5; 1] \times I$, де $\pi : Y \rightarrow [-0, 5; 1]$ є проекцією на дійсну пряму $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$, обмеженою на Y . Отже, монодромний гомеоморфізм

$\alpha : Y \rightarrow Y$ Y -розшарування $N(C)$ над C має задовольняти $\pi \circ \alpha = \pi$, звідки $\alpha = id$ або $\alpha = \tau$, де $\tau : Y \rightarrow Y$ комплексне сполучення, обмежене на $Y \subset \mathbf{C}$. Іншими словами, $N(C)$ гомеоморфне $Y \times S^1$ або $Y \times_{\tau} S^1 = Y \times I / (y, 1) \sim (\tau(y), 0)$. Покладемо $Y_0 = \{r \exp(\sqrt{-1}\theta) \in Y; \theta = 0\}$. Тоді видно, що $Y_0 \times S^1 \subset Y \times S^1, Y \times_{\tau} S^1$. Позначимо через $\sigma(C)$ підпростір $N(C)$, що відповідає $Y_0 \times S^1$ по гомеоморфізму, означеному вище, і назвемо його стрижнем C .

Для простого стійкого відображення $f : M \rightarrow N$ для орієнтованих M і N , означимо орієнтації $S(f)$ і $S_{\infty}(f)$ наступним чином. Спершу відмітимо, що кожна компонента R_i множини $W_f - \Sigma(W_f)$ є 2-многовидом і що $\bar{f}|R_i : R_i \rightarrow N$ є локальним гомеоморфізмом. Ми орієнтуємо R_i таким чином, що $\bar{f}|R_i$ зберігає орієнтацію. Далі орієнтуємо кожну компоненту C з $\Sigma_0(W_f)$ як границю $R_i \cup C$, де R_i є компонентою $W_f - \Sigma(W_f)$, чие замикання містить C . Для компоненти C з $\Sigma_1(W_f)$, ми орієнтуємо C в зворотному порядку до межі стрижня $\sigma(C)$. Тоді ми орієнтуємо $S(f)$ так, щоб $q_f|S(f) : S(f) \rightarrow \Sigma(W_f)$ зберігав орієнтацію. Крім того, кожна компонента $S_{\infty}(f)$ канонічно орієнтована оскільки $q_f : q_f^{-1}(W_f - \Sigma(W_f)) \rightarrow W_f - \Sigma(W_f)$ є S^1 -розшаруванням з орієнтованими $q_f^{-1}(W_f - \Sigma(W_f))$ і $W_f - \Sigma(W_f)$.

З [4]: Нехай M замкнений орієнтований 3-многовид. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. існує стійке відображення $f : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ з гладким вкладенням $f|S(f) : S(f) \rightarrow \mathbf{R}^2$
2. існує просте стійке відображення $f : M \rightarrow N$ для деякого 2-многовиду N
3. M є граф-многовидом.

Просте стійке відображення $f : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ з гладким вкладенням $f|S(f)$ просте, оскільки не має точок зборки і $f^{-1}(x)$ містить не більше однієї критичної точки для всіх $x \in \mathbf{R}^2$. Отже з (1) випливає (2). Також, з (2) випливає (3) за наступною лемою.

Нехай $f : M \rightarrow N$ просте стійке відображення замкненого орієнтованого 3-многовиду M на поверхню N . Тоді M є граф-многовидом, а лінк $S(f) \cup S_\infty(f)$ в M є граф-лінком[4]. Отже, щоб закінчити доведення, залишається показати, що кожен замкнений граф-многовид M допускає стійке відображення $f : M \rightarrow \mathbf{R}^2$ з гладким вкладенням $f|S(f)$. Спочатку дамо наступне означення.

Нехай X компактний орієнтований 3-многовид, чия межа складається з торів(можливо порожніх). Гладке відображення $f : X \rightarrow N$ на поверхню без краю N називається S -відображенням, якщо виконуються наступні умови:

- (1) $f|IntX \rightarrow N$ належне стійке відображення
- (2) для всіх $p \in \partial X$ існує локальна система координат (u, x, y) з початком в точці p і (X, Y) з початком в $f(p)$ такі, що f набуває наступного вигляду:

$$X \circ f = x, Y \circ f = y.$$

Відмітимо, що для кожної компоненти F з ∂X існує окіл-комір $C(F) \cong F \times I$ в X і S^1 -розшарована проєкція $\pi : F \rightarrow S^1$ така, що $f|C(F)$ узгоджується з $\pi \times id : F \times I \rightarrow S^1 \times I$. Для S -відображень можна аналогічним чином ввести означення факторизації Штейна.

Нехай $f_i : X_i \rightarrow N$ є S -відображенням і F_i є компонентами $\partial X_i, i = 1, 2$. Припустимо, що існує дифеоморфізм $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ з $f_2 \circ \varphi = f_1|F_1$, який задовольняє наступне. Покладемо $C_i = q_{f_i}(F_i)(\cong S^1)$ і нехай A_i є регулярним околком C_i в W_f . Існує дифеоморфізм $\psi : C_2 \rightarrow C_1$ з $q_{f_2} \circ \varphi = \psi^{-1} \circ q_{f_1}|F$ і $\bar{f}_2 \circ \psi^{-1} = \bar{f}_1|C_1$. Припустимо, що $\bar{f}_1 \cup \bar{f}_2 : A_1 \cup_\psi A_2 \rightarrow N$ гладке занурення. Тоді бачимо, що $\bar{f}_1 \cup \bar{f}_2 : X_1 \cup_\varphi X_2 \rightarrow N$ є S -відображенням з $S(f_1 \cup f_2) = S(f_1) \cup S(f_2)$. Більш того, якщо f_1 і f_2 прості, то простим є і $f_1 \cup f_2$: $f_1|S(f_1)$ і $f_2|S(f_2)$ є гладкими вкладеннями з незв'язними образами, тоді $f_1 \cup f_2|S(f_1 \cup f_2)$ є гладким вкладенням. Ідея доведення теореми полягає в тому, щоб побудувати S -відображення частин S^1 -розшарування граф-многовиду а потім склеїти їх використовуючи це саме S -відображення $T^2 \times I$.

Припустимо, що M є замкненим граф-многовидом, тобто існують незв'язно занурені тори T_1, \dots, T_r такі, що компоненти X_1, \dots, X_s з $M - \coprod_{i=1}^r \text{Int}N(T_i)$ є S^1 -розшаруваннями над поверхнями.

Нехай маємо деякий замкнений тривимірний многовид, для якого задано розклад на ручки з рівно однією 0-ручкою і однією 3-ручкою. Розглянемо тіло з ручками що складаються з 0-ручки і об'єднання 1-ручок. Межа такого тіла називається поверхнею Хегора[2]. Оскільки ця поверхня є також поверхнею Хегора для двоїстого розкладу на ручки, то її рід рівний числу 1-ручок і числу 2-ручок. Поверхня Хегора розбиває вихідний многовид на два повних кренделя.

Розбиттям Хегора замкненого тривимірного многовида називається представлення його у вигляді об'єднання двох повних кренделів, які перетинаються за спільним краєм. Рід розбиття Хегора це рід кренделя. Для задання розбиття Хегора треба вказати як склеюються краї двох повних кренделей. Оскільки два повних кренделя одного роду гомеоморфні, то для задання розбиття Хегора досить задати гомеоморфізм краю повного кренделя на себе.

Нехай H - повний крендель роду g , $\alpha \subset \partial H$ - проста замкнена крива, що не розбиває H . Крива α називається меридіаном для H , якщо існує вкладений двовимірний диск $D \subset H$ з $\partial D = D \cap \partial H = \alpha$. Диск D називається меридіанним диском. Набір $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ меридіанів, що не перетинаються, називається повною системою меридіанів, якщо при розрізанні ∂H за ними вийде сфера з $2g$ дірками.

Діаграмою Хегора роду g многокида M називається трійка (F, u, v) , що складається з поверхні Хегора F роду g і двох систем меридіанів $u = \{u_1, \dots, u_g\}$ для M_1 і $v = \{v_1, \dots, v_g\}$ для M_2 .

3 Відображення тривимірних многовидів

Нехай маємо деякий замкнутий гладкий тривимірний многовид M^3 і функцію $f : M^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ на ньому (проекцію многовида на площину). Важаємо, що така функція не має точок зборки. Ця проекція буде розбивати площину на області. На проекції будемо відмічати кількість компонент зв'язності многовида, що проєктуються на відповідну область проекції та вказувати, критичні точки якого характеру відповідають лініям на проекції. Точки визначеної складки позначатимемо звичайними лініями, а точки невизначеної складки – потовщеними.

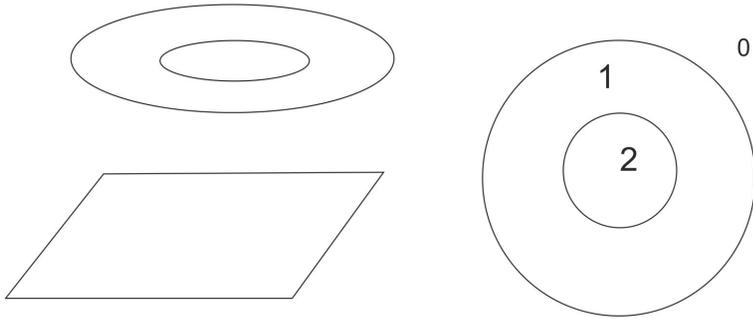


Рис. 1

Для цієї проекції будемо будувати граф Ріба[1], на якому будемо зображати зміну графа при проектуванні його на деяку пряму.

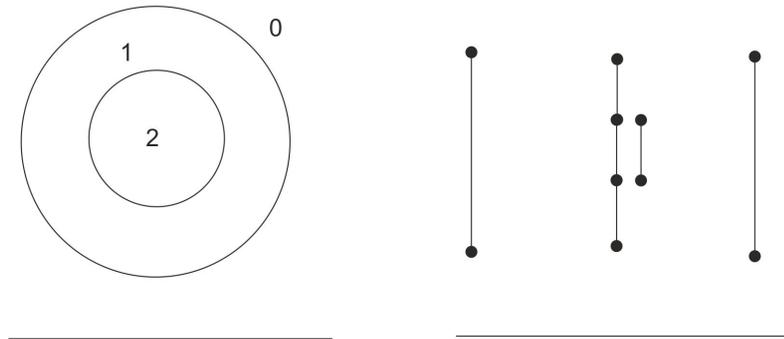


Рис. 2

Для спрощення будемо зображати не послідовність графів Ріба, яка утвориться при рухах по прямій в напрямку зліва направо, а один граф, на якому будемо відслідковувати зміну графу. Для того, щоб зобразити цю зміну на одному графі, будемо відмічати номерами різних кольорів ребра, що додаються до графу, і ті, що зникають, в послідовному порядку. Надалі вважатимемо, що одночасно не виникають і не зникають несусідні ребра(цього можна досягти малим порухом проекції).

Для нашого прикладу граф набуде наступного вигляду:

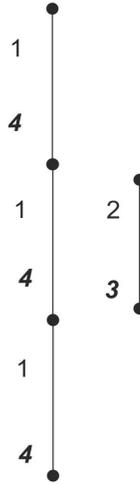


Рис. 3

Перехід від області зі значенням 1 до області зі значенням 2 може виникнути і у випадку, коли критичні точки є точками невизначеної складки. В такому випадку проекція матиме вигляд:

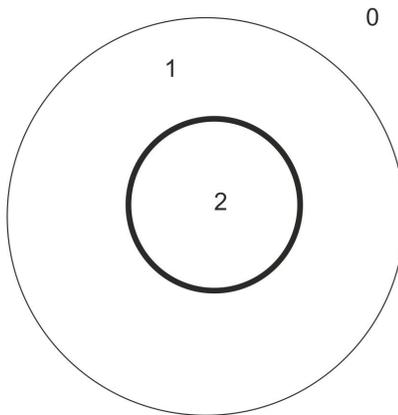


Рис. 4

Для того, щоб відрізнати різні типи критичних точок, для випадку точок невизначеної складки будемо склеювати в вершинах графу ребра, що існують одночасно.

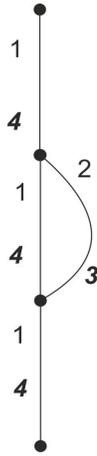


Рис. 5

Таким чином для будь-якого вигляду проекції ми можемо знайти відповідну послідовність графів Ріба.

Називатимемо такий граф p -графом. Для того, щоб такий граф однозначно описував зміну функції на многовиді, необхідно додатково оснастити його діаграмою Хегора[2].

Розглянемо, як змінюється граф при ізоморфних рухах проекції.

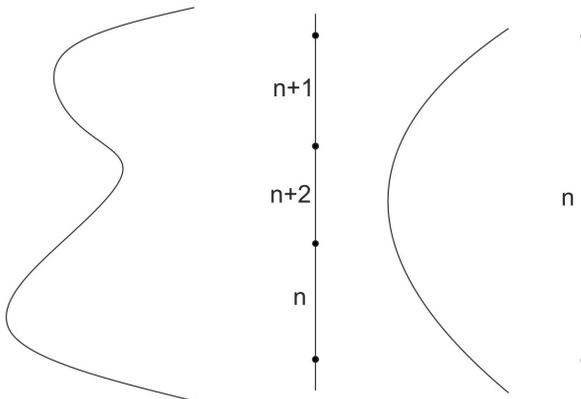


Рис. 6

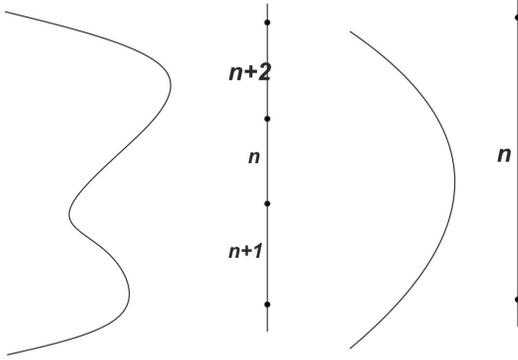


Рис. 7

Розглянемо, що відбувається з графом, коли ми «розкручуємо» проекцію (див. Рис. 8).

