

ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 4, No. 4, 2011

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том.4, No. 4, 2011

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том.4, No. 4, 2011

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 4, No. 4, 2011

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Екологія"
2011

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою

Одеської національної академії харчових технологій

(протокол № 4 від 08.11.2011)

Головний редактор: **Володимир Шарко**

Заступники головного редактора: **Йосип Красильщик, Ігор Микитюк, Анатолій Мілка.**

Відповідальні редактори: **Надія Коновенко, Віктор Кузаконь.**

Відповідальні секретарі: **Олексій Мойсеєнок, Юлія Федченко.**

Редакційна колегія:

Алексеевский Д.	Кац І.	Сергеева О.
Андерсен Я.	Кіріченко В.	Страуме Е.
Балан В.	Кирилов В.	Толстіхіна А.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Машков О.	Фоменко А.
Діскант В.	Мікеш Й.	Фоменко В.
Євтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожний В.	Пришляк О.	Шуригін В.
Зарічний М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ібрагимов Н.	Рубцов В.	

Главный редактор: **Владимир Шарко**

Заместители главного редактора: **Иосиф Красильщик, Игорь Микитюк, Анатолий Милка.**

Ответственные редакторы: **Надежда Коновенко, Виктор Кузаконь.**

Ответственные секретари: **Алексей Мойсеенок, Юлия Федченко.**

Редакционная коллегия:

Алексеевский Д.	Кац И.	Сергеева А.
Андерсен Я.	Кириченко В.	Страуме Э.
Балан В.	Кириллов В.	Толстихина Г.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Микеш Й.	Фоменко А.
Дискант В.	Машков О.	Фоменко В.
Евтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожный В.	Пришляк А.	Шурыгин В.
Заричный М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ибрагимов Н.	Рубцов В.	

Editor-in-Chief: **Vladimir Sharko**

Deputies Editor-in-Chief: **Joseph Krasilshchik, Igor Mikityuk, Anatoliy Milka.**

Managing Editors: **Nadiia Konovenko, Viktor Kuzakon.**

Executive Secretary: **Alexei Moysyeyenok, Juliya Fedchenko.**

Editorial Board:

Alekseevsky D.	Ibragimov N.	Roubtsov V.
Anderson I.	Kats I.	Sergeeva A.
Balan V.	Kirichenko V.	Shelekhov A.
Banah T.	Kirillov V.	Shurygin V.
Diskant V.	Litvinov G.	Straume E.
Evtushik L.	Mashkov O.	Tolstikhina G.
Fedosov S.	Mikes J.	Yakubchik B.
Fomenko A.	Mormul P.	Zadorozhnyi W.
Fomenko V.	Prishlyak A.	Zarichnyi M.
Gurevich D.	Rahula M.	

Зміст

О.І. Баран, В.М. Дармосюк

Алгебраїчний метод розв'язання конструктивних задач
підвищеної складності

6

В. М. Кузаконь, Є. В. Черевко

Конформно-келерові простори та конформні перетворення
тензору енергії-імпульсу

20

С. М. Покась

О порядке группы Ли движений второй степени в римановом
пространстве второго приближения

27

Ю. С. Резникова

Два многомерных аналога треугольной салфетки Серпинского
I типа

32

В. А. Киосак

О геодезических отображениях пространств квазипостоянной
кривизны

59

Алгебраїчний метод розв'язання конструктивних задач підвищеної складності

О.І. Баран В.М. Дармосюк

Анотація В роботі досліджується роль і місце алгебраїчних методів в конструктивній геометрії, їх значення для формування математичної освіти учнів і студентів, обґрунтовується необхідність підвищення рівня викладання цього розділу геометрії, особливо для майбутніх викладачів математики. Виклад теоретичного і методичного матеріалу ілюструється задачами підвищеної складності і олімпіадного рівня.

Ключові слова Методика викладання геометрії, методи розв'язання геометричних задач, теорія геометричних побудов, конструктивна геометрія, циркуль і лінійка, алгебраїчний метод в конструктивній геометрії.

УДК 514.115

1 Вступ

Складність розв'язання задачі є суб'єктивною, але важливою характеристикою задачі. Геометричні задачі, і особливо конструктивні, традиційно відносяться до складних задач. Розв'язуючи такі задачі, учні або студенти, розвивають вміння узагальнювати і поширювати набуті теоретичні і практичні знання, формують творчі здібності. Цікаві конструктивні задачі різного рівня складності наведено в збірниках [1],[4],[8],[9],[10]. Відповідні теоретичні відомості і методичні вказівки до розв'язання таких задач ґрунтовно представлені в посібниках [2],[3],[7],[11],[12].

У багатьох випадках для розв'язання конструктивних задач доцільно використовувати алгебраїчний метод. Суть алгебраїчного методу полягає у наступному: побудова шуканої фігури Φ зводиться до побудови деякого ключового відрізка XU , довжину якого x виражають через довжини $a, b, c, \dots, m$ заданих відрізків, використовуючи для цього відповідні теореми і формули елементарної геометрії. В результаті одержують співвідношення наступного вигляду:

$$x = f(a, b, c, \dots, m).$$

Далі по цій формулі будують відрізок XU , а потім і всю шукану фігуру Φ .

Алгебраїчний метод можна вважати найбільш універсальним, оскільки він дозволяє розв'язувати майже всі конструктивні задачі. Більше того, у випадках, коли застосування суто геометричних методів викликає значні труднощі або взагалі стає неможливим, на допомогу приходить алгебраїчний метод. При цьому розв'язок задачі і її дослідження, як правило, спрощуються. Цей метод займає у конструктивній геометрії особливе місце ще й тому, що він допомагає підвести під цей розділ геометрії міцний теоретичний фундамент. Алгебраїчний метод розв'язування конструктивних задач має незаперечні переваги перед іншими методами. Це пояснюється наступними факторами:

- алгебраїчні залежності між даними і шуканими величинами у більшості випадків можна легко знайти;
- одержані під час аналізу конструктивної задачі формули часто вказують на метод виконання шуканих побудов;
- у випадках, коли інші методи розв'язання конструктивних задач здаються недієвими, алгебраїчний метод залишається єдиним ефективним засобом для її розв'язання;
- додаткові побудови, якщо вони необхідні, виконуються на цілком природному підґрунті на основі аналізу знайдених виразів для невідомих елементів (тобто, евристичний рівень розв'язування задач, у порівнянні з іншими методами, нижчий, а задачу розв'язувати таким методом легше);
- алгебраїчний метод спрощує заключний аналіз і дозволяє відносно легко визначити умови, при яких задача має розв'язки, виявити їх кількість в залежності від співвідношень між даними елементами тощо;

- алгебраїчний метод зводить кожну конструктивну задачу, яка розв'язується за допомогою циркуля і лінійки, до послідовності обмеженої кількості основних побудов (їх всього сім);
- алгебраїчний метод дозволяє звести конструктивні задачі до розв'язування алгебраїчних рівнянь, що значно спрощує розв'язок задачі і надає можливість дослідити властивості креслярських інструментів і можливості виконання ними тих чи інших побудов.

Таким чином, алгебраїчний метод розв'язування задач на побудову є найбільш ефективним при розв'язуванні питань про можливість побудови, і саме в цьому полягає його найважливіше теоретичне значення.

2 Методика розв'язання конструктивних задач алгебраїчним методом

Аналіз і розв'язування задач на побудову алгебраїчним методом рекомендується виконувати у такій послідовності [2],[3]:

- вважаємо що задача розв'язана і виконуємо схематичний малюнок даних і шуканої фігури;
- вводим позначення для відомих і невідомих величин, які пов'язані з даними і шуканими фігурами (довжини відрізків і величини кутів, площі тощо);
- пригадуємо теореми і формули, які зв'язують ці величини між собою;
- складаємо рівняння, або систему рівнянь, у яких в алгебраїчній формі фіксуємо знайдені залежності;
- розв'язуємо це рівняння, або систему рівнянь відносно невідомих елементів (знаходимо формули, у яких невідомі величини явно виражені через відомі);
- з'ясовуємо, чи дозволяють знайдені формули виконати послідовно побудови шуканих елементів дозволеними методами (переважно за допомогою циркуля і лінійки);
- якщо такі побудови можливі, складаємо алгоритм побудови шуканої фігури;
- знаходимо обґрунтування знайденого алгоритму (доводимо, що побудова на його основі вірна, а знайдена фігура відповідає умовам задачі);
- проводимо дослідження розв'язків на основі знайдених формул.

Все сказане вище відносно алгебраїчного методу розв'язування задач на побудову, дозволяє зробити висновок, що для практичних і теоретичних по-

треб його можна вважати найкращим. Тобто, він не такий естетичний у порівнянні з іншими методами, зате найбільш ефективний.

Зауваження При розв'язанні конструктивної задачі доцільно користуватися "методом човника". Суть цього методу полягає в наступному: якщо на деякому етапі розв'язку виникають суттєві проблеми, необхідно повернутися до попередніх етапів, при необхідності виконати допоміжні побудови, переглянути зв'язки між даними і шуканими фігурами, скласти додаткові співвідношення тощо.

Сформулюємо основну теорему (ОТ) конструктивної геометрії [2],[3].

Теорема 1 *Відрізок x можна побудувати по даним відрізкам за допомогою циркуля і лінійки тоді і тільки тоді, коли довжина відрізка x виражається через довжини заданих відрізків і раціональні числа за допомогою скінченного числа раціональних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і добування квадратного кореня.*

Зауваження 1 Важливо підкреслити, що ліва і права частини виразу повинні мати однакову, тобто лінійну розмірність.

Зауваження 2 Традиційно відрізки і довжини відрізків позначають маленькими латинськими літерами. Де відрізки, а де літери - звичайно зрозуміло із контексту. В подальшому ми будемо користуватися такими позначеннями. Елементарними побудовами (ЕП) будемо вважати наступні побудови відрізків за такими формулами [2], [3]:

$$\text{ЕП1. } x = m \cdot a \pm n \cdot b, (m, n \in N, m \cdot a \geq n \cdot b);$$

$$\text{ЕП2. } x = \frac{m \cdot b}{n}, (m, n \in N);$$

$$\text{ЕП3. } x = \frac{a \cdot b}{c};$$

$$\text{ЕП4. } x = \sqrt{a^2 \pm b^2}, (a \geq b);$$

$$\text{ЕП5. } x = \sqrt{a \cdot b}.$$

3 Приклади розв'язання конструктивних задач підвищеної складності алгебраїчним методом

Розглянемо приклади конструктивних задач підвищеної складності, які розв'язуються за допомогою алгебраїчного методу.

Приклад 1 *По даним відрізкам a, b, c, d, e, f, g побудувати відрізок x , якщо: $x = \frac{abcd}{efg} [4]$.*

Розв'язок Тричі використовуємо елементарну побудову третього типу, тобто послідовно будемо три такі відрізки: $y = \frac{ab}{c}, z = \frac{yc}{f}, x = \frac{zd}{g}$.

Приклад 2 По даним відрізкам a , b побудувати відрізок x , якщо: $x = \sqrt[16]{a^{16} + b^{16}}$ [4].

Неважко побачити, що в цій формулі застосовуються тільки "дозволені" в умові основної теореми операції, а розмірності правої і лівої частини лінійні. Тобто за допомогою циркуля і лінійки такий відрізок можна побудувати. Перетворимо дану формулу так, щоб вона складалася з послідовності елементарних операцій типу 1-5:

$$x = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a^2 + (b^8/a^7)^2}}}.$$

Тепер послідовно будуюмо такі відрізки: $z_1 = \frac{b^8}{a^7}$ (дивись попередню задачу), $z_2 = \sqrt{a^2 + z_1^2}$, $z_3 = \sqrt{a z_2}$, $z_4 = \sqrt{a z_3}$, $x = \sqrt{a z_4}$.

Зауваження У випадку, коли задача розв'язується за допомогою циркуля і лінійки алгебраїчним методом, відповідну ключову формулу задачі завжди (і при тому досить легко) можна представити у вигляді послідовності "дозволених" побудов типу 1-5. Часто таких представлень для даної конкретної задачі можна вказати декілька.

Приклад 3 Побудувати кут α , якщо $\sin \alpha = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$, де a і b дані відрізки, причому $a > b$ [4].

Ця задача теж розв'язується за допомогою алгебраїчного методу. Для цього скористаємося означенням синуса. Поділимо чисельник і знаменник дробу у лівій частині на ab і представимо початкову формулу у такому вигляді: $\sin \alpha = \frac{m}{n} = \frac{\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}}{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}}$, де m і n відповідно катет та гіпотенуза прямокутного трикутника, у якого кут, протилежний катету довжиною m є шуканий. Отже, визначивши m і n , побудуємо цей трикутник і тим самим побудуємо і шуканий кут.

А це легко зробити, виконавши таку послідовність побудов відрізків: $u = \frac{a^2}{b}$, $v = \frac{b^2}{a}$ (ЕП2). Тепер будуюмо відрізки: $m = u - v$ та $n = u + v$, а далі і відповідний прямокутний трикутник з катетом m і гіпотенузою n . Тоді проти катета m одержимо шуканий кут α .

Зауваження До мети може вести і інше перетворення даної формули, наприклад таке: $\sin \alpha = \frac{p}{q} = \frac{a - \frac{b^3}{a^2}}{a + \frac{b^3}{a^2}}$. Причому зрозуміло, що розв'язок задачі не залежить від застосованого методу, бо $\sin \alpha = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

Приклад 4 В середині трикутника ABC побудувати таку точку P , щоб для площ трикутників ABP , BCP і CAP виконувалися співвідношення: $S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = 1 : 2 : 3$.