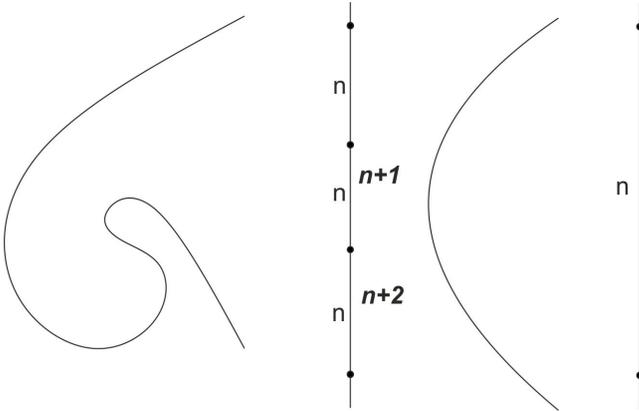


Рис. 8

Аналогічні спрощення можна проводити для частин проекцій, що симетричні даним відносно прямої проектування а також для кривих проекції, що відповідають критичним невизначеним точкам. Якщо на кривих, які ми спрощуємо існують додатково точки перетину з іншими кривими, точки самоперетину або точки зміни характеру критичних точок, то використовуючи ці правила, необхідно слідкувати, що ці точки не зникали і не з'являлися нові.

Таким чином ми маємо певні правила, як змінюється граф при рухах проекції.

В подальшому називатимемо ці правила «правило 1» (рис. 6), «правило 2» (рис. 7) та «правило 3» (рис. 8).

Інші ізотопії проекції, наприклад, зміна порядку появи двох сусідніх точок перетину або самоперетину контурів, на графі відповідають пренумерації

ребер. При перенумерації також необхідно слідкувати, що не виникали і не зникали точки перетину і переходу до іншого типу критичних точок функції, це не важко зробити, відслідкувавши за номерами ребер, чи не змінюють сусідні до спрощуваних з моменту додавання ребра до моменту його зникання.

Теорема 1. В околі точки перетину або самоперетину проекція набуває вигляду (не залежно від типу критичних точок функції):

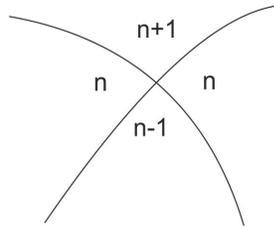


Рис. 9

Доведення. Дві криві, що перетинають, поділяють площину на чотири частини в деякому околі їх точки перетину[3]. Виберемо одну з цих частин, нехай рід праобразу для цієї частини рівний n . Виберемо напрямок руху, наприклад, за годинниковою стрілкою.

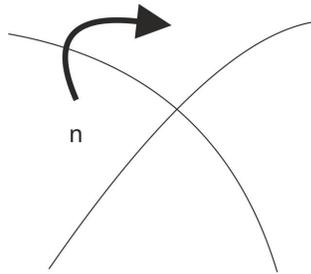


Рис. 10

Тоді при переході через перший фрагмент кривої рід в праобразі може зменшитися або збільшитися на 1, не залежно від типу критичних точок. Маємо два можливі випадки:



Рис. 11

Продовжуючи таку процедуру і далі, отримаємо набір всіх можливих ситуацій в околі перетину двох кривих, з яких, після перенумерації областей, отримаємо лише два можливі різні випадки. Однак, враховуючи, що при переході через кожен з кривих, що перетинаються, кількість компонент, що проєктуються, має або збільшуватися або зменшуватися, то залишиться єдиний можливий варіант, що і доводить теорему.

Теорема 2. Якщо від одного графа до іншого можна перейти за допомогою правил 1-3, симетричних до них та перенумерацією вершин, то проєкції, що їм відповідають, ізотопні.

Доведення. Розглядаємо на площині деяку проєкцію. Будемо окремо спрощувати кожен з кривих, що обмежують області. На ній будемо відмічати точки перетину з іншими кривими.

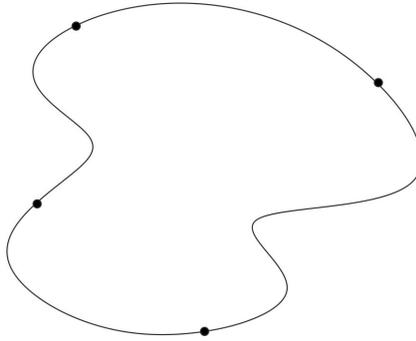


Рис. 12

Для кожної з цих замкнених кривих, вибираємо деяку початкову точку і починаємо рухатися по кривій в вибраному нами напрямку. При цьому будемо шукати точки, в яких дотичні вертикальні, точки перетину з іншими контурами і точки самоперетину. Вважаємо, що вертикально направлені дотичні маємо лише в точках зміни графу, тобто необхідно виключити наступні можливості (що можна зробити невеликими рухами проєкції)

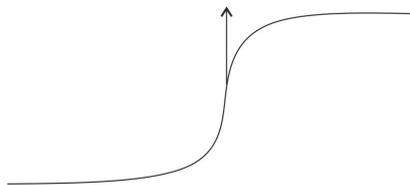


Рис. 13

Тоді отримаємо послідовність дотичних і точок:

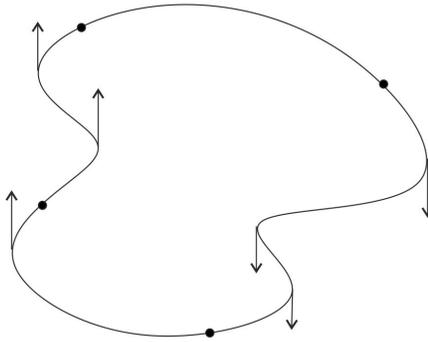


Рис. 14

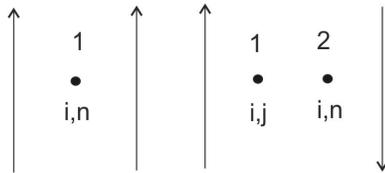


Рис. 15

До точок перетину з іншими кривими будемо додатково дописувати знизу номери кривих, що перетинаються в цій точці і порядковий номер точки перетину цих двох кривих.

Розглянемо, яким чином діють наші правила.

Правило 1 відповідає заміні послідовних трьох однаково направлених дотичних на одну дотичну направлену так само. Правило 2 відповідає такій самій заміні.

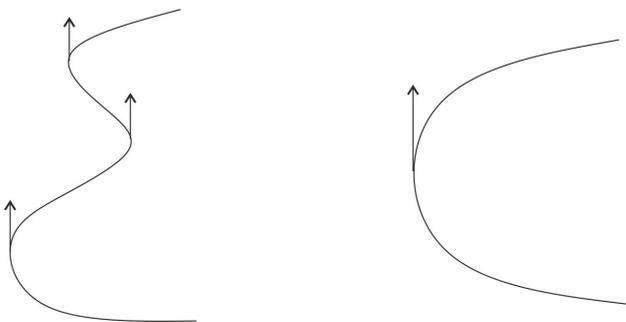


Рис. 16

Для правила 3 знаходимо послідовність з трьох дотичних таких, що третя направлена в протилежному напрямку до перших двох і заміняємо її на третю дотичну.

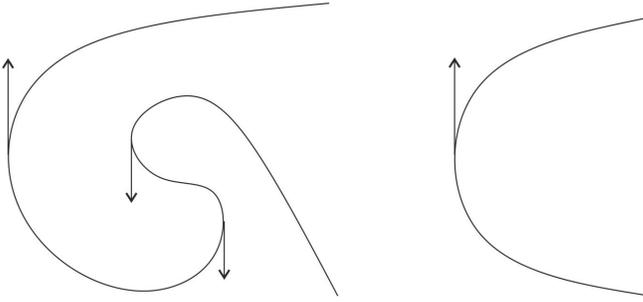


Рис. 17

Користуючись цими правилами, ми можемо спростити кожен криву нашої проєкції. Якщо точок самоперетину і перетинів більш ніж у двох точках з іншими кривими немає, то отримаємо дві дотичні, направлені в різні сторони, що відповідає колу (якому ізоморфна кожна гладка замкнена крива без самоперетинів).

У випадку, коли дві криві перетинаються, то кожен з них спрощувати можна до тих пір, поки не зміниться кількість їх точок перетину.

Таким чином, для кожної зміни на графі ми можемо проробити відповідну ізоморфію проєкції, яка не змінить кількість точок перетину і само перетину.

Теорема 3. Нехай маємо на площині проєкції многовидів P_1 і P_2 та відповідні їм p -графи Γ_1 і Γ_2 . Якщо проєкції ізоморфні, то від Γ_1 до Γ_2 можна перейти за допомогою правил 1-3 та перенумерацією вершин.

Доведення. Ми вже показали, що зміна за правилами графів однозначно відповідає ізоморфіям рухам проєкції. Однак, ми будували p -граф, проєктуючи проєкцію на довільну пряму. Зміна прямої проєктування – те ж саме, що поворот проєкції на деякий кут. Покажемо, що поворот можна здійснити, користуючись правилами 1-3.

Розглядаємо не всю проєкцію, а лише деяку її частину.

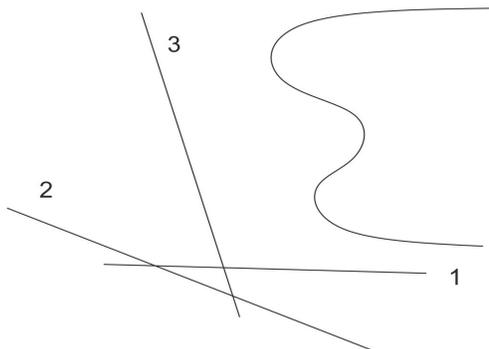


Рис. 18

Припустимо, що ми починали, проектуючи на пряму 1. Від положення цієї прямої залежить вигляд графу, якщо замінити пряму 1 на пряму 2, то граф не зміниться, але якщо продовжувати рухати пряму, то в деякий момент часу (пряма 3) зміниться кількість точок на графі. Така ізотопія проєкції, як на нашому прикладі, відповідає правилу 1. Розглянемо спочатку випадок, коли не маємо точок перетину і само перетину. Тоді, розглядаючи послідовні трійки дотичних, можемо мати наступні ситуації:

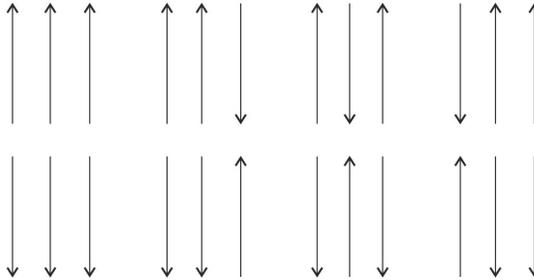


Рис. 19

Кожна заміна такої трійки на один вектор відповідає одному з правил 1-3. Перенумерація вершин дає змогу змінювати порядок точок перетину і сусідніх до них точок.

Теорема 4. Якщо маємо p -граф, оснащений діаграмою Хегора. Тоді існує єдина функція, що йому відповідає (з точністю до еквівалентності).

Доведення. Покажемо, що для довільного p -графу існує єдина з точністю до ізотопії проєкція на площині, що йому відповідає. Розглядаємо довільний граф. Розкладаємо його на послідовність графів Ріба. За цією послідовністю будують таблицю за наступним правилом: на прямокутнику відмічаємо на лівій стороні кількість точок графу, нижню грань розбиваємо точками на кількість частин, рівну кількості графів Ріба. Рухаючись зліва направо, зображаємо послідовно графи Ріба, відмічаючи на кожному відрізку кількість компонент зв'язності і тип критичних точок. Для кожного з відрізків, продовжуємо його до наступного праворуч, відмічаючи відповідно кількість компонент, що проєктуються, і об'єднуємо сусідні квадрати з однаковою кількістю компонент.

Залишається лише згладити кути і отримаємо вигляд вихідної проєкції.

Процедура згладжування:

Виберемо на схемі зв'язну область. Для згладжування кожного з її кутів, необхідно розглянути прямиї кут між двома сусідніми сторонами, причому сторонами цих кутів треба вибирати відрізки, рівні половинам цих сторін. Знайдемо таку функцію, яка добре наближає такі кути, причому

будувати її будемо так, щоб функції для двох сусідніх кутів мали однакові дотичні в серединах сторін. Шукатимемо її для прямого кута з однаковими сторонами. Потім достатньо лише розтягнути її за однією з координат. Розглянемо прямий кут, заданий в ПДСК точками $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

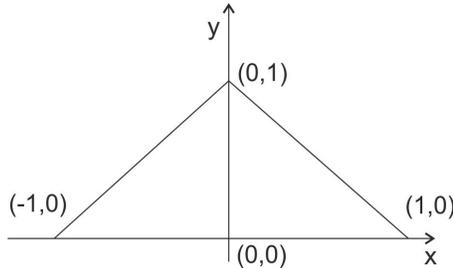


Рис. 20

Будуємо таку функцію $f(x)$, що має наступні властивості:

1. $f(x)$ симетрична відносно осі ординат.

$$2. f(-1) = 0, f(1) = 0.$$

$$3. f'(1) = -1, f'(-1) = 1.$$

4. $f(x)$ опукла вгору.

5. В точці 0 значення функції як завгодно близько наближається до 1.

Цю функцію шукаємо серед функцій такого вигляду:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

Ця функція симетрична відносно осі ординат.

$$f(-1) = f(1) = a + b + c = 0$$

$$f'(-1) = -4a - 2b = 1, f'(1) = 4a + 2b = -1$$

Отже, маємо:

$$a + b + c = 0$$

$$4a + 2b = -1$$

для того, щоб функція задовольняла умові 5, присвоїмо вільному члену значення $c := \frac{n-1}{n}$, де n - довільне натуральне.