Аналіз Попередньо розглянемо деякі цікаві властивості шуканих трикутників у взаємозв'язку з іншими трикутниками, з яких складається заданий трикутник. Нехай в середині даного трикутника ABC таку точку вже побудовано, тоді продовжимо відрізок AP до перетину з стороною BC в точці X (Рис.1). Нехай $\frac{BX}{XC} = k \implies BX = k \cdot XC$. Тепер, оскільки трикутники ABX і ACX мають однакову висоту, то очевидно, що $S_{ABX} = k \cdot S_{ACX}$. Аналогічно $S_{BPX} = k \cdot S_{CPX}$. Тоді маємо:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{S_{ABX} - S_{BPX}}{S_{ACX} - S_{PCX}} = \frac{k(S_{ACX} - S_{PCX})}{S_{ACX} - S_{PCX}} = k.$$

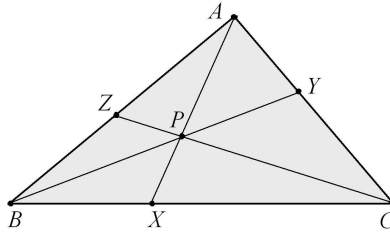


Рис. 1

До речі, до також висновку можна прийти і інакше, розглянувши трикутники ABP і ACP . Вони мають спільну основу, а відношення їх висот дорівнює k , тому і відношення їх площ дорівнює k .

Побудова Спочатку будуюмо точку Y , яка ділить сторону AC даного трикутника у відношенні 1:2, тобто $AY/AC = 1/2$. Тепер на BC будуюмо точку X , яка ділить BC у відношенні 1:3, тобто $BX/XC = 1/3$. Тепер знаходимо шукану точку P , як перетин відрізків AX і BY . На основі аналізу легко довести, що побудована точка задовольняє умові задачі.

Приклад 5 Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і медіаною гострого кута [1].

Аналіз і побудова Нехай задано гіпотенузу c і медіану m шуканого прямокутного трикутника. Очевидно, що для розв'язання задачі цілком достатньо знайти додатково один з його катетів.

Нехай задача розв'язана і шуканий трикутник побудовано (Рис.2). Тоді, використовуючи теорему Піфагора, можна скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + y^2 = m^2. \end{cases}$$

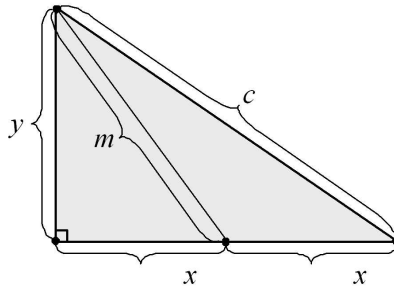


Рис. 2

Розв'язуємо цю систему відносно x :
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + y^2 = m^2. \end{cases} \Rightarrow 3x^2 = c^2 - m^2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{c+m}{3} \cdot (c-m)}$$

Далі побудова відрізка x і шуканого трикутника не викликає труднощів. Відрізок x можна побудувати як середнє геометричне двох відрізків: $\frac{c+m}{3}$ і $c-m$. До речі, звідси впливає очевидне обмеження на умову задачі: $m < c$. Якщо побудувати даний трикутник до паралелограма так, щоб дана подвоєна медіана була діагоналлю цього паралелограма, то одержимо ще одну умову відносно даних відрізків: $2m > c$ (проти більшого кута лежить більша сторона).

Зауваження Цю задачу можна також розв'язати за допомогою методу геометричних місць точок.

Приклад 6 Через дану точку P , яка лежить в середині даного кола, провести хорду так, щоб різниця довжин відрізків, на які шукана точка ділить хорду, мала дану величину a [9].

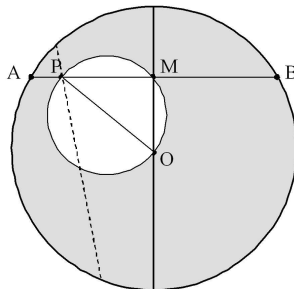


Рис. 3

Аналіз Нехай задача розв'язана (Рис. 3). Попередньо пригадуємо властивості хорд в колі. Зокрема звертаємо увагу на те, що діаметр перпендикулярний до хорди ділить її на дві рівні частини. Далі вже зовсім просто побудувати такий ланцюжок рівностей: $BP - AP = 2AM - 2AP = 2PM = a$. Отже, трикутник PMO прямокутний і його не важко побудувати за даною гіпотенузою PO і катетом $MP = a/2$.

Побудова На PO як на діаметрі будуюмо коло, а потім з точки P проводимо дугу кола радіусом $a/2$ до перетину з побудованим внутрішнім колом в точці M . Тепер через точки P і M проводимо шукану хорду AB .

Зауваження Задача має два розв'язки: друга хорда, яка задовольняє умові задачі, проходить симетрично AB відносно прямої PO (показана пунктиром).

Приклад 7 Побудувати радіус вписаного в даний трикутник кола r , якщо задана площа трикутника S і його периметр p .

Розв'язок задачі відносно простий: радіус вписаного кола легко знайти за формулою: $r = \frac{S}{p}$. При цьому необхідно відзначити, що в конструктивній геометрії площа S задається деяким прямокутником (або многокутником, який легко перетворити в прямокутник) [5]. Тобто площа задається двома відрізками m і n такими, що $S = m \cdot n$. А шуканий радіус вписаного кола тоді легко побудувати за формулою: $r = \frac{mn}{p}$.

Дослідження Розв'язок цієї задачі не викликає труднощів, оскільки шукана побудова відноситься до елементарних. Знайдемо відповідь на більш складне запитання: якому співвідношенню повинні задовольняти довжини відрізків m і n при фіксованому відрізку p , щоб задача мала розв'язок. Спочатку скористаємося нерівністю між середнім геометричним і середнім арифметичним: $\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{3p-2p}{3} = \frac{p}{3}$. Тобто, $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$. Тепер, враховуючи останнє співвідношення, із формули Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ одержимо нерівність: $S = mn = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{\frac{p^4}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Отже, довжини відрізків m і n зв'язані співвідношенням: $mn \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Це означає, що один з відрізків, (наприклад, $m \geq 0$), можна вибрати довільно. Тоді відрізок n повинен задовольняти подвійній нерівності: $0 < n \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}m}$.

Комбінований метод (застосування паралельного переносу і геометричних місць точок) дозволяє легко розв'язати такі конструктивні задачі:

- Побудувати трапецію за двома даними основами і бічними сторонами.
- Побудувати трапецію за двома даними основами і її діагоналями.

Наступна задача виявляється набагато складнішою. Нам відомий тільки її алгебраїчний розв'язок.

Приклад 8 Побудувати трапецію за даними бічними сторонами a і b , та за її діагоналями m і n [7].

Дослідження і побудова Відомо декілька алгебраїчних розв'язків цієї задачі, розглянемо один з найпростіших. Будемо вважати, що шукана трапеція $KLMN$ побудована (Рис.4). Позначимо частини діагоналей, які одержимо при їх перетині, як x , $m-x$, y , $n-y$. Тепер, за теоремою Фалеса, легко знайти співвідношення між x та y : $\frac{x}{y} = \frac{m-x}{n-y} = \frac{m}{n} \Rightarrow y = \frac{nx}{m}$.

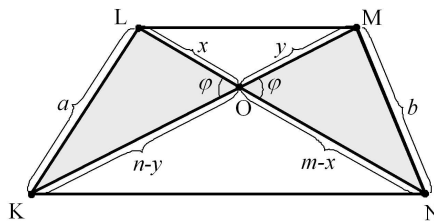


Рис. 4

Застосуємо теорему косинусів до трикутників LOK і MON , одержимо такі співвідношення: $a^2 = x^2 + (n-y)^2 - 2x(n-y)\cos\varphi$, $b^2 = y^2 + (m-x)^2 - 2y(m-x)\cos\varphi$. Тоді $\frac{x^2 + (n-y)^2 - a^2}{2x(n-y)} = \frac{y^2 + (m-x)^2 - b^2}{2y(m-x)}$. Далі, враховуючи, що $y = \frac{nx}{m}$, після нескладних перетворень одержимо: $x = \frac{m}{2} + \frac{m(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)}$, $y = \frac{n}{2} + \frac{n(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)}$, $m-x = \frac{m}{2} - \frac{m(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)}$, $n-y = \frac{n}{2} - \frac{n(a^2-b^2)}{2(m^2-n^2)}$.

Побудови цих чотирьох відрізків не викликають особливих труднощів, хоча вони дещо громіздкі і вимагають відповідних навичок. Тепер побудова шуканої трапеції $KLMN$ зводиться до побудови трикутників LOK і MON , за сторонами a , x , $n-y$ і b , y , $m-x$ відповідно.

Зауваження Очевидно, що задача має розв'язок не завжди. Наприклад, спочатку можна взяти сторону і одну з діагоналей. При цьому можливо, що друга діагональ виявитися або занадто короткою, або занадто довгою навіть для того, щоб можна було побудувати трикутник. З останніх алгебраїчних співвідношень робимо висновок, що за даними в умові задачі відрізками трапецію можливо побудувати лише у випадку, коли виконується нерівність:

$$0 < \left| \frac{a^2-b^2}{m^2-n^2} \right| < 1.$$

У випадку коли $a = b$, $m = n$, попередні формули стають невизначеними, а задача має безліч розв'язків (можна побудувати як завгодно багато рівнобедрених трапецій, які задовольняють умові задачі).

Приклад 9 (Задача з "Начал"Евкліда). Розділити даний відрізок на дві частини так, щоб площа прямокутника, побудованого на цьому відрізку і на одній його частині, дорівнювала площі квадрату, побудованого на іншій його частині.

Перший спосіб. Дослідження і побудова.

Побудуємо на даному відрізку AB , довжина якого дорівнює a , квадрат $ABCD$ і півколо радіусом OB (центр кола, точка O , належить AD і $OA = OD$) (Рис.5). На відрізку AG діаметра FG будуємо ще один, менший квадрат, потім продовжимо його сторону QR до перетину з відрізком AB в точці P . При цьому точка Q ділить даний відрізок так, що площа квадрата $AGRQ$ дорівнює площі прямокутника $PQBC$.

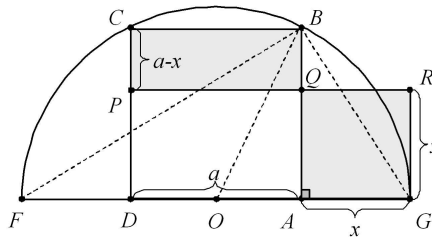


Рис. 5

За побудовою трикутник FBG прямокутний, тому виконується співвідношення: $AB^2 = AF \cdot AG = AF \cdot RG = DG \cdot GR$. Тобто, квадрат $ABCD$ і прямокутник $DGRP$ рівновеликі. Тепер, віднімаючи від площі кожного з них площу спільного прямокутника $AQPD$, одержимо шукане співвідношення: площа $PQBC$ дорівнює площі $AGRQ$.

Тобто, точка Q - шукана. Саме так задача розв'язана у Евкліда.

Другий спосіб. Дослідження і побудова. Нехай довжина даного відрізка AB дорівнює a і шукана точка Q ділить цей відрізок на дві частини: $AQ = x$, $QB = a - x$. Тоді, за умовою задачі маємо: $a(a - x) = x^2$. Розв'язуємо це рівняння, виключаючи від'ємний корінь: $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Тепер шуканий відрізок x легко побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Очевидно, що алгебраїчний метод розв'язання цієї задачі вияви-

вся набагато простішим і більш доступним. Кажуть, що такий поділ відрізка виконано "у крайньому і середньому відношенні при якому більша частина відрізка є середнім пропорційним між всім відрізком та його меншою частиною. Такий поділ часто зустрічається при розв'язанні різноманітних математичних задач, його ще називають "золотим перерізом". Число $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033988749895\dots$ визначає відношення двох частин відрізка, поділеного "золотим перерізом". Задача про золотий переріз вперше зустрічається у другій книзі "Начал" Евкліда.

Приклад 10 (задача Паппа). Побудувати трикутник, якщо задані кут A , бісектриса цього кута l_a і сторона a . (Папп Александрійський - давньогрецький математик другої половини III ст.)[9]

Аналіз Нехай шуканий трикутник ABC побудовано (Рис.6). Виконаємо додаткові побудови. Побудуємо описане навколо трикутника коло, проведемо бісектрису $AM = l_a = l$ кута A , продовження якої перетне відповідну дугу описаного кола у точці D (середина дуги). Проведемо також діаметр описаного кола DF , який перетне сторону трикутника BC у точці N .

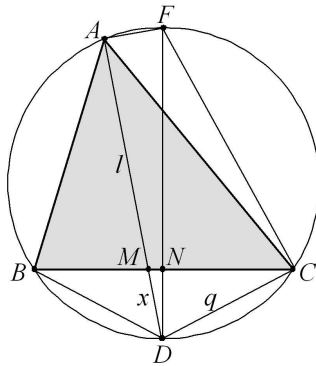


Рис. 6

Нехай також $CD = q$, а $MD = x$. Отже, розв'язок задачі можна звести до побудови відрізка x .

Задачу доцільно розв'язувати алгебраїчним методом. Для цього треба знайти співвідношення між даними відрізками і шуканим. Розглянемо дві пари подібних прямокутних трикутників:

$$\triangle DNM \sim \triangle DAF. \text{ Тому } \frac{x}{DN} = \frac{FD}{l+x} \rightarrow x(l+x) = DN \cdot FD.$$

$$\triangle FCD \sim \triangle CND. \text{ Тому } \frac{FD}{CD} = \frac{CD}{DN} \rightarrow DN \cdot FD = CD^2 = q^2.$$

Таким чином, доведено, що $x(l+x) = q^2$.