Тоді знаходимо, що

$$a = \frac{n-2}{2n}$$

$$b = \frac{-3n + 4}{2n}$$

Функція $f(x)$ при таких коефіцієнтах задовольняє всім необхідним нам умовам. Залишається лише скористатись формулами повороту і розтягу і ми отримаємо функцію, що апроксимує довільний прямий кут.

Маючи вигляд проєкції і діаграму Хегора для многовиду, можемо відновити многовид. Таким чином, функція задана.

4 Приклади

Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1. Розглянемо на площині наступну проєкцію:

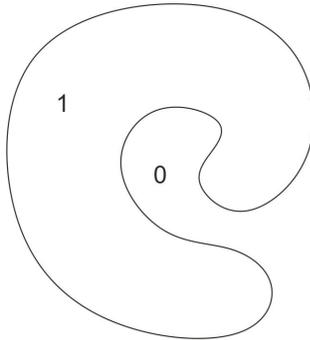


Рис. 21

Для такої проєкції побудуємо її p -граф, скористаємося введеними правилами, щоб його спростити і перевіримо, чи отримаємо проєкція, ізоморфну вихідній.

Граф має вигляд:

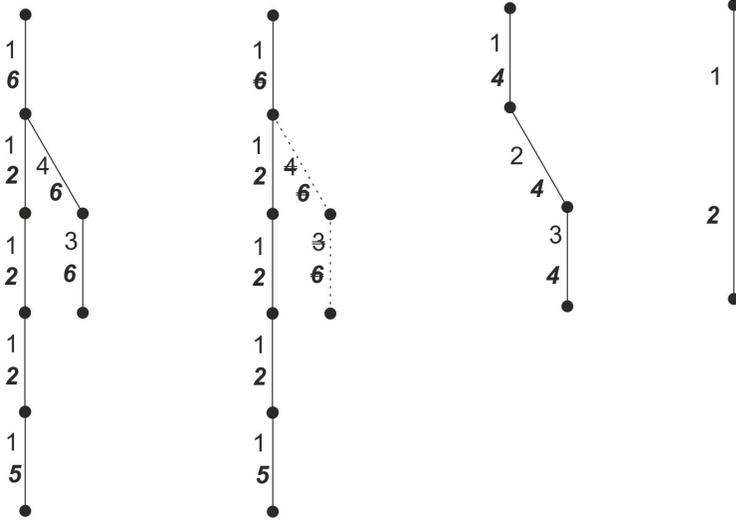


Рис. 22

Скориставшись правилами отримаємо граф, що відповідає проекції у вигляді кола зі значенням 1 всередині, що, дійсно, є ізоморфною вихідній.

Приклад 2. Вважаємо, що всі критичні точки функції є точками визначеної складки. Розглядаємо всі можливі проекції, що мають 2 та 4 точки перетину або самоперетину, і складаються не більше, ніж з двох кривих. Для таких проекцій графи не потребують оснащення діаграмами Хегора.

Для двох точок перетину або самоперетину маємо наступні випадки:

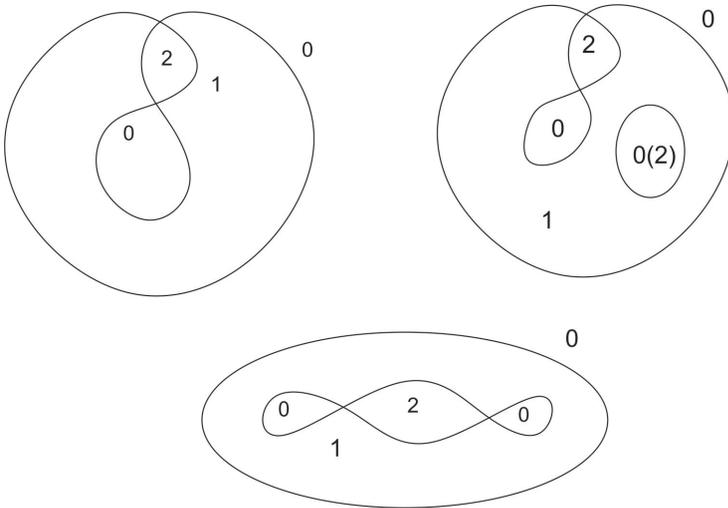


Рис. 23

Для чотирьох точок маємо такі вигляди проекції:

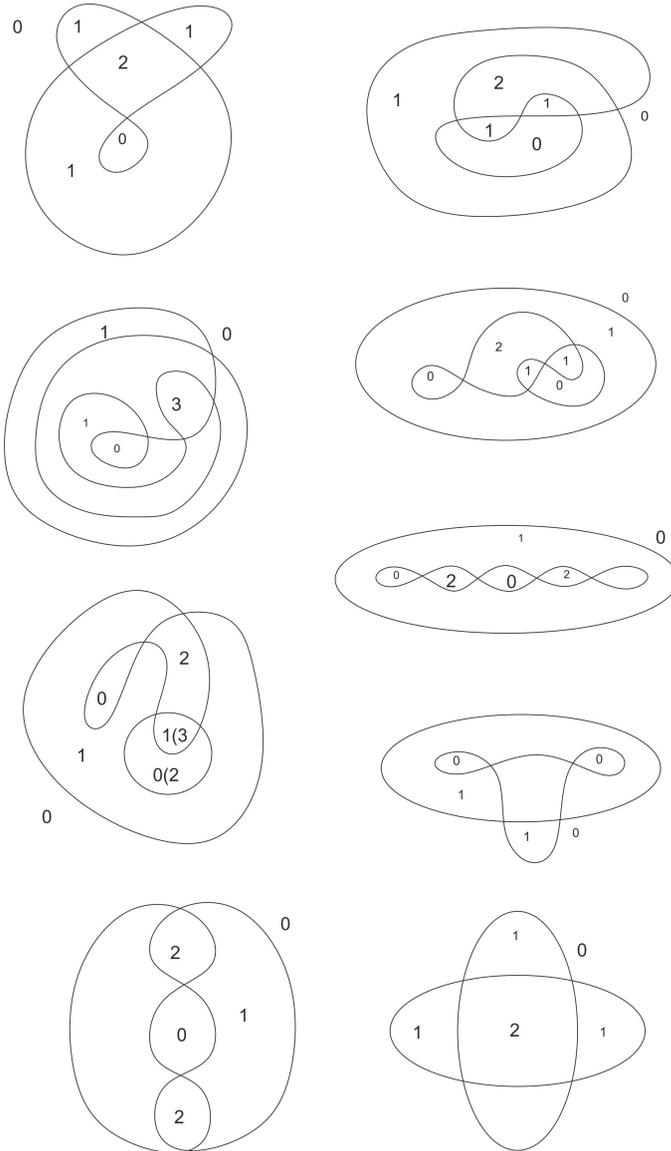


Рис. 24

5 Висновки

В роботі розглянуто відображення з тривимірних многовидів на площину та пов'язані з ними p -графи, що демонструють зміну графів Ріба. Введено правила зміни таких графів, що відповідають ізотопним рухам проекції на площині. Доведено теорему реалізації таких графів та ряд теорем класифікації таких відображень. Запропоновано приклади побудови та спрощен-

ня графів, знайдено всі можливі вигляди проєкцій, що мають 2 та 4 точки перетину або самоперетину для функцій, всі критичні точки яких є точками визначеної складки.

Література

1. G. Reeb, Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intйgrable ou d'une fonction numйrique. — C.R.A.S. Paris 222, 1946, pp. 847—849.
2. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновыe системы. Геометрия, топология, классификация. Том. 1. — Ижевск: Изд. Дом «Удмурский университет», 1999. — 444 с.
3. Hacon D., Mendes de Jesus C., Romero Fuster M.C. Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint // Real and complex singularities. New York: M. Dekker, 2003. P. 227–235. (Lect. Notes Pure and Appl. Math.; V. 232).
4. O. Saeki. Simple stable maps of 3-manifolds into surface, preprint, Yamagata University, 1992.
5. W. Motta, P. Porto Jr, O. Saeki. Stable maps of 3-manifolds into the plane and their quotient spaces. Proc. London Math. Soc 71 (1995) 158-174

А.М. Бондаренко

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: bondarenko.12.12@gmail.com

Alyona Bondarenko

Department of Geometry, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2,
Glushkova Prospect, Kyiv, Ukraine

Maps of 3-manifolds into plane

We define p -graph and describe how it changes under isotopy of projections for classification of maps of 3-manifolds into plane. The problem of graph implementation and maps classification are considered.

Одержано 13.10.2011

λE -структуры

Кабанова М. И.

Аннотация Теория тканей, образованных $n + 1$ слоениями λ_α коразмерности 1 на гладком многообразии размерности n , была построена В. В. Гольдбергом. Результаты его работы были обобщены в монографии [1], где с $(n + 1)$ -тканью W связывается семейство адаптированных реперов, которые допускают только преобразования, заданные скалярными матрицами, т.е. матрицами вида λE . Соответствующую G -структуру будем называть λE -структурой

Ключевые слова λE -структуры

УДК 514.7

Мы рассматриваем λE -структуру, не связывая ее с $(n + 1)$ -тканью. Доказывается, что задание λE -структуры на гладком многообразии M размерности n равносильно заданию $n + 1$ распределений коразмерности 1 на этом многообразии.

В случае, когда все $n + 1$ распределений интегрируемы, такая конструкция представляет собой $(n + 1)$ -ткань в смысле Гольдберга. Тем самым мы обобщаем понятие $(n + 1)$ -ткани коразмерности 1 на многообразии размерности n .

1. Теорема 1. *Задание λE -структуры на многообразии M равносильно заданию $n + 1$ распределений коразмерности 1 на этом многообразии. При этом корепер на многообразии M можно выбрать так, что на указанных распределениях будут аннулировать формы ω^i , $i = 1, \dots, n$, $\omega^1 + \dots + \omega^n$ соответственно (здесь ω^i — базисные формы на многообразии M .)*

□ *Необходимость.* Пусть на многообразии M размерности n заданы $n+1$ распределений $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$ коразмерности 1, находящихся в общем положении. Будем говорить в этом случае, что на M задана *неголономная* $(n+1)$ -*ткань* NW .

Пусть p — произвольная точка многообразия M , $T_p M$ — касательное пространство к многообразию M , π_1, \dots, π_{n+1} — подпространства в $T_p M$, принадлежащие распределениям $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$ соответственно. Свяжем с неголономной $(n+1)$ -тканью семейство адаптированных реперов e_i следующим образом:

$$e_i \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \dots \cap \pi_{i-1} \cap \pi_{i+1} \cap \dots \cap \pi_n. \quad (1)$$

Тогда подпространство π_i задается уравнением $x^i = 0$.

Пусть в построенном базисе подпространство π_{n+1} задано уравнением $a_i x^i = 0$. Нормируем векторы e_i так, чтобы это уравнение приняло вид

$$x^1 + x^2 + \dots + x^n = 0. \quad (2)$$

Реперы, удовлетворяющие условиям (1) и (2), будем называть *адаптированными реперами неголономной* $(n+1)$ -*ткани* NW .

Адаптированные реперы определены с точностью до преобразований вида

$$e'_i = \lambda e_i. \quad (3)$$

При этих преобразованиях вид уравнения (2) сохраняется.

Обозначим семейство адаптированных реперов через B_G . Матрицы λE образуют группу G допустимых преобразований адаптированных реперов и определяют на многообразии M G -структуру (B_G, M, π, G) [2], которую назовем λE -*структурой*.

Достаточность. Пусть на M задана λE -структура (B_G, M, π, G) , где, как и выше, G подгруппа скалярных матриц λE , B_G — подрасслоение реперов на M такое, что для любой точки x из M группа G действует на $\pi^{-1}(x)$ свободно и просто транзитивно.

Пусть далее V — векторное пространство с фиксированным стандартным базисом. Действуя на V , группа G оставляет инвариантными все одномерные инвариантные подпространства, следовательно, и $(n-1)$ -мерные подпространства, определяемые уравнениями $x^i = 0$ и (2). Обозначим их соответственно $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$.

Пусть далее p — произвольный репер из $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$. Тогда в T_x с помощью репера p определены подпространства $\Delta_1 = p(\Delta_1), \dots, \Delta_{n+1} =$

$p(\Delta_{n+1})$. Но эти подпространства не зависят от выбора репера p , так как в силу определения G -структуры $pg(v) = p(gv)$, $g \in G, v \in V$. Следовательно, распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$ определены на M инвариантно. Таким образом, мы получили неголономную $(n+1)$ -ткань, связанную с данной λE -структурой.

Обозначим, как и выше, через $\{e_i\}$ адаптированные реперы этой неголономной три-ткани и определим дифференциальные формы ω^i стандартным образом: $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$, где δ_j^i — символ Кронекера. Тогда на распределениях $\Delta_1, \dots, \Delta_{n+1}$ будут аннулироваться, соответственно, формы ω^i и $\omega^1 + \dots + \omega^n$, $i = 1, \dots, n$.

2. Структурные уравнения гладкого многообразия M имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \omega_k^i, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \\ d\omega_{jk}^i &= \omega_{jk}^l \wedge \omega_l^i + \omega_j^l \wedge \omega_{lk}^i + \omega_k^l \wedge \omega_{jl}^i + \omega^l \wedge \omega_{jkl}^i, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Формы ω^i называются главными, они зависят от дифференциалов локальных координат многообразия M . Фиксируем точку p , положив $\omega^i = 0$. Обозначим

$$\omega_j^i|_{\omega^i=0} = \pi_j^i. \quad (5)$$

Формы ω_j^i от главных параметров (локальных координат) и вторичных параметров, преобразующих репер. Формы π_j^i зависят только от вторичных параметров. Они являются инвариантными формами группы $GL(n, R)$, действующей в T_pM . Как видно из (4), формы π_j^i удовлетворяют структурным уравнениям группы $GL(n, R)$ [4]:

$$\delta \pi_j^i = \pi_j^k \wedge \pi_k^i. \quad (6)$$

При фиксированной точке p базисные векторы e_i преобразуются следующим образом:

$$\delta e_i = \pi_i^j e_j. \quad (7)$$

Пусть теперь на M задана λE -структура, и $\{e_i\}$ — фиксированный адаптированный репер этой структуры. Тогда произвольный адаптированный репер $\{\underset{o}{e}_i\}$ состоит из векторов вида

$$e_i = \mu \underset{o}{e}_i. \quad (8)$$

Имеем: $\delta e_i = \delta \mu e_i = \frac{\delta \mu}{\mu} e_i$. Сравнивая с (7), находим

$$\pi_j^i = \delta_j^i \delta \ln \mu. \quad (9)$$

Отсюда следует, что на многообразии M формы ω_j^i выражаются через главные формы следующим образом:

$$\omega_j^i = \theta \delta_j^i + b_{jk}^i \omega^k, \quad (10)$$

где θ — некоторая дифференциальная 1-форма, $\theta|_{\omega^i=0} = \delta \ln \mu$, b_{jk}^i — гладкие функции, зависящие от главных и вторичных параметров.