Побудова Побудову шуканого трикутника почнемо з відкладання основи BC , побудови описаного кола і точки D . Для зручності, подальші побудови проілюструємо на окремому малюнку (Рис.7). В точці C до прямої CD побудуємо дотичне коло радіуса $\frac{l}{2}$. З точки D проведемо через центр кола січну PR . Маємо: $DP = x$, $PR = l$, $DC = q$. Тому, за відомою теоремою про січну і дотичну, виконується рівність: $x(l+x) = q^2$.

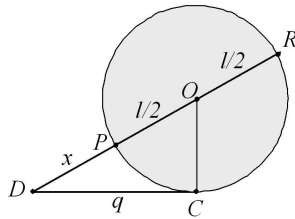


Рис. 7

Тепер з точки D достатньо провести коло радіусом $DR = l+x$. Точки перетину цього кола з колом, описаним навколо шуканого трикутника (якщо вони існують) дадуть множину можливих вершин A шуканого трикутника.

Задача розв'язана.

Дослідження Задача має розв'язки для довільних значень кута A і сторони a , але при цьому на величину бісектриси l_a накладаються такі обмеження: $0 < l_a \leq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$. Розв'язуючи рівняння $x(l+x) = q^2$, одержимо для шуканого відрізка x таке значення: $x = -\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + q^2}$.

Другий розв'язок квадратного рівняння дає від'ємне значення довжини відрізка x , що неприпустимо. Отже, при допустимих даних задача має єдиний розв'язок.

Приклад 11 (З японської храмової геометрії Сангаку). Розрізати даний трикутник на два трикутники так, щоб радіуси кіл, які можна вписати в маленькі трикутники, були рівні [6].

Розв'язок Нехай дано трикутник ABC , радіус вписаного кола якого дорівнює r . І нехай AD - відрізок, який забезпечує шуканий поділ даного трикутника на два маленькі трикутники з рівними радіусами вписаних кіл r_1 і r_2 (Рис.8).

1. Площа даного трикутника дорівнює сумі площ двох маленьких трикутників, звідки легко одержуємо ланцюжок рівностей:

$$S = S_1 + S_2 \rightarrow pr = (p_1 + p_2)r_1.$$

Далі, враховуючи, що $p_1 + p_2 = p + x$, маємо: $pr = (p + x)r_1$. Або $\frac{r_1}{r} = \frac{p}{p+x}$.

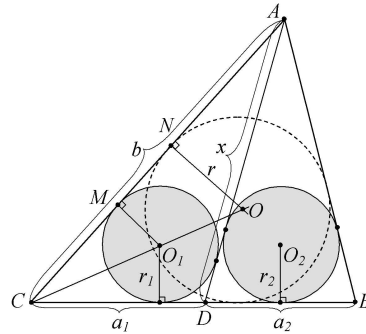


Рис. 8

2. Тепер знайдемо відношення r_1 і r з іншої умови. Скористаємось для цього умовою, що кола O і O_1 подібні з центром подібності в точці C . Тому $\frac{r_1}{r} = \frac{CM}{CN}$. Легко бачити, що $CN = \frac{a+b-c}{2}$, а $CM = \frac{a_1+b-x}{2}$. Отже, $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1+b-x}{a+b-c}$. Аналогічно для іншої пари подібних кіл одержимо таке відношення: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_2+c-x}{a+c-b}$. Тепер, скориставшись відомою властивістю додання пропорцій одержимо: $\frac{r_1}{r} = \frac{a_1+b-x+a_2+c-x}{a+b-c+a+c-b} = \frac{2p-2x}{2a} = \frac{p-x}{a}$, або $\frac{r_1}{r} = \frac{p-x}{a}$.

3. Тепер, порівнюючи попередні результати, знаходимо довжину відрізка $AD = x$: $\frac{r_1}{r} = \frac{p}{p+x} = \frac{p-x}{a} \rightarrow p^2 - x^2 = pa \rightarrow x = \sqrt{p(p-a)}$.

Тепер побудова шуканого відрізка AD може бути легко виконана за допомогою алгебраїчного методу конструктивної геометрії.

4 Висновки

Складність математичної задачі є її невід'ємним атрибутом і головною сутністю поняття задачі взагалі. І конструктивні задачі серед інших задач не виняток. Але і навчати і навчитися розв'язувати такі задачі можна. Цьому можуть сприяти відповідні теоретичні знання, методичні вказівки і досвід. Тому треба навчати учнів і студентів такому підходу до конструктивних задач, при якому задача виступає як об'єкт ретельного вивчення, а її розв'язок - як об'єкт конструювання і винаходу.

Література

1. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. М., "Учпедгиз 1950. - 174 с.
2. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Элементарная геометрия. М., "Просвещение 1966. - 366 с.
3. Астряб О.М., Смогоржевський О.С. та інші., Методика розв'язування задач на побудову. К., "Радянська школа 1960, 387 с.
4. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии (под редакцией Базылева В.Т.). М., "Просвещение 1980. - 238 с.
5. Баран О.І., Калініченко Г.Л. Практична спрямованість конструктивної геометрії. Збірник "Питання удосконалення змісту і методики викладання фізики у середній і вищій школі Вип. 12, Миколаїв, 2006, с. 99-107.
6. Карлюченко А.В., Карлюченко О.А. Сангаку. Японская Храмовая Геометрия. К., "Сталь 2012. - 247 с.
7. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії. К., "Абрис 1994. - 463 с.
8. Лоповок Л.М. Сборник задач по геометрии для 6-8 кл. К., "Радянська школа 1985. - 104 с.
9. Моденов П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. "Советская наука М., 1957. - 666 с.
10. Назаретский В.Е., Федин Н.Г. Задачник-практикум по элементарной геометрии. М., "Просвещение 1965. - 163 с.
11. Тесленко І.Ф. та інші. Практикум з розв'язування задач. Геометрія. "Вища школа К., 1978. - 208 с.
12. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. М., "Физматгиз 1963. - 567 с.

О.І. Баран

Миколаївський національний університет ім. В.О.Сухомлинського, Миколаїв, Україна.

E-mail: Oleg_Baran@mail.ru

Oleg I. Baran

The algebraic method of solving high complexity constructive tasks

This paper is devoted to the role and place of algebraic methods in constructive geometry, their significance for the formation of mathematical education of pupils and students, the necessity of improving teaching in this section of geometry, especially for future teachers of mathematics. The presentation of theoretical and methodological material is illustrated by high complexity and olympiad level problems.

Одержано 2.4.2011

Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензору енергії-імпульсу

В. М. Кузаконь Є. В. Черевко

Анотація Розглянуто конформні відображення ермітових просторів на келерові простори з умовою інваріантності тензору енергії-імпульсу. Знайдено умови інваріантності цього тензору. Доведено неможливість збереження тензору енергії-імпульсу при конформному відображенні узагальнених многовидів Хопфа на келерові простори.