В результате первая группа структурных уравнений (4) примет вид

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \theta + b_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k = \omega^i \wedge \theta + 2b_{[ik]}^i \omega^i \wedge \omega^k + b_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (11)$$

где $k = 1, \dots, n$, $i \neq j$, $i \neq k$.

Введем обозначения:

$$b_{[jk]}^i = a_{jk}^i, \quad b_{[ik]}^i = \frac{1}{2} a_k^i. \quad (12)$$

Тогда уравнения (11) запишутся в виде:

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \theta + a_k^i \omega^i \wedge \omega^k + a_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad i \neq j, \quad i \neq k. \quad (13)$$

Уравнения (13) образуют первую группу структурных уравнений λE -структуры или неголономной $(n+1)$ -ткани NW .

При переходе к новому базису, формы ω^i изменяются так:

$$\tilde{\omega}^i = \lambda \omega^i. \quad (14)$$

Новые формы $\tilde{\omega}^i$ удовлетворяют уравнениям:

$$d\tilde{\omega}^i = (\theta + d \ln \lambda) \wedge \tilde{\omega}^i + \left(\frac{a_k^i}{\lambda} \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^k + \frac{a_{jk}^i}{\lambda} \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k \right). \quad (15)$$

Как видно, величины a_k^i и a_{jk}^i являются относительными инвариантами относительно допустимых преобразований репера. Назовем их относительными инвариантами первого порядка λE -структуры.

Положим

$$I_{ijk} = a_j^i - a_i^j + a_k^j - a_j^k + a_i^k - a_k^i, \quad i < j < k. \quad (16)$$

Теорема 2. Распределение Δ_i интегрируемо тогда и только тогда, когда $a_{jk}^i = 0$. Распределение Δ_{n+1} интегрируемо тогда и только тогда, когда $I_{ijk} = 0$.

□ Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из уравнений (13). Далее, согласно теореме Фробениуса, распределение Δ_{n+1} интегрируемо тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$d(\omega_1 + \dots + \omega_n) \wedge (\omega_1 + \dots + \omega_n) = 0. \quad (17)$$

С учетом (13) и обозначения (16) получим:

$$d(\omega^1 + \dots + \omega^n) \wedge (\omega^1 + \dots + \omega^n) = \sum I_{ijk} \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k, \quad (18)$$

где $i < j < k$.

3. Назовем λE -структуру, все $n + 1$ распределений которой интегрируемы, *интегрируемой*. В этом случае на многообразии M существуют $n + 1$ слоений λ_α , которые образуют $(n + 1)$ -ткань в смысле Гольдберга.

Найдем структурные уравнения интегрируемой λE -структуры.

Обозначим $\beta_j^i = a_j^i - a_i^j$. Тогда соотношения $I_{ijk} = 0$ переписутся в виде

$$\beta_j^k = \beta_j^i - \beta_k^i. \quad (19)$$

Левая часть этого равенства не зависит от i . Следовательно, можно положить

$$\beta_j^1 - \beta_k^1 = \beta_j^2 - \beta_k^2 = \dots = \beta_j^n - \beta_k^n \equiv \beta_j - \beta_k. \quad (20)$$

Таким образом $a_j^i - a_i^j = \beta_j - \beta_i$, где $i, j = 1, \dots, n, i < j$.

Введем обозначения:

$$a_j^i - \beta_i = a_i^j - \beta_j \equiv \xi_j^i, \quad \xi_j^i = \xi_i^j. \quad (21)$$

Тогда структурные уравнения (13) λE -структуры примут вид:

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \theta + \sum_j (\xi_j^i + \beta_i) \omega^i \wedge \omega^j, \quad (22)$$

где $\xi_j^i \equiv \xi_i^j$.

Произведем замену $\tilde{\theta} = \theta - \beta_1 \omega^1 - \dots - \beta_n \omega^n$. Тогда уравнения (22) принимают вид:

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \tilde{\theta} + (\xi_j^i + \beta_i + \beta_j) \omega^i \wedge \omega^j. \quad (23)$$

Обозначим $\tilde{\xi}_j^i \equiv \xi_j^i + \beta_i + \beta_j$ и окончательно получим:

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \tilde{\theta} + \tilde{\xi}_j^i \omega^i \wedge \omega^j, \quad \tilde{\xi}_j^i = \tilde{\xi}_i^j. \quad (24)$$

Приведенные уравнения представляют собой структурные уравнения $(n+1)$ -ткани в смысле Гольдберга (см. [1]).

Список литературы

1. Goldberg, V.V. Theory of multcodimensional $(n + 1)$ -webs. Dordrecht: Boston: Kluwer Academic, 1988. – 466 p.
2. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М. Мир, 1970.
3. Лаптев, Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНТИ. М., 1966. Т.1. С.139-189.
4. Акивис, М.А., Шелехов, А.М. Многомерные три-ткани и их приложения. Тверь, Тверской гос. ун-т, 2010. – 307 с.

Кабанова М. И.

МПГУ, Москва, Россия

E-mail: luinel@list.ru

Одержано 24.12.2011

Derived category and new physics at the LHC

T.V. Obikhod

Abstract The theory of derived category is applied for construction of Minimal Supersymmetric Standard Model. This aim is achieved by using the notion of coherent sheaves and McKay quivers. Using computer programs SOFTSUSY, SDECAY and PYTHIA, we calculated mass spectrum, partial widths and production cross sections of superpartners. In the context of Minimal Supersymmetric Standard Model histograms of mass distributions for superpartners \tilde{q}_R and \tilde{g} are constructed.

Keywords Derived category · Coherent sheaves · Minimal Supersymmetric Standard Model

UDC 539.12

1 Introduction

More recently physicists have become concerned about the discovery of the Higgs boson or any superpartner at the LHC. A large amount of theoretical effort has been spent trying to understand the mechanism for soft supersymmetry breaking that produces the desired properties in the superpartner masses and interactions in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) - the minimal extension to the Standard Model that realizes supersymmetry. The three most extensively studied mechanisms are: Gravity-Mediated Supersymmetry Breaking (SUGRA), Gauge Mediated Supersymmetry Breaking (GMSB) and Anomaly Mediated Supersymmetry Breaking (AMSB). mSUGRA stands for minimal supergravity where supersymmetry breaking is communicated through the supergravity interactions. mSUGRA is one of the most widely investigated models of particle physics due to its predictive power requiring only four input parameters and a sign, to determine the low energy phenomenology from the scale of Grand Unification. If the superparticles are found, MSSM could provide evidence for grand unification and might even in principle provide hints as to whether string theory describes nature [1].

2 Derived category and category of D-branes

To construct the MSSM model from superstring theory we must use the notion of derived category [2]. We will give the short review of the theory of category.

A category \mathcal{L} consists of the following data:

- 1) A class $\text{Ob } \mathcal{L}$ of objects A, B, C, \dots ;
- 2) A family of disjoint sets of morphisms $\text{Hom}(A, B)$ one for each ordered pair A, B of objects;
- 3) A family of maps

$$\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C) ,$$

one for each ordered triplet A, B, C of objects.

These data obey the axioms:

a) If $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$, then composition of morphisms is associative, that is, $h(gf) = (hg)f$;

b) To each object B there exists a morphism $1_B : B \rightarrow B$ such that $1_B f = f$, $g 1_B = g$ for $f : A \rightarrow B$ and $g : B \rightarrow C$.

There are several aspects that are necessary for construction the category of D-branes [2]:

- D-brane is associated to the locally-free sheaf;

We will determine sheaf and then locally-free sheaf.

Let X be a topological space. A sheaf F on X is an association such that

- 1) for every open set $U \subset X$ we have module $F(U)$;
- 2) we have "restriction" maps $r_V^U: F(U) \rightarrow F(V)$ satisfying:

$$r_U^U = 1_U, \quad r_W^V r_V^U = r_W^U, \quad \text{for } W \subset V \subset U;$$

- 3) for every open cover $U = \bigcup_i U_i$ there is exact sequence

$$0 \rightarrow F(U) \rightarrow \prod_i F(U_i) \rightarrow \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j).$$

The sheaf of ring of continuous functions \mathcal{O}_X on the topological space X consists of the following data:

- 1) for every open set $U \subset X$ we have ring of continuous functions \mathcal{O}_U ;
- 2) we have "restriction" maps $r_V^U: \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_V$ satisfying:

$$r_U^U = 1; \quad r_W^V r_V^U = r_W^U \quad \text{for } W \subset V \subset U;$$

- 3) for every open cover $U = \bigcup_i U_i$ there is exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(U) \rightarrow \prod_i \mathcal{O}(U_i) \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_i \cap U_j).$$

We can define direct sums of sheaves; we then have the sheaf

$$\mathcal{O}_X^{\oplus p} = \mathcal{O}_X \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_X \text{ for any } p.$$

We define an \mathcal{O}_X -module E_X to be locally free if there is an exact sequence:

$$0 \rightarrow E_X|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus p}|_U \rightarrow 0$$

for every open subset U of X .

There is a one-to-one correspondence between holomorphic vector bundles of rank n on X and locally free sheaves of rank n on X . To see this first consider the trivial complex line bundle over X . We may regard $\mathcal{O}_X(U)$ as the group of holomorphic sections of this bundle over U . Thus, if the covering U_α trivializes a vector bundle $E \rightarrow X$, then the group of holomorphic sections of E over U_α is given by $\mathcal{O}_X(U_\alpha)^{\oplus n}$. So locally free sheaves are the algebraic way of describing holomorphic vector bundles.

- An open string from one D-brane (sheaf E) to another D-brane (sheaf F) is given by an element of the group $\text{Ext}^q(E, F)$;

We'll explain this definition.

Suppose we have a short exact sequence

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

in an abelian category. A functor F is said to be exact if the following is exact:

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0 .$$

Now suppose we have two vector bundles E and F over X . The bundle $\text{Hom}(E, F)$ is also a vector bundle. We may associate locally free sheaves \mathcal{E} and \mathcal{F} to the bundles E and F respectively. The locally-free sheaf we associate to $\text{Hom}(E, F)$ is denoted $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Since sheaf cohomology is the functor of global section, and a global section of $\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ is given by $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, we may deduce that

$$H^q(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})) = \text{Ext}^q(\mathcal{E}, \mathcal{F}) .$$

Thus the statement that an open string from a brane $E \rightarrow X$ to a brane $F \rightarrow X$ is given by an element of the cohomology group or by an element of the group $\text{Ext}^q(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

- The category of D-branes is the derived category of coherent sheaves $D(X)$; On a smooth space, any coherent sheaf \mathcal{A} has a locally-free resolution, an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^{-3} \rightarrow \mathcal{F}^{-2} \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \rightarrow \mathcal{F}^0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0 ,$$

where \mathcal{F}^k is locally free. This is quasi-isomorphism $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{A}$ between a complex of locally-free sheaves and a coherent sheaf. In order to define the derived category, we had to begin with an abelian category. Abelian category is characterized by the existence of an exact sequences. Locally-free sheaves don't form an abelian category. So we should replace the category of locally-free sheaves by the abelian subcategory of \mathcal{O}_X -modules containing locally-free sheaves. This is the category of coherent sheaves, that was first conjectured by Kontsevich [3]. Category of coherent sheaves is abelian category. The derived category is additive category. In additive categories exact sequences are exchanged by distinguished triangles. It is known from [2] that all coherent sheaves are D-branes. The derived category $D(X)$ is a vast thing encompassing a good deal for D-branes.

- If X and Y are mirror Calabi-Yau threefolds then the category $D(X)$ is equivalent to the triangulated category $\text{Tr}\mathcal{F}(Y)$;

In the derived category $D(X)$ objects are distinguished triangles, morphisms of this category are morphisms of distinguished triangles. So it is equivalent to the triangulated category $\text{Tr}\mathcal{F}(Y)$.

• D-branes on the orbifold \mathbb{C}/G and open strings between them are described by the derived category of McKay quiver representations.

Let G be a finite subgroup of $SU(d)$. Since the orbifold \mathbb{C}^d/G have played an important role in the understanding of stringy geometry it should be no surprise that we can study D-branes by blowing-up singularities of orbifolds. After blowing up singularity of orbifold we have coherent sheaf. Let $G \subset SU(d)$ act on V , which is an arbitrary representation of G . Then we will define a G -equivariant sheaf on \mathbb{C}^d . For a sheaf one would define $\mathcal{O}_X(U)$ -module structure for all open sets $U = \mathbb{C}^d$. We can consider morphisms of sheaves. In the quiver language this amounts to a morphism of modules. A morphism from a quiver representation associated to irreducible representations $V = \oplus m_k V_k$ to one associated to $W = \oplus n_k W_k$ will be a morphism

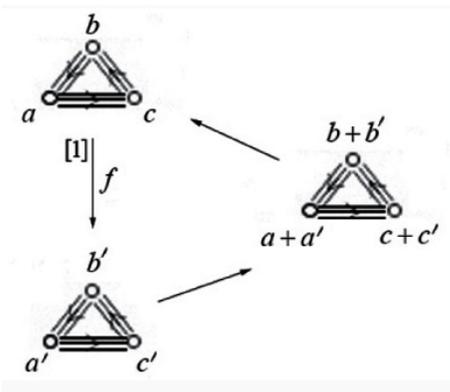
$$\begin{array}{ccc} \bullet m_2 & & \bullet n_2 \\ \uparrow & \longrightarrow & \uparrow \\ \bullet m_1 & & \bullet n_1 \end{array}$$

is equivalent to the following commutative diagram according to Schur's lemma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{m_2} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n_2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}^{m_1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n_1} \end{array}$$

We have constructed morphism of modules. So, the category of G -equivariant sheaves on \mathbb{C}^d is equivalent to the category of representations of the McKay quiver.