Ключові слова Ермітовий простір · Келеровий простір · Тензор енергії-імпульсу

УДК 513.76

1 Вступ

Відомо([3], [6]), що поля тяжіння у псевдоримановому просторі (V_n, g) описуються рівняннями Ейнштейна:

$$R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} = -\frac{8\pi k}{c^4}T_{ij}. \quad (1)$$

У лівій частині наявні такі геометричні об'єкти простору (V_n, g) , як $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$ - тензор Річчі, g_{ij} - псевдориманова метрика простору V_n , $R = R_{ij}g^{ij}$ - скалярна кривина, g^{ij} - матриця, що є зворотною до матриці псевдориманової метрики. Додамо, що $R_{ij} = R^h_{ijk}$ - тензор кривини простору V_n . Символом T_{ij} позначено двічі коваріантний тензор енергії-імпульсу. Нарешті, c - швидкість світла у вакуумі, та k - гравітаційна стала.

Ми вивчатимо перетворення тензору енергії-імпульсу при конформних перетвореннях просторів $(V_n, g) \rightarrow (\bar{V}_n, \bar{g})$, тобто, їх метрики пов'язані рівнянням:

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\varphi} g_{ij}, \quad (2)$$

де $\varphi = \varphi(x^1, \dots, x^n)$ - деяка скалярна функція. Нас цікавить той випадок, коли (V_n, g) є ермітовим простором, а простір $(\bar{V}_n, \bar{g})$ буде келеровим.

2 Попередні відомості

Нагадаємо необхідні для подальшого поняття ([1], [2], [11]). Зрозуміло, простори (V_n, g) та $(\bar{V}_n, \bar{g})$ мають парну розмірність: $n = 2m$. Крім того, на кожному з них задана майже комплексна структура J .

Означення 1 *Майже комплексною структурою J називають такий афінор J_j^i , що:*

$$J_\alpha^i J_j^\alpha = -\delta_j^i. \quad (3)$$

Тут δ_j^i - символ Кронекера.

Означення 2 *Простір, де задано майже комплексну структуру J , називають майже комплексним простором.*

Майже комплексний простір позначають $\{V_n, J, g\}$.

Означення 3 *Майже комплексний простір $\{V_n, J, g\}$ є ермітовим, якщо:*

1) метрика ермітова

$$J_i^\alpha J_j^\beta g_{\alpha\beta} = g_{ij}; \quad (4)$$

2) майже комплексна структура інтегрується

$$J_{i,j}^k = J_i^\alpha J_j^\beta J_{\alpha,\beta}^k. \quad (5)$$

Комою “,” тут позначено коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чевіта, узгодженій з рімановою метрикою g_{ij} .

Якщо до того ж у ермітовому просторі $\{V_n, J, g\}$ виконується умова:

$$J_{i,j}^k = 0, \quad (6)$$

то він є келеровим.

Означення 4 *Ермітовий простір $\{V_n, J, g\}$ називають конформно-келеровим, якщо існує функція $\varphi \in C^2(V_n) : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $\{\bar{V}_n, J, \bar{g} = e^{2\varphi} g\}$ є келеровим простором.*

Це означає, що (6) для $\{V_n, J, g\}$ не виконується, але для $\{\bar{V}_n, J, \bar{g} = e^{2\varphi} g\}$ є справедливим:

$$J_{i|j}^k = 0. \quad (7)$$

Вертикальна риска “|” означає коваріантну похідну у зв’язності Леві-Чевіта, узгоджених з рімановою метрикою $\bar{g}_{ij} = e^{2\varphi} g_{ij}$ простору $\{\bar{V}_n, J, \bar{g}\}$. Коваріантні похідні у зв’язностях, що узгоджені з різними метриками задовільняють рівності:

$$J_{i|j}^k = J_{i,j}^k + J_i^\alpha P_{\alpha j}^k - J_\alpha^k P_{ij}^\alpha, \quad (8)$$

де

$$P_{ij}^k = \delta_j^k \varphi_i + \delta_i^k \varphi_j - \varphi^k g_{ij} \quad (9)$$

має назву тензора конформної деформації, причому, $\varphi_i = \partial_i \varphi$ та $\varphi^k = \varphi_i g^{ik}$. Підставляючи (9) у (8), та враховуючи (7), отримуємо:

$$J_{i,j}^k + J_i^\alpha (\delta_j^k \varphi_\alpha + \delta_\alpha^k \varphi_j - \varphi^k g_{\alpha j}) - J_\alpha^k (\delta_j^\alpha \varphi_i + \delta_i^\alpha \varphi_j - \varphi^\alpha g_{ij}) = 0. \quad (10)$$

Розкриваючи у (10) дужки, та зводячи подібні, можна записати:

$$J_{i,j}^k = -\delta_j^k J_i^\alpha \varphi_\alpha + \varphi^k J_{ij} + J_j^k \varphi_i - J_\alpha^k \varphi^\alpha g_{ij}. \quad (11)$$

Згорнемо (11) за індексами j та k :

$$\begin{aligned} J_{i,\alpha}^\alpha &= -n J_i^\alpha \varphi_\alpha + J_{i\alpha} \varphi^\alpha + J_\alpha^\alpha \varphi_i - J_{\alpha i} \varphi^\alpha = \\ &= -n J_i^\alpha \varphi_\alpha + J_{i\alpha} \varphi^\alpha + J_{i\alpha} \varphi^\alpha = -(n-2) J_i^\alpha \varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Під час обчислень у (12) ми врахували те, що $J_\alpha^\alpha = 0$ та $J_i^\alpha g_{\alpha j} = J_{ij} = -J_{ji}$. З (12), беручи до уваги (3), остаточно маємо ([11], [10]):

$$\varphi_i = \frac{1}{n-2} J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta. \quad (13)$$

У (13) ми знайшли вирази для коефіцієнтів диференціальної форми

$$\omega = \varphi_i dx^i; \quad (14)$$

яка має назву форми Лі простору $\{V_n, J, g\}$.

Маємо систему диференціальних рівнянь першого порядку у частинних похідних:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{n-2} J_{\beta,\alpha}^\alpha J_i^\beta, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Система (15) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконуться умови $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}$, або, у термінах коваріантних похідних ([4], [5]):

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}; \quad k, l = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Вимога (16) еквівалентна умові, щоб форма Лі була точною, а саме, її зовнішній диференціал має тотожно дорівнювати нулю: $d\omega = 0$. Виконаємо коваріантне диференціювання (13):

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{n-2} (J_{\beta, \alpha j}^\alpha J_i^\beta + J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{i,j}^\beta). \quad (17)$$

Альтернуючи (17) за індексами i та j , а також, врахувавши (16), отримуємо:

$$\frac{1}{n-2} (J_{\beta, \alpha j}^\alpha J_i^\beta + J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{i,j}^\beta - J_{\beta, \alpha i}^\alpha J_j^\beta - J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{j,i}^\beta) = 0,$$

або:

$$J_{\beta, \alpha j}^\alpha J_i^\beta + J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{i,j}^\beta - J_{\beta, \alpha i}^\alpha J_j^\beta - J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{j,i}^\beta = 0. \quad (18)$$

Оскільки умови інтегровності (18) не залежать від шуканої функції $\varphi = \varphi(x^1, \dots, x^n)$, її похідних, за умови, що майже комплексна структура J тотожно їм задовільняє, система (15) є цілком інтегрованою (*completely integrable*). Згідно з теорією диференціальних рівнянь, (15) має розв'язок, що залежить лише від одного довільного параметру. Цей розв'язок може бути знайдений за формулою [7]:

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \int_{x_0^i}^{x^i} \varphi_i(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x^i, \dots, x^n) dx^i + C,$$

або, оскільки довільний параметр C має сенс початкового значення, остаточно:

$$\varphi = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \int_{x_0^i}^{x^i} J_{\beta, \alpha}^\alpha J_i^\beta(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x^i, \dots, x^n) dx^i + \varphi(x_0^1, \dots, x_0^n). \quad (19)$$

Таким чином, має місце

Теорема 1 *Ермітовий простір $\{V_n, J, g\}$, $(n > 2)$ є конформно-келеровим тоді, і тільки тоді, коли майже комплексна структура J задовільняє умовам:*

$$1) J_{i,j}^k = -\delta_j^k J_i^\alpha \varphi_\alpha + \varphi^k J_{ij} + J_j^k \varphi_i - J_\alpha^k \varphi^\alpha g_{ij},$$

$$2) J_{\beta, \alpha j}^\alpha J_i^\beta + J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{i,j}^\beta - J_{\beta, \alpha i}^\alpha J_j^\beta - J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{j,i}^\beta = 0.$$

Відображуюча функція φ визначається за формулою:

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \int_{x_0^i}^{x^i} J_{\beta, \alpha}^\alpha J_i^\beta(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x^i, \dots, x^n) dx^i + \varphi(x_0^1, \dots, x_0^n),$$

де $\varphi(x_0^1, \dots, x_0^n)$ - початкові значення у точці $(x_0^1, \dots, x_0^n)$.

3 Умови інваріантності тензору енергії-імпульсу при конформних перетвореннях

Тепер перейдемо безпосередньо до ермітових просторів, геометрія яких визначається рівнянням (1). Перш за все, зазначимо, що можна вибрати таку систему одиниць, в якій (1) матиме вигляд:

$$R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} = -T_{ij}. \quad (1')$$

Виходячи з (1'), деформацію тензору енергії-імпульсу можна записати таким чином:

$$\bar{T}_{ij} - T_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} - \bar{R}_{ij} + \frac{\bar{R}g_{ij}}{2}. \quad (20)$$

З іншого боку, відомо, що тензори Річчі та скалярні кривини конформно-відповідних просторів пов'язані формулами [8]:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij} &= R_{ij} + (n-2)\varphi_{ij} + (\Delta_2\varphi + (n-2)\Delta_1\varphi)g_{ij}; \\ e^{2\varphi}\bar{R} &= R + 2(n-1)\Delta_2\varphi + (n-1)(n-2)\Delta_1\varphi. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут у нас $\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_i\varphi_j$, $\Delta_1\varphi = g^{ij}\varphi_{i,j}$ та $\Delta_2\varphi = g^{ij}\varphi_{i,j}$. З урахуванням (21), вираз для деформації тензору енергії-імпульсу (20) запишемо так:

$$\bar{T}_{ij} - T_{ij} = -(n-2)(\varphi_{ij} - \Delta_2\varphi g_{ij} - \frac{(n-3)\Delta_1\varphi}{2}g_{ij}). \quad (22)$$

В нашому випадку, внаслідок (13) та (17)

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= \frac{1}{n-2}(J_{\beta, \alpha j}^\alpha J_i^\beta + J_{\beta, \alpha}^\alpha J_{i,j}^\beta - \frac{1}{n-2}J_{\beta, \alpha}^\alpha J_i^\beta J_{\delta, \gamma}^\gamma J_j^\delta); \\ \Delta_1\varphi &= \frac{1}{(n-2)^2}J^{\alpha\beta}_{, \alpha} J_{\beta, \gamma}^\gamma; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{n-2}(J_{\beta, \alpha \gamma}^\alpha J^{\beta\gamma} + J_{\beta, \alpha}^\alpha J^{\beta\gamma}_{, \gamma}) = \frac{1}{n-2}(J_{\beta, \alpha \gamma}^\alpha J^{\beta\gamma} - J_{\beta, \alpha}^\alpha J^{\gamma\beta}_{, \gamma}).$$

Підставляючи (23) у (22), отримуємо остаточно:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij} - T_{ij} = & \frac{1}{n-2} J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_i^{\beta} J_{\delta,\gamma}^{\gamma} J_j^{\delta} + J_{\beta,\alpha\gamma}^{\alpha} J^{\beta\gamma} g_{ij} - J_{\beta,\alpha j}^{\alpha} J_i^{\beta} - J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_{i,j}^{\beta} - \\ & - \frac{n-1}{2(n-2)} J^{\alpha\beta}_{,\alpha} J_{\beta,\gamma}^{\gamma} g_{ij}. \end{aligned} \quad (24)$$

Звідси випливає

Теорема 2 При конформному відображенні ермітового простору $\{V_n, J, g\}$ на келеровий простір $\{\bar{V}_n, J, \bar{g} = e^{2\varphi} g\}$, $n > 2$ деформація тензору енергії-імпульсу залежить виключно від метрики простору $\{V_n, J, g\}$ та комплексної структури. Якщо у ермітовому просторі $\{V_n, J, g\}$ вірною є рівність:

$$\frac{1}{n-2} J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_i^{\beta} J_{\delta,\gamma}^{\gamma} J_j^{\delta} + J_{\beta,\alpha\gamma}^{\alpha} J^{\beta\gamma} g_{ij} - J_{\beta,\alpha j}^{\alpha} J_i^{\beta} - J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_{i,j}^{\beta} - \frac{n-1}{2(n-2)} J^{\alpha\beta}_{,\alpha} J_{\beta,\gamma}^{\gamma} g_{ij} = 0,$$

тензор енергії-імпульсу при конформному відображенні на келеровий простір буде інваріантним.