We will consider the derived category of distinguished triangles over the abelian category of McKay quivers [2]. Objects of this category are distinguished



triangles

(numbers a, b, c and a', b', c'

denote orbifold charges [4] characterizing McKay quivers); morphisms of this category are morphisms of distinguished triangles.

3 Mass spectrum, partial widths and cross sections of superpartners

The moduli space of an open superstring [5] has the form

$$\begin{aligned} \text{Ext}^0(Q, Q') &= \mathbb{C}^{aa'+bb'+cc'} \\ \text{Ext}^1(Q, Q') &= \mathbb{C}^{3ab'+3bc'+3ca'} \end{aligned} \quad (1)$$

Substituting in (1) orbifold charges

$$a = b = c = a' = b' = c' = 4$$

and using the Langlands hypothesis [6], we obtain the realization of (1) in terms of $SU(5)$ multiplets

$$3 \times (24 + 5_H + \bar{5}_H + 5_M + \bar{5}_M + 10_M + \bar{10}_M) .$$

This result determines the particle content of the MSSM. The gauge invariant MSSM superpotential takes the form

$$\begin{aligned} W_{SU(5)} &= \lambda_{ij}^d \cdot \bar{5}_H \times \bar{5}_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \\ &+ \lambda_{ij}^u \cdot 5_H \times 10_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \mu \cdot 5_H \times \bar{5}_H , \end{aligned} \quad (2)$$

where 5_H and $\bar{5}_H$ are Higgs multiplets, $\bar{5}_M^{(i)}$ and $10_M^{(j)}$ are multiplets of quark and lepton superpartners, λ_{ij}^d , λ_{ij}^u are Yukawa coupling constants and μ is the Higgs mixing parameter. The analysis of Yukawa coupling constants, based on observational hints and theoretical considerations, allows to restrict the parameter space in (2) to five free parameters [7]:

$$\begin{aligned} M_0 &= 450 \text{ GeV} , \quad M_{1/2} = 425 \text{ GeV} , \\ A_0 &= 0 , \quad \tan\beta = 10 , \quad \text{sgn}(\mu) = +1 . \end{aligned} \quad (3)$$

Using this restricted parameter set for mSUGRA-model it is possible to calculate the mass spectrum of superpartners by application of the computer program SOFTSUSY [8]. This MSSM spectrum is shown in Table 1.

Table 1. Mass spectrum of superpartners

	GeV		GeV		GeV
\tilde{u}_R	974			\tilde{g}	1006
\tilde{u}_L	1000	$\tilde{\nu}_e$	525	$\tilde{\chi}_1^0$	174
\tilde{d}_R	972	\tilde{e}_R	477	$\tilde{\chi}_2^0$	327
\tilde{d}_L	1003	\tilde{e}_L	531	$\tilde{\chi}_3^0$	546
\tilde{c}_R	974			$\tilde{\chi}_4^0$	562
\tilde{c}_L	1000	$\tilde{\nu}_\mu$	525	$\tilde{\chi}_1^\pm$	327
\tilde{s}_R	972	$\tilde{\mu}_R$	477	$\tilde{\chi}_2^\pm$	562
\tilde{s}_L	1003	$\tilde{\mu}_L$	531		
\tilde{t}_1	741			h^0	114
\tilde{t}_2	947	$\tilde{\nu}_\tau$	523	A^0	749
\tilde{b}_1	910	$\tilde{\tau}_1$	471	H^0	749
\tilde{b}_2	968	$\tilde{\tau}_2$	531	H^\pm	753

Using the parameter set (3) it is pos-

sible to calculate partial widths of superpartners by application of the computer program SDECAY [9]. These partial widths are shown in Tables 2, 3. **Table 2.**

Partial widths of superpartners

	channel	BR	channel	BR
\tilde{u}_R	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.993	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.004
	$\tilde{\chi}_2^0 u$	0.002		
\tilde{d}_R	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.993	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.004
	$\tilde{\chi}_2^0 d$	0.002		
\tilde{c}_R	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.993	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.004
	$\tilde{\chi}_2^0 c$	0.002		
\tilde{s}_R	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.993	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.004
	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.002		

Table 3. Partial widths of superpartners

	channel	BR	channel	BR
g	$d_R d^*$	0.017	$b_1 b^*$	0.119
	$d_R^* d$	0.017	$b_1^* b$	0.119
	$u_R u^*$	0.015	$b_2 b^*$	0.021
	$u_R^* u$	0.015	$b_2^* b$	0.021
	$s_R s^*$	0.017	$t_1 t^*$	0.294
	$s_R^* s$	0.017	$t_1^* t$	0.294
	$c_R c^*$	0.015		
	$c_R^* c$	0.015		

Using the parameter set (3) it is possi-

ble to calculate production cross sections of superpartners by application of the computer program PYTHIA [10]. These cross sections at center-of-mass energy $\sqrt{s} = 14$ TeV are shown in Table 4. **Table 4.** Cross sections of superpartners

channel	cross section, pb
$gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 0.323$
$qg \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{g}} = 0.260$
$qg \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{g}} = 0.489$
$q\bar{q}' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{d}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{d}_R} = 0.132$

4 Reconstruction of masses

To construct histograms describing mass distributions for superpartners \tilde{q}_R and \tilde{g} we choose the set of parameters (3). Using this parameter set it is possible to construct histograms of mass distributions for superpartners by application of the computer program PYTHIA [10]. This histograms are shown in Fig.1 and Fig.2.

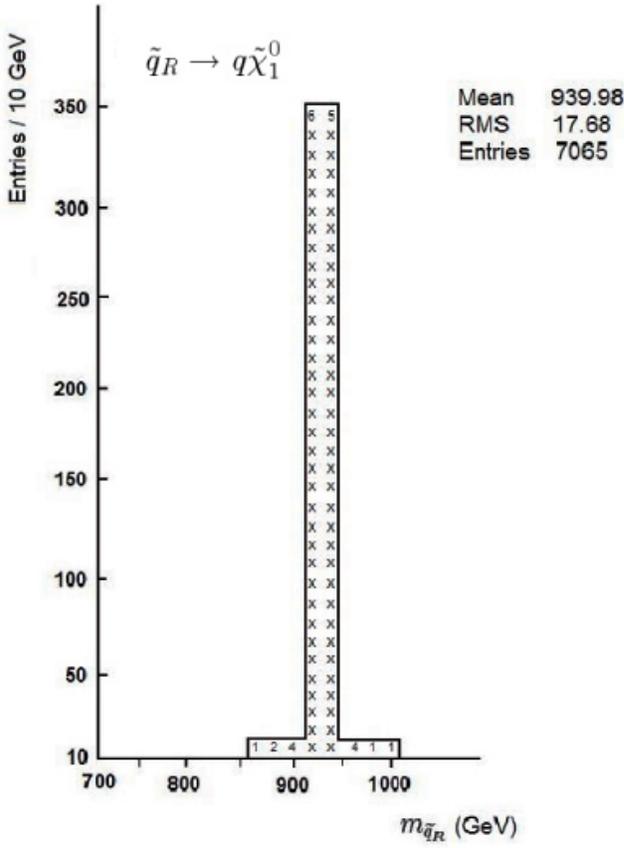


Fig. 1. Histogram of mass distribution for \tilde{q}_R

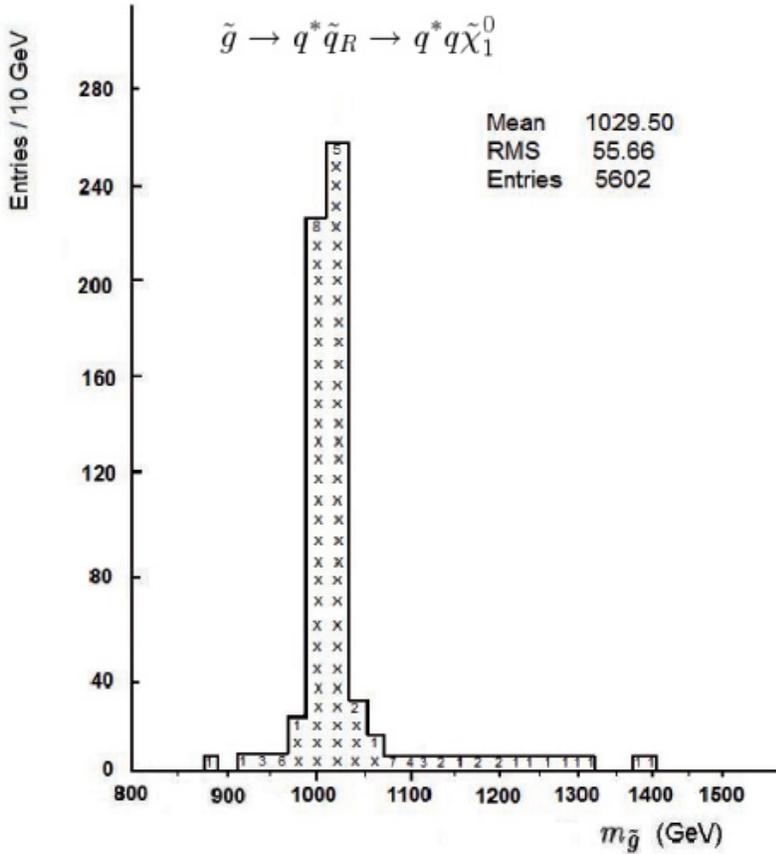


Fig.2. Histogram of mass distribution for \tilde{g}

References

1. Beasley, C., Heckman, J.J. and Vafa, C.: GUTs and exceptional branes in F-theory-I. arXiv:0802.3391 [hep-th].
2. Aspinwall, P.S.: D-branes on Calabi-Yau manifolds. arXiv: hep-th/0403166.
3. Kontsevich, M.: Homological algebra of mirror symmetry. arXiv: alg-geom/9411018.
4. Douglas, M.R., Fiol, B. and Römelsberger, C.: The spectrum of BPS branes on a noncompact Calabi-Yau. arXiv: hep-th/0003263.
5. Katz, S., Pantev, T. and Sharpe, E.: D-branes, orbifolds, and Ext groups. arXiv: hep-th/0212218.
6. Schmid, W.: Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **69**, 56–59 (1968).
7. Heckman, J.J. and Vafa, C.: F-theory, GUTs, and the weak scale. arXiv:0809.1098 [hep-th].
8. Allanach, B.C.: SOFTSUSY2.0: a program for calculating supersymmetric spectra. Comput. Phys. Commun., **143**, 305–331 (2002).

9. Muhlleitner, M., Djouadi, A. and Mambrini, Y.: SDECAY: a fortran code for the decays of the supersymmetric particles in the MSSM. *Comput. Phys. Commun.*, **168**, 46–70 (2005).
10. Sjöstrand, T., Mrenna, S. and Skands, P.: PYTHIA 6.4 Physics and Manual. *JHEP*, **05**, 1–26 (2006).

T.V. Obikhod

Institute for Nuclear Research, NAS of Ukraine 03680 Kiev, Ukraine

E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

Одержано 1.11.2011

Гомотопия функций общего положения без критических точек на римановом диске

Александр Пришляк, Екатерина Пришляк, Наталия Лукова-Чуйко

Аннотация На двухмерном диске с римановой метрикой дается гомотопическая классификация функций, у которых нет внутренних критических точек, а особые точки (критические точки ограничения на край и точки касания края поля градиента) лежат на разных уровнях и разных траекториях поля градиента

Ключевые слова функции общего положения, гомотопическая классификация

УДК 517.91

1 Введение

При исследовании пространства функций на многообразии часто выделяют подмножества, которые состоят из функций общего положения (страты коразмерности 0). Это функции, которые при малом шевелении сохраняют свои топологические свойства. На замкнутых многообразиях такими функциями являются простые функции Морса. Путь в пространстве функций Морса – это непрерывное семейство функций Морса. Топологические свойства пространства функций Морса на замкнутых поверхностях исследовались во многих работах, среди которых выделим работы [1–6,9].

Обозначим через B – замкнутый круг (двухмерный диск) с заданной на нем римановой метрикой. Пусть $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ – гладкая функция без

критических точек на V . Тогда эта функция задает два слоения (сетку) на V . Слоями первого слоения являются компоненты линий уровней $f^{-1}(y)$ функции, а второго – траектории поля градиента $\text{grad } f$. Чтобы задать функцию достаточно задать первое слоение и ограничение f_{∂} функции на границу. При этом функция постоянна на слоях первого слоения.

Рассмотрим второе слоение и ограничение функции на границу круга. Заметим, что при движении по траектории поля градиента значение функции возрастает, поэтому, в отличие от первого слоения, значения на концах одной траектории всегда будут различны.

Под особыми точками будем понимать критические точки ограничения функции на край (далее просто критические точки) и точки, в которых поле градиента касается края (касательные точки). Мы будем рассматривать только функции, у которых все особые точки имеют разные значения и не существует траектории соединяющей две особые точки. Такие функции будем называть общими.

Гомотопия общих функций – это путь в пространстве общих функций, т.е. непрерывное семейство общих функций. При этом каждой функции соответствует своя риманова метрика. Как и любая гомотопия, гомотопия общих функций есть отношением эквивалентности. Цель нашей статьи – описать классы эквивалентности: построить инвариант – схему функции, доказать критерий эквивалентности, найти условия существования функции с заданной схемой.

Отметим, что топологические свойства функций на двумерном диске исследовались в работе [7], а функций Морса на римановых замкнутых многообразиях в [8].

2 Построение схемы функции

Пусть число критических точек равно k , а особых – n . На множестве особых точек введем нумерацию. Первой точкой будет точка минимума, при движении по краю против часовой стрелки номер точки возрастает. Каждой особой точке поставим в соответствие номер критического значения по возрастанию. Так точка минимума имеет номер 1, а максимума – номер n . Таким образом получим подстановку из n чисел.

Кроме того, для каждой особой точки, из которой выходит траектория поля градиента, поставим в соответствие особую точку, предшествующую точке, в которой эта траектория покидает круг. Таким образом получим набор упорядоченных пар номеров.

Схемой функции называется набор состоящий из подстановки из n чисел и упорядоченных пар номеров.

По подстановке можно определить тип особой точки. Если значение функции в соседних точках больше значения особой точки, то она есть локальным минимумом, если меньше – максимумом. Остальные особые точки – точки касания.

Точки касания разбивают окружность на дуги, которые мы будем называть дуги-источники, если в них векторное поле направлено внутрь круга, и дуги-стоки — в противном случае. Дуга, содержащая точку минимума, будет дугой-источником, а максимума – дугой-стоком.

Определим дуги исходящей точки траектории, касающейся края. Возможны два случая: 1) край справа; 2) край слева от траектории в окрестности точки касания, если функция есть функцией высоты. В первом случае движемся от точки касания по окружности по часовой стрелке до ближайшей точки касания. Если она не является второй точкой в упорядоченных парах, то она является концом дуги-источника, на которой лежит искомая исходящая точка. Если эта точка является второй точкой, то повторим процедуру для первой точки этой пары. Если таких вторых точек несколько, то среди всех первых точек выбираем ту, которая наиболее удалена от начальной касательной точки при обходе окружности по часовой стрелке. Для второго случая определение исходящей точки получается аналогично, с заменой движения по часовой стрелке на движение против часовой стрелки.

3 Критерий эквивалентности

Theorem 1 (*критерий эквивалентности функций*). *Две общие функции $f, g : B \rightarrow \mathbf{R}$ будут гомотопными тогда и только тогда, когда схема одной совпадает со схемой другой функции.*

Доказательство. Необходимость следует из построения схемы. Гомеоморфизмы задают соответствие между точками и равенство соответствующих номеров.

Докажем достаточность. Пусть схемы двух функций одинаковые. Траектории, проходящие через точки касания, разбивают круг на области, каждая из которых представляет собой криволинейный четырехугольник или треугольник, одна из вершин которого – точка качания (случай двухугольника – две критические точки и две точки касания тривиален). В четырехугольнике одна сторона является дугой-источником, противоположная ей

сторона – дугой-стоком, а две другие стороны – касательными траекториями или их частью. Случай треугольника получается из четырехугольника стягиванием касательной траектории в точку. Выделим на каждой касательной стороне одну точку – точку касания, если она не есть вершиной четырехугольника, и середину стороны в противном случае. Проведем произвольную кривую трансверсальную каждой из траекторий и проходящую через выделенные точки. Эту кривую будем называть разбивающей. Таким образом, разобьем четырехугольник на два новых четырехугольника. Построим топологическую эквивалентность векторных полей внутри четырехугольников. Для этого зафиксируем гомеоморфизмы разбивающих кривых. Продолжим их на траектории, проходящие через них следующим образом. Параметром на каждой траектории будет длина дуги. Если длина дуги от точки разбивающей кривой до края по направлению возрастания равна a , а длина соответствующей дуги второго поля b , то точка с параметром s перейдет в точку с параметром $\frac{bs}{a}$ (точки разбивающей кривой имеют параметр $s = 0$). В треугольниках – точно такие же построения (можно считать это частным случаем четырехугольника, с длиной одной из сторон равной 0). По построению гомеоморфизмы совпадают на границах четырехугольников, и поэтому они задают гомеоморфизм всего круга, который переводит траектории в траектории, т.е. является топологической эквивалентностью векторных полей.

Совпадение упорядоченные последовательностей критических точек фактически означает совпадение порядков критических значений в соответствующих критических точках. Гомеоморфизм прямой φ отображает первое (минимальное) критическое значение первой функции в первое критическое значение второй, второе во второе и т.д. Тогда гомеоморфизм дуг между критическими точками задается по значениям функции на них – точка со значением y отображается в точку со значением $\varphi(y)$. Совпадение этих гомеоморфизмов на концах означает, что эти гомеоморфизмы дуг задают искомый гомеоморфизм окружности. Поскольку каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм круга изотопный тождественному, то существует изотопия функций, равная композиции этой изотопии круга и первой функции. Эта изотопия отображает траектории в траектории. Осталось построить новые римановы метрики для этой изотопии. Для этого на диске выберем две гладкие функции $X_t = f_t(x, y)$ и Y_t так, что ее линиями уровня являются траектории построенного поля $\text{grad } f_t$. Тогда искомая риманова метрика задается формулой $ds^2 = dX_t^2 + dY_t^2$. Теорема доказана.

4 Свойства схемы функции

Из построения схемы функции прямо вытекают следующие ее свойства.

1. *Поворот касательного вектора при полном прохождении границы равен 2π . Подстановка начинается с 1.* Если от одной точки локального экстремума до следующей нечетное число точек касания, то поворот касательного вектора будет на $\pm\pi$, а если четное – то на 0. Если от точки минимума до следующего локального максимума нечетное число точек касания, то поворот касательного вектора будет на $+\pi$. То же будет на любом отрезке от локального минимума до следующего локального максимума, если в точке локального минимума суммарный угол поворота равен $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. В случае суммарного угла $\pi(2n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$, в точках локального минимума он изменяется на отрезке до следующего локального максимума на $-\pi$ при нечетном числе точек касания. На отрезках с началом в точке локального максимума все наоборот: изменение на $-\pi$, если было $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ и на π , если было $\pi(2n + 1)$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. *Первыми точками пары являются все точки локального экстремума с углом поворота $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, и точки касания с нечетными номерами.*
3. *Значение функции во входящих точках больше значения в исходящих точках.* Это означает, что значение функции на первом элементе пары меньше значения функции на втором элементе или на следующей после него особой точке. Кроме того, выполняется еще одно условие: если есть пары (n_1, n_2) и $(n_1 + 1, m_2)$, начинающиеся в точках локального экстремума, то минимальное значение в точках n_1 и $n_1 + 1$ меньше минимального значения на дуге между $m_2 + 1$ и n_2 (если $n_2 = m_2$, то максимального значения в m_2 и $m_2 + 1$). Для точек касания аналогичное условие с заменой их на исходящие дуги для них.
4. *Хорды, соединяющие концы пар, не пересекаются между собой.* Пусть (n_1, n_2) и (m_1, m_2) – две пары. Тогда невозможно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий: а) $n_1 < m_1 < n_2 < m_2$; б) $n_1 > m_1 > n_2 > m_2$; в) $n_1 < m_2 < n_2 < m_1$; д) $n_1 > m_2 > n_2 > m_1$. Если $n_2 = m_1$, то не должны выполняться те же четыре условия при замене $n_2 = m_1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Аналогично при $n_1 = m_2$ делаем замену $m_2 = n_1 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Theorem 1 (о реализации). *Если подстановка из n чисел и упорядоченных пар номеров удовлетворяет свойствам 1) – 4), то она является схемой некоторой функции для некоторой римановой метрики.*

Доказательство. Исходящие в особые точки траектории строятся так, чтобы они не пересекали других. Поэтому вместе с условием 4) имеем, что траектории, проходящие через особые точки, не пересекаются между собой и разбивают круг на криволинейные четырехугольники и треугольники. Будем считать, что точки, лежащие на одной траектории, имеют общую абсциссу, а ординаты точек равны значению функции в них. Условие 3 позволяет построить графики функций на краю каждого четырехугольника (треугольника) так, чтобы они не пересекались. Тогда для каждого четырехугольника (треугольника) построим гомеоморфизм его на область между графиками. При этом вертикальные прямые между графиками перейдут в траектории поля градиента и у нас будет задано значение функции в каждой точке четырехугольника (треугольника). Совпадение функций на боковых сторонах можно добиться так же, как в критерии эквивалентности функций. Тогда получим нужную функцию на круге. Теорема доказана.

5 Примеры использования

Покажем как построенную схему и доказанные теоремы можно использовать для подсчета числа негомтопных общих функций на диске с 4 или 6 особыми точками на границе.

Если у функции 4 особые точки, то две из них критические. Из первого условия следует, что первая точка – точка минимума, а третья – точка максимума. Возможны две такие подстановки: (1 2 4 3) и (1 3 4 2). В каждой из них для минимума возможны две пары: (1,2) и (1,3). Таким образом, существует 4 негомтопные функции с 4 особыми точками.

Для шести точек из первого условия возможны 2 варианта: 1) точка максимума будет третьей, 2) она будет пятой. Рассмотрим первый случай и в нем вариант, когда вторая точка имеет значение 5. Тогда для оставшихся трех точек возможны 6 вариантов:

а) (1 5 6 4 3 2). В этом случае две пары. Первая – (1, 2), (1, 4) или (1, 5). Вторая – (3, 4) или (3,5). Всего 6 вариантов, но один из них (1, 4), (3, 5) не удовлетворяет условию 4. Поэтому для этой подстановки существует 5 функций;

б) (1 5 6 2 4 3). Одна пара (1, 2), (1, 3), (1, 4) или (1, 5). Всего 4 функции;

в) (1 5 6 3 4 2) – также как и в б) 4 функции;

г) (1 5 6 2 3 4) – не выполнено условие поворота от максимума до минимума. Нет таких функций;

д) (1 5 6 4 2 3). Три пары, которые начинаются в 1, 5 и 6, а заканчиваются на 2 или 3. Учитывая условие 4 возможны 4 варианта и, значит, 4 функции;

е) (1 5 6 3 2 4) – такой же вариант, как и предыдущий: 4 функции.

Всего в шести вариантах 21 функция.

На втором месте, вместо 5 может быть 2, 3 или 4. В каждом из этих вариантов по 21 функции. То есть всего 84 с максимумом на третьем месте.

Ситуация с максимумом на пятом месте такая же, как и на третьем. Тут тоже 84 функции. Таким образом, существует 168 негомоторные функции с 6 особыми точками.

6 Выводы

На двумерном диске с римановой метрикой получена гомотопическая классификация функций, у которых нет внутренних критических точек, а особые точки (критические точки ограничения на край и точки касания края поля градиента) лежат на разных уровнях и разных траекториях поля градиента. Подсчитано число негомоторных функций с 4 и 6 особыми точками. Результаты работы могут быть использованы при классификации общих функций на римановых поверхностях с краем. Они также могут быть полезными при работе с разными объектами, которые задаются функциями на двумерном диске, зависящими от параметра (например, времени) .

Список литературы

1. Кудрявцева Е.А. Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками / Е.А. Кудрявцева // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, в печати (2011). arXiv:1007.4398.
2. Кудрявцева Е.А. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях / Е.А. Кудрявцева // <http://arxiv.org/abs/1104.4796>
3. Максименко С. Компоненты пространств отображений Морса / С. Максименко // "Некоторые проблемы современной математики". Труды Ин-та математики НАН Украины, т. 25 (1998), 135–153.
4. Maksymenko S.I. Path-components of Morse mappings spaces of surfaces / S.I. Maksymenko // Comment. Math. Helv. 80 (2005), 655-690.
5. Maksimenko S.I. Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces / S.I. Maksymenko // Annals of Global Analysis and Geometry, 29 no. 3, (2006) 241-285.
6. Шарко В. В. Функции на поверхностях, I / В. В. Шарко // *Некоторые проблемы современной математики*. Праці Інституту математики НАН України. — Киев: Ін-т математики НАН України, 1998. — Т. 25. — С. 408-434.
7. Polulyakh E. On the pseudo-harmonic functions defined on a disk / E. Polulyakh, I. Yurchuk. Праці Інституту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — Р. 151.
8. Lychak D. P. Morse functions and flows on nonorientable surfaces / D. P. Lychak, A. O. Prishlyak // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2009. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 251–258.
9. Ikegami Kazuichi. Cobordism group of Morse functions on manifolds / Kazuichi Ikegami // *Hiroshima Math. J.* — 2004. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 211–230.

Александр Пришляк, Екатерина Пришляк, Наталия Лукова-Чуйко

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Киев, Украина

E-mail: prishlyak@yahoo.com

Alexandr Prishlyak, Katerina Prishlyak, Nataliya Lukova-Chuyko

Department of Geometry, Taras Shevchenko National University of Kiyv, 2, Glushkova Prospect, Kiyv, Ukraine

Homotopy of function in general position without critical points on Rermanian disc

We establish a homotopic classification of functions on 2-disc with Riemannian metric. The functions don't have interior critical points and all singular points lie on different levels of the function and on the different trajectories of the gradient vector field. Here the singular points are critical points and tangent points of the gradient field to the boundary.

Одержано 13.1.2012

О шестимерных групповых три-тканях с тривиальной сердцевинной

Гегамян Г.Д.

Аннотация Найдены структурные уравнения групповой три-ткани, сердцевина которой тривиальна (изотопна абелевой группе). Условия тривиальности сердцевины шестимерных групповых три-тканей связаны с рангом матрицы, образованной компонентами тензора кручения ткани.

Ключевые слова Три-ткань Бола, сердцевина ткани Бола, локально симметрическое пространство, групповая три-ткань, тривиальная сердцевина, локально плоская структура

УДК 514.7

1 Введение.

Известно [1], [9], что любая ткань Бола (левая $B_l(r, r, r)$, правая $B_r(r, r, r)$ и средняя $B_m(r, r, r)$) индуцирует на базе соответственно первого, второго и третьего слоения локально симметрическую структуру. Согласно [7] (см. также [8]) симметрическая структура, индуцируемая левой тканью Бола $B_l \equiv B_l(r, r, r)$ на базе ее первого слоения, порождается локальной гладкой квазигруппой, называемой сердцевинной тканью B_l . Напомним, что понятие сердцевины впервые ввел В.Д. Белоусов в [2]. В [8] показано, что сердцевина ткани B_l не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе этой ткани. Симметрическая структура, порождаемая сердцевинной тканью B_l , может быть локально плоской [6]. В этом случае сердцевина ткани B_l изотопна абелевой группе (теорема 1). Такая сердцевина названа тривиальной, а соответствующая ткань обозначена B_l^0 .

Понятия сердцевины и локально симметрической структуры определяются также для групповой три-ткани, так как последняя является тканью Бола, причем одновременно левой, правой и средней [1]. В п. 3, записаны структурные уравнения групповой три-ткани, для которой симметрическая структура является локально плоской (такая ткань обозначена R^0). Рассмотрены четырёхмерные ($r = 2$) и шестимерные ($r = 3$) три-ткани R^0 . Показано, что при $r = 2$ локально плоскую структуру, порождаемую тривиальной сердцевиной, индуцирует только параллелизуемая три-ткань R^0 . Напомним [1], что координатная квазигруппа параллелизуемой три-ткани изотопна абелевой группе. Доказано, что в случае $r = 3$, ранг матрицы, образованной компонентами тензора кручения шестимерной непараллелизуемой групповой три-ткани с тривиальной сердцевиной, равен 1 (теорема 2). При этом оказалось, что в классе таких тканей существует только одна групповая ткань с тривиальной сердцевиной. Она порождается группой $\Gamma_{3,7}[3]$.

1. Основные понятия

Определение 1. Три-тканью $W(r, r, r)$ на $2r$ -мерном дифференцируемом многообразии M называется совокупность трех гладких слоений λ_1 , λ_2 и λ_3 , слои которых имеют размерность r , причем любые два из этих слоений находятся в общем положении.

Слоения ткани $W(r, r, r)$ могут быть заданы в некоторых локальных координатах на многообразии M уравнениями

$$\lambda_1 : x = \text{const}, \quad \lambda_2 : y = \text{const}, \quad \lambda_3 : z = f(x, y) = \text{const}, \quad (1)$$

где $x = (x^1, \dots, x^r)$, $x \in X$, $y = (y^1, \dots, y^r)$, $y \in Y$, $z = (z^1, \dots, z^r)$, $z \in Z$, $f = (f^1, \dots, f^r)$, f — гладкая функция, $|\frac{\partial f}{\partial x}| \neq 0$ и $|\frac{\partial f}{\partial y}| \neq 0$ в каждой точке многообразия M .

Уравнение $z = f(x, y)$ связывает параметры x , y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(r, r, r)$, проходящих через одну точку многообразия M , и называется *уравнением три-ткани* $W(r, r, r)$. Это уравнение определяет трехбазисную бинарную операцию

$$(\cdot) : X \times Y \rightarrow Z, \quad z = f(x, y) \equiv x \cdot y, \quad (2)$$

которая является квазигруппой и называется *локальной координатной квазигруппой* три-ткани $W(r, r, r)$. Переменные x , y и z , входящие в уравнение

(2), допускают преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ – локальные диффеоморфизмы. Тройка локальных биекций (α, β, γ) называется *изотопическим преобразованием* или *изотопией* [1]. Указанным изотопическим преобразованием уравнение (2) приводится к виду

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\tilde{x}), \beta^{-1}(\tilde{y})).$$

Последнее определяет координатную квазигруппу некоторой другой ткани $\tilde{W}(r, r, r)$. Три-ткани $W(r, r, r)$ и $\tilde{W}(r, r, r)$, координатные квазигруппы которых изотопны, являются эквивалентными [1].

В работе [1] для тканей $W(r, r, r)$ определены основные типы конфигураций, в том числе конфигурации Бола: левая (B_l), правая (B_r) и средняя (B_m). Напомним определение конфигурации (B_l) (см. рис. 1, где слои первого, второго и третьего слоений ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно).

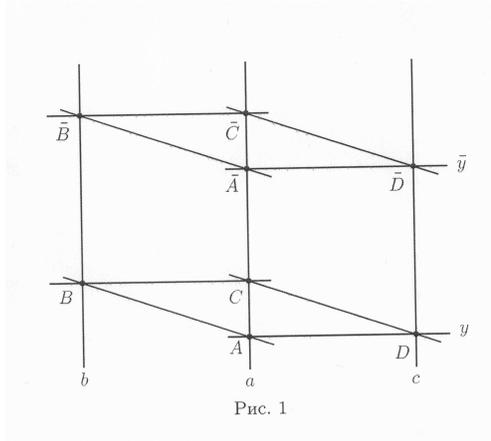
Пусть a и b – два произвольных достаточно близких вертикальных слоя ткани, y – произвольный горизонтальный слой. Последний пересекает слой a в некоторой точке A . Через A проходит единственный наклонный слой, который пересекает слой b в некоторой точке B . Проходящий через B горизонтальный слой пересекает вертикальный слой a в точке C ; через нее проходит единственный наклонный слой, который, в свою очередь, пересекает слой y в некоторой точке D . Для другого горизонтального слоя \bar{y} аналогичным образом получатся новые точки $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ и \bar{D} . Если точки D и \bar{D} лежат на одном и том же вертикальном слое (на рис. 1 он обозначен c), то говорят, что конфигурация (B_l) замыкается.

Определение 2. *Три-ткань, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации (B_l), называется левой тканью Бола и обозначается B_l .*

Локальная координатная квазигруппа ткани B_l изотопна левой лупе Бола. Напомним, что лупа (квазигруппа с единицей) является левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола: $(u \circ (v \circ u)) \circ w = u \circ (v \circ (u \circ w))$, (здесь \circ – операция в лупе).

Условию замыкания на три-ткани $W(r, r, r)$ конфигураций (B_l) соответствует тождество:

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \quad a, b \in X, \quad y \in Y, \quad (3)$$



где $c = a * b$, см. рис. 1. Операция $(*) : X \times X \rightarrow X, c = a * b$, является квазигруппой и называется *сердцевинной* ткани B_l . Известно [7], что эта квазигруппа является идемпотентой ($a * a = a$), левообратимой ($a * (a * b) = b$) и леводистрибутивной ($a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$). Поэтому она изотопна левой лупе Бола. Известно также [8], что сердцевина три-ткани не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе этой ткани.

2. Структурные уравнения левой ткани Бола

Согласно [7], сердцевина $c = a * b$ левой три-ткани Бола $B_l \equiv B_l(r, r, r)$ порождает на базе X первого слоения ткани локально симметрическую структуру, которая задается семейством гладких функций S_a , таких, что $S_a(b) = a * b$ для любых $a \in X$ и $b \in U_a \subset X$, где U_a — достаточно малая окрестность точки a , см. рис. 1. При этом функции S_a являются локальными симметриями, а многообразии $\{X, S_a\}$ будет локально симметрическим пространством. Соответствующая локально симметрическая связность является аффинной связностью без кручения и с ковариантно постоянным тензором кривизны. Напомним, как получаются структурные уравнения указанной симметрической связности.

Запишем уравнение (2) произвольной три-ткани $W(r, r, r)$ в некоторых локальных координатах в виде:

$$z^i = f^i(x^j, y^k),$$

где $i, j, k, \dots = \overline{1, r}$. Дифференцируя последние уравнения и обозначая $\bar{f}_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\tilde{f}_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}$, получим уравнения:

$$dz^i = \bar{f}_j^i dx^j + \tilde{f}_j^i dy^j.$$

Положим:

$$\omega_1^i = \bar{f}_j^i dx^j, \quad \omega_2^i = \tilde{f}_j^i dy^j.$$

Тогда в силу (1) слоения ткани $W(r, r, r)$ будут определяться уравнениями:

$$\lambda_1 : \omega_1^i = 0, \quad \lambda_2 : \omega_2^i = 0, \quad \lambda_3 : \omega_3^i \stackrel{def}{=} \omega_1^i + \omega_2^i = 0.$$

Формы ω_1^i и ω_2^i образуют на многообразии \mathcal{M} , несущем ткань $W(r, r, r)$, кобазис и удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$d\omega_1^i = \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad d\omega_2^i = \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (4)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l. \quad (5)$$

Величины a_{jk}^i и b_{jkl}^i являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани $W(r, r, r)$. Они связаны равенствами

$$b_{[jkl]}^i = 2a_{[jk}^m a_{|m|l]}^i$$

и удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla a_{jk}^i \equiv da_{jk}^i - a_{mk}^i \omega_j^m - a_{jm}^i \omega_k^m + a_{jk}^m \omega_m^i = b_{[j|l|k]}^i \omega_1^l + b_{[jk]l}^i \omega_2^l, \quad (6)$$

В уравнениях (6) через ∇ обозначен оператор ковариантного дифференцирования в аффинной связности Γ , которая определяется на многообразии \mathcal{M} формами (ω_1^i, ω_2^i) и $\begin{pmatrix} \omega_j^i & 0 \\ 0 & \omega_j^i \end{pmatrix}$. Она называется канонической аффинной связностью (или связностью Черна).

Согласно [1] связность Γ входит в пучок аффинных связностей $\gamma(W)$, определяемых формами

$$\Omega_j^i = \omega_j^i + a_{jk}^i (p\omega_1^k + q\omega_2^k),$$

где p и q — постоянные. В частности, при $p = 1$ и $q = 0$ получаем связность, определяемую формами

$$\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^k. \quad (7)$$

С учетом равенств (7) и условий

$$b_{(jk)l}^i = 0, \quad (8)$$

характеризующих левые ткани Бола, структурные уравнения (4), (5) три-ткани $B_l \equiv B_l(r, r, r)$ приводятся к виду:

$$\begin{aligned} d\omega_1^i &= \omega_1^j \wedge \tilde{\omega}_j^i, \\ d\omega_2^i &= \omega_2^j \wedge \tilde{\omega}_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_3^k, \\ d\tilde{\omega}_j^i &= \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i + \tilde{R}_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_1^l, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tilde{R}_{jkl}^i = \frac{1}{4}(b_{klj}^i - 2a_{mj}^i a_{kl}^m). \quad (10)$$

Из уравнений (9) следует, что формы $\{\omega_1^i, \tilde{\omega}_j^i\}$ определяют на базе первого слоения три-ткани $W(r, r, r)$ аффинную связность (обозначим ее $\tilde{\Gamma}$), которая не имеет кручения, а ее тензор кривизны \tilde{R}_{jkl}^i является ковариантно постоянным:

$$\tilde{\nabla} \tilde{R}_{jkl}^i = 0,$$

(здесь $\tilde{\nabla}$ — оператор ковариантного дифференцирования в связности $\tilde{\Gamma}$). Следовательно, связность $\tilde{\Gamma}$ является локально симметрической [5]. Она порождается сердцевиной ткани B_l . Показано также, что

$$\tilde{\nabla} a_{jk}^i = \frac{1}{2} b_{jkl}^i (\omega_3^l + \omega_2^l), \quad (11)$$

$$\tilde{\nabla} b_{jkl}^i = (a_{pl}^i b_{jkm}^p + a_{jk}^p b_{plm}^i) (\omega_3^m + \omega_2^m), \quad (12)$$

а тензоры кручения и кривизны ткани B_l связаны соотношениями:

$$a_{pl}^i b_{jkm}^p - a_{pm}^i b_{jkl}^p + b_{plm}^i a_{jk}^p - b_{pml}^i a_{jk}^p + b_{jkp}^i a_{lm}^p = 0. \quad (13)$$

В частности, связность $\tilde{\Gamma}$ может быть локально плоской, то есть ее тензор кривизны равен нулю:

$$\tilde{R}_{jkl}^i = 0. \quad (14)$$

Такую связность обозначим $\tilde{\Gamma}^0$, а соответствующую ткань обозначим B_l^0 .

Структурные уравнения ткани B_l^0 получаются следующим образом. Из (9) в силу (14) получаем уравнения:

$$d\tilde{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i.$$

Из них следует, что система

$$\tilde{\omega}_j^i = 0 \quad (15)$$

является вполне интегрируемой на многообразии \mathcal{M} , несущем три-ткань B_l^0 . С учетом (15) запишем структурные уравнения (9) в виде:

$$\begin{aligned} d\omega_1^i &= 0, \\ d\omega_2^i &= -a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_3^k. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (10) в силу (14) следуют равенства

$$b_{jkl}^i = 2a_{ml}^i a_{jk}^m. \quad (17)$$

Уравнения (10) в силу (14) и (16) примут следующий вид:

$$\tilde{\nabla} a_{jk}^i \equiv da_{jk}^i = a_{ml}^i a_{jk}^m (\omega_3^l + \omega_2^l). \quad (18)$$

Дифференцируя уравнения (18), получим равенства:

$$a_{pq}^i a_{jk}^p a_{ml}^q = 0. \quad (19)$$

Таким образом, структурные уравнения три-ткани B_l^0 (и только такой ткани) приводятся к виду (16), где тензор кручения a_{jk}^i удовлетворяет уравнениям (18) и соотношениям (19).

Допустим, что сердцевина ткани B_l изотопна абелевой группе (такая сердцевина называется тривиальной). В этом случае связность $\tilde{\Gamma}$ будет локально плоской [6], поэтому ткань B_l является тканью B_l^0 . Нетрудно показать, что обратное утверждение также верно, то есть сердцевина, порождаемая тканью B_l^0 , изотопна абелевой группе. Справедлива

Теорема 1 *Локально симметрическая связность $\tilde{\Gamma}$, индуцируемая левой тканью Бола B_l на базе ее первого слоения, является локально плоской в том и только в том случае, если сердцевина $c = a * b$ ткани B_l изотопна абелевой группе.*

3. Групповая три-ткань с тривиальной сердцевиной

Пусть $W(r, r, r)$ – групповая три-ткань, порождаемая r -мерной группой Ли G , см. [1]. Обозначим такую ткань R . Известно, что тензор кривизны групповой три-ткани равен нулю:

$$b_{jkl}^i = 0, \quad (20)$$

а тензор кручения a_{jk}^i является структурным тензором группы G . Известно также, что групповая три-ткань является левой тканью Бола (условия (8)

вытекают из (20)). Поэтому групповая ткань индуцирует на базе первого слоения локально симметрическую связность $\tilde{\Gamma}$. Из (10) в силу (20) следует, что тензор кривизны \tilde{R}_{jkl}^i связности $\tilde{\Gamma}$ определяется по формуле:

$$\tilde{R}_{jkl}^i = -\frac{1}{2}a_{mj}^i a_{kl}^m.$$

О симметрической структуре, связанной с группой Ли, см. также в [4].

Рассмотрим групповую три-ткань R , для которой связность $\tilde{\Gamma}$ является локально плоской, то есть выполняются условия (14). Такая связность обозначена выше $\tilde{\Gamma}^0$. Соответствующую групповую ткань обозначим R^0 . Для ткани R^0 равенства (17) и (18) в силу (20) примут соответственно вид

$$a_{ml}^i a_{jk}^m = 0, \tag{21}$$

$$da_{jk}^i = 0. \tag{22}$$

Отметим, что равенства (19) в силу (21) удовлетворяются тождественно. Верно

Предложение. *Структурные уравнения групповой три-ткани R^0 , определяемой r -мерной группой Ли G , приводятся к виду (16), где величины a_{jk}^i образуют структурный тензор группы G , являются постоянными и удовлетворяют соотношениям (21).*

По теореме 1 сердцевина ткани R^0 изотопна абелевой группе, то есть является тривиальной. При этом координатная группа ткани R^0 не обязана быть абелевой, поскольку известно, что сердцевина ткани не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе ткани. Таким образом, три-ткань R^0 не является, вообще говоря, параллелизуемой. Найдем ткани R^0 , порождаемые двумерными и трехмерными группами Ли.

При $r = 2$ равенства (21) примут вид:

$$a_{12}^1 a_{12}^1 = 0, \quad a_{12}^1 a_{12}^2 = 0, \quad a_{12}^2 a_{12}^2 = 0.$$

Следовательно, $a_{12}^1 = a_{12}^2 = 0$, поэтому группа G абелева, а соответствующая ткань R^0 параллелизуемая. Она задается уравнениями

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Сердцевина этой ткани определяется в силу (3) уравнениями

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1, \\ c^2 = 2a^2 - b^2. \end{cases}$$

и также изотопна абелевой группе. Согласно сказанному выше, она порождает локально плоскую связность $\tilde{\Gamma}^0$.

При $r = 3$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_{12}^1 a_{12}^2 + a_{13}^1 a_{12}^3 &= 0, & a_{12}^2 a_{12}^2 + a_{13}^2 a_{12}^3 &= 0, & a_{13}^3 a_{12}^1 + a_{23}^3 a_{12}^2 &= 0, \\
 \frac{a_{12}^1 a_{12}^1 - a_{23}^1 a_{12}^3}{a_{13}^1 a_{12}^1 + a_{23}^1 a_{12}^2} &= 0, & \frac{a_{12}^2 a_{12}^1 - a_{23}^2 a_{12}^3}{a_{13}^2 a_{12}^1 + a_{23}^2 a_{12}^2} &= 0, & \frac{a_{12}^3 a_{12}^1 + a_{13}^3 a_{12}^3}{a_{13}^3 a_{12}^1 - a_{23}^3 a_{12}^3} &= 0, \\
 \frac{a_{12}^1 a_{13}^1 + a_{13}^1 a_{13}^3}{a_{12}^1 a_{13}^1 - a_{23}^1 a_{13}^3} &= 0, & \frac{a_{12}^2 a_{13}^1 - a_{23}^2 a_{13}^3}{a_{12}^2 a_{13}^1 + a_{23}^2 a_{13}^3} &= 0, & \frac{a_{13}^3 a_{13}^1 + a_{23}^3 a_{13}^3}{a_{13}^3 a_{13}^1 - a_{23}^3 a_{13}^3} &= 0, \\
 \frac{a_{12}^1 a_{13}^1 - a_{23}^1 a_{13}^3}{a_{12}^1 a_{13}^1 + a_{23}^1 a_{13}^3} &= 0, & \frac{a_{12}^2 a_{23}^1 + a_{13}^2 a_{23}^3}{a_{12}^2 a_{23}^1 - a_{13}^2 a_{23}^3} &= 0, & \frac{a_{12}^3 a_{23}^1 + a_{13}^3 a_{23}^3}{a_{12}^3 a_{23}^1 - a_{13}^3 a_{23}^3} &= 0, \\
 \frac{a_{13}^1 a_{13}^1 + a_{23}^1 a_{13}^3}{a_{13}^1 a_{13}^1 - a_{23}^1 a_{13}^3} &= 0, & \frac{a_{12}^2 a_{23}^1 - a_{13}^2 a_{23}^3}{a_{12}^2 a_{23}^1 + a_{13}^2 a_{23}^3} &= 0, & \frac{a_{12}^3 a_{23}^1 - a_{13}^3 a_{23}^3}{a_{12}^3 a_{23}^1 + a_{13}^3 a_{23}^3} &= 0, \\
 \frac{a_{12}^1 a_{23}^1 + a_{13}^1 a_{23}^3}{a_{12}^1 a_{23}^1 - a_{13}^1 a_{23}^3} &= 0, & \frac{a_{13}^2 a_{23}^1 + a_{23}^2 a_{23}^3}{a_{13}^2 a_{23}^1 - a_{23}^2 a_{23}^3} &= 0, & \frac{a_{13}^3 a_{23}^1 + a_{23}^3 a_{23}^3}{a_{13}^3 a_{23}^1 - a_{23}^3 a_{23}^3} &= 0, \\
 \frac{a_{23}^1 (a_{12}^1 - a_{23}^3)}{a_{23}^1 (a_{12}^1 + a_{23}^3)} &= 0, & \frac{a_{13}^2 (a_{12}^2 + a_{13}^3)}{a_{13}^2 (a_{12}^2 - a_{13}^3)} &= 0, & \frac{a_{12}^3 (a_{12}^2 + a_{13}^3)}{a_{12}^3 (a_{12}^2 - a_{13}^3)} &= 0, \\
 \frac{a_{23}^1 (a_{13}^1 + a_{23}^3)}{a_{23}^1 (a_{13}^1 - a_{23}^3)} &= 0, & \frac{a_{13}^2 (a_{13}^1 + a_{23}^3)}{a_{13}^2 (a_{13}^1 - a_{23}^3)} &= 0, & \frac{a_{12}^3 (a_{12}^1 - a_{23}^3)}{a_{12}^3 (a_{12}^1 + a_{23}^3)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

При этом компоненты тензора кручения образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{12}^1 & a_{13}^1 & a_{23}^1 \\ a_{12}^2 & a_{13}^2 & a_{23}^2 \\ a_{12}^3 & a_{13}^3 & a_{23}^3 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Если матрица A нулевая, то равенства (23) удовлетворяются тождественно. В этом случае группа G абелева, а соответствующая ткань R^0 параллелизуемая. Она определяется уравнениями:

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2, \\ z^3 = x^3 + y^3, \end{cases} \tag{25}$$

а ее сердцевина

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1, \\ c^2 = 2a^2 - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3 \end{cases} \tag{26}$$

изотопна абелевой группе и порождает локально плоскую связность $\tilde{\Gamma}^0$.

Допустим, что матрица A ненулевая. Пусть, например, $a_{23}^1 \neq 0$. Запишем подчеркнутые равенства системы (23) в виде:

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 a_{12}^1 + \mu^1 a_{12}^2 &= 0, & \lambda^1 a_{13}^1 + \mu^1 a_{13}^2 &= 0, & \lambda^1 a_{23}^1 + \mu^1 a_{23}^2 &= 0, \\
 \lambda^2 a_{12}^1 + \mu^2 a_{12}^3 &= 0, & \lambda^2 a_{13}^1 + \mu^2 a_{13}^3 &= 0, & \lambda^2 a_{23}^1 + \mu^2 a_{23}^3 &= 0,
 \end{aligned}$$

где $\lambda^1 = a_{13}^1$, $\mu^1 = a_{23}^1$, $\lambda^2 = a_{12}^1$, $\mu^2 = -a_{23}^1$. Они показывают, что вторая и третья строки матрицы A пропорциональны первой строке, следовательно, $rank A = 1$.

Если же $a_{23}^1 = 0$, то первая строка матрицы A будет нулевой, при этом из системы (23) следуют равенства:

$$\lambda^3 a_{12}^2 + \mu^3 a_{12}^3 = 0, \quad \lambda^3 a_{13}^2 + \mu^3 a_{13}^3 = 0, \quad a_{23}^2 = a_{23}^3 = 0,$$

где $\lambda^3 = a_{12}^2$, $\mu^3 = a_{13}^2$. Значит, при $a_{13}^2 \neq 0$ третья строка матрицы A пропорциональна второй строке, поэтому $\text{rank } A = 1$.

В случае $a_{13}^2 = 0$ из системы (23) получим:

$$a_{12}^2 = a_{23}^2 = 0,$$

то есть вторая строка матрицы A также нулевая, следовательно, $\text{rank } A = 1$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2 Ранг матрицы, образованной компонентами тензора кручения шестимерной непараллелизуемой групповой три-ткани с тривиальной сердцевинной, равен 1.

Как уже сказано выше, тензор кручения a_{jk}^i групповой ткани является структурным тензором группы G , порождающей эту ткань. Согласно [3], класс трехмерных групп Ли, для которых ранг матрицы, образованной компонентами структурного тензора группы, равен 1, состоит из двух групп:

$$\Gamma_{3,6} : \begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2, \\ z^3 = e^{y^2} x^3 + y^3; \end{cases}$$

$$\Gamma_{3,7} : \begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2, \\ z^3 = x^3 + y^3 + x^2 y^1 - x^1 y^2. \end{cases}$$

С другой стороны, эти уравнения определяют координатные группы соответствующих три-тканей. Используя уравнения (3), найдем сердцевину три-ткани, порождаемой группой $\Gamma_{3,6}$. Получим уравнения:

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1, \\ c^2 = 2a^2 - b^2, \\ c^3 = e^{a^2 - b^2} (a^3 - b^3) + a^3. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что найденная сердцевина не изотопна абелевой группе, то есть тривиальной не является. Аналогично найдем сердцевину ткани, порождаемой группой $\Gamma_{3,7}$. Получим уравнения вида (26). Следовательно, эта ткань имеет тривиальную сердцевину.

Таким образом, верна

Теорема 3 *Групповая три-ткань, порождаемая трехмерной группой Ли $G_{3,7}$, является единственной шестимерной непараллелизуемой групповой тканью с тривиальной сердцевинной.*

Заключение

В работе найдены структурные уравнения групповой три-ткани, сердцевина которой является тривиальной, то есть изотопна абелевой группе. Рассмотрены все классы таких четырехмерных ($r = 2$) и шестимерных ($r = 3$) три-тканей. Оказалось, что при $r = 2$ тривиальную сердцевину имеет только групповая три-ткань, определяемая абелевой группой, то есть параллелизуемая три-ткань. В случае $r = 3$, кроме параллелизуемой, существует еще только одна групповая три-ткань с тривиальной сердцевинной (теорема 3), при этом соответствующая группа Ли (координатная группа ткани) является группой $G_{3,7}$ [3], для которой ранг матрицы, образованной компонентами структурного тензора группы, равен 1.

Список литературы

1. М. А. Акивис, А. М. Шелехов. Многомерные три-ткани и их приложения // монография / Тверь, ТвГУ, 2010, 308 с.
2. В. Д. Белоусов. Сердцевина лупы Бола // В сб. Исследования по общей алгебре, Кишинев, 1965, с. 53 – 65.
3. М. В. Васильева. Группы Ли преобразований // М.: Моск. гос. пед. ин-т, 1969, 175 с.
4. Э. Картан. Геометрия групп Ли и симметрические пространства // М.: ИЛ, 1949.
5. О. Лоос. Симметрические пространства // М.: Наука, 1985.
6. Г. А. Толстихина. О локально плоской структуре, связанной с тканью Бола // Алгебраические методы в геометрии. М.: РУДН, 1992, с. 56 – 61.
7. Г. А. Толстихина. О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $V_l(p, q, q)$ // Геометрія, топологія та їх застосування. Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2009, Т. 6, № 2, с. 247 – 255.
8. Г. А. Толстихина. Об условиях изотопии координатной квазигруппы и сердцевинной левой ткани Бола // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского / Серия: физ.-матем. и техн. науки, раздел: математика, № 4 (26), 2011, с. 255 – 262.
9. В. И. Федорова. Об условии, определяющем многомерные три-ткани Бола // Сиб. мат. ж. 19 1978, № 4, с. 922 – 928.

Гегамян Г.Д.

Кафедра функционального анализа и геометрии

Тверской госуниверситет, Тверь, Россия

E-mail: geg_geghamyan@yahoo.com

G. Geghamyan

Tver State University, Russia.

About six-dimensional group three-webs with trivial core

In this paper we have found structural equations of group three-web, the core of which is trivial(isotopic to Abelian Group). The conditions of triviality of the six-dimensional group three-webs' core are bound with rank of matrix formed by components of torsion tensor of the web.

Одержано 27.9.2011

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік № 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлетень ВАК України. 2010.
№ 4)

Наклад 300 примірників. Зам. № 320.

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,

кафедра вищої математики,

вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net

website: <http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4>

надруковано з готового оригінал-макета

Видавництво і друкарня "Екологія"

65045, м. Одеса, вул. Базарна, 106, к. 313

Тел.: (0482) 33-07-18, 33-07-95, 37-15-27

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1873 від 20.07.2004р.

ISSN 2072-9812. ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.
2012. ТОМ 1. №1. 1-64