4 Тензор енергії-імпульсу на многовиді Хопфа

Нарешті, розглянемо один приклад конформно-келерових просторів. Спочатку дамо

Означення 5 Локально-конформний многовид $\{V_n, J, g\}$ називають узагальненим многовидом Хопфа (або многовидом Вайсмана), якщо його форма Лі є коваріантно сталою в рімановій зв'язності[9]:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{n-2} (J_{\beta,\alpha j}^{\alpha} J_i^{\beta} + J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_{i,j}^{\beta}) = 0. \quad (25)$$

Зрозуміло, що у випадку конформного відображення узагальненого многовиду Хопфа на келеровий простір, деформація тензору енергії-імпульсу (22) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij} - T_{ij} = & (n-2)(\varphi_i \varphi_j + \frac{(n-3)\Delta_1 \varphi}{2} g_{ij}) = \frac{1}{n-2} (J_{\beta,\alpha}^{\alpha} J_i^{\beta} J_{\delta,\gamma}^{\gamma} J_j^{\delta} + \\ & + \frac{(n-3)J^{\alpha\beta}_{,\alpha} J_{\beta,\gamma}^{\gamma}}{2} g_{ij}), \end{aligned} \quad (26)$$

виходячи з (25). Отже, умовою інваріантності тензору енергії-імпульсу при відображенні є:

$$\varphi_i \varphi_j + \frac{(n-3)\Delta_1 \varphi}{2} g_{ij} = 0. \quad (27)$$

Оскільки метричний тензор g_{ij} є невідродженим, рівність (26) можлива лише за умови $\varphi_i = 0$. Звідси випливає

Теорема 3 При нетривіальному конформному відображенні узагальненого многовиду Хопфа ($n = 2m > 2$) на келеровий простір, тензор енергії-імпульсу не може бути інваріантним.

Література

1. В. Ф. Кириченко *Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны* // Матем. сб., 182:3 (1991), 354–363
2. В. Ф. Кириченко *Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия* // Матем. заметки, 51:5 (1992), 57–66.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц *Теория поля* // Наука. 1988. 512 с
4. J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner *Geodesic mappings and some generalizations*, Palacky University Press, Olomouc, 2009, 304p. Изв. вузов. Матем., 1994, № 3, 50–52
5. Ж. Радулович, Й. Микеш *Геодезические отображения конформно-келеровых пространств*, Изв. вузов. Матем., 1994, № 3, 50–52
6. П. К. Рашевский *Риманова геометрия и тензорный анализ* // Наука. 1967. 664 с
7. В. В. Степанов *Курс дифференциальных уравнений* // Физматлит. 1959. 473 с
8. Л. П. Эйзенхарт *Риманова геометрия* // М.: ИЛ, 1948. 316 с
9. S. Dragomir, L. Ornea *Locally conformal Kähler geometry* // Boston ; Basel ; Berlin, cop. 1998. Series: Progress in mathematics, vol. 155.
10. I. Vaisman *A geometric condition for an l.c.K. manifold to be Kähler* // Geometriae Dedicata, 10 (1981), 129–134.
11. K. Yano *Differential geometry on complex and almost complex spaces* // Pure and Applied Math. vol. 49, Pergamon Press Book, New York (1965).

В. М. Кузаконь

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна.

E-mail: kuzakon_v@ukr.net

Є. В. Черевко

Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна.

E-mail: cherevko@usa.com

Victor Kuzakon & Eugen Cherevko

Conformal Kahler spaces and conformal transformations preserving the stress-energy tensor

Let $\{V_n, J, g\}$ be a Hermitian space of complex dimension $m = \frac{n}{2}$, where J denotes its complex structure, and g its Hermitian metric. Metric g is conformal Kähler metric, if g is conformal to some Kählerian metric $\bar{g}$ in each point $\{V_n, J, g\}$. The paper deals with the problem of mapping which transforms conformally Hermitian space $\{V_n, J, g\}$ into Kähler space $\{\bar{V}_n, J, \bar{g}\}$. We have found conditions to be satisfied when conformal transformation is to admit preserving the stress-energy tensor.

Одержано 12.6.2011

О порядке группы Ли движений второй степени в римановом пространстве второго приближения

Сергей Михайлович Покась

Аннотация В данной статье определяется максимальный порядок $\tilde{r}$ группы Ли движений второй степени в пространстве $\tilde{V}_n^2$, которое реализует приближение для V_n и устанавливается связь с порядком r группы Ли движений исходного V_n

Ключевые слова Группа Ли, движения второй степени

УДК 514.16.8

Рассмотрим риманово пространство V_n , отнесённое к произвольной системе координат x^h . В окрестности любой его фиксированной точки $M_0(x_0^h)$ строим пространство $\tilde{V}_n^2$, реализующее приближение второго порядка для V_n , с метрическим тензором $\tilde{g}_{ij}(y)$ ([3]):

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 j} y^{l_1} y^{l_2}, \quad (1)$$

где $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $R_{il_1 l_2 j} = R_{il_1 l_2 j}(M_0)$.

Известно ([3]), что $\tilde{V}_n^2$ допускает вектор Киллинга второй степени вида

$$\tilde{\xi}^h(y) = a^h + a^h_{.l} y^l + a^h_{.l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (2)$$

тогда и только, когда

$$a^h_{.l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} = \frac{1}{3} a^{\alpha}_{.} R^h_{.l_1 l_2 \alpha} y^{l_1} y^{l_2} \quad (3)$$

$$a^{\alpha}_{.(i} g_{j)\alpha} = 0 \quad (4)$$

$$a_{\cdot(i) \underset{\circ}{R}_j(l_1 l_2) \alpha}^{\alpha} + a_{\cdot(l_1) \underset{\circ}{R}_{l_2}(ij) \alpha}^{\alpha} = 0 \quad (5)$$

$$a_{\cdot}^{\alpha} \left(R_{\alpha(l_1 l_2) \beta} R_{\cdot(ij) l_3}^{\beta} + R_{\alpha(l_2 l_3) \beta} R_{\cdot(ij) l_1}^{\beta} + R_{\alpha(l_3 l_1) \beta} R_{\cdot(ij) l_2}^{\beta} \right) = 0 \quad (6)$$

Пусть $\tilde{V}_n^2$ допускает максимальное число $\tilde{r}$ линейно независимых с постоянными коэффициентами бесконечно малых движений второй степени с векторами смещений вида (2):

$$\tilde{\xi}_{pl}^h = a_p^h + a_{\underset{\circ}{p}}^h y^l + \frac{1}{3} a_{\underset{\circ}{p}}^{\alpha} R_{\cdot l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2}, \quad (7)$$

$$(p = 1, 2, \dots, \tilde{r})$$

Обозначим через $\tilde{\eta}_{pq}^h$ компоненты коммутатора $[\tilde{y}_p, \tilde{y}_q]$, тогда ([4],[5])

$$\tilde{\eta}_{pq}^h = \tilde{\xi}_{pl}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\xi}_{ql}^h}{\partial y^l} - \tilde{\xi}_{ql}^{\alpha} \frac{\partial \tilde{\xi}_{pl}^h}{\partial y^l}$$

В последнее соотношение подставим (7) и, принимая во внимание уравнение (6), получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{pq}^h &= (a_{\underset{\circ}{p}}^{\alpha} a_{\underset{\circ}{q}}^h - a_{\underset{\circ}{q}}^{\alpha} a_{\underset{\circ}{p}}^h) + a_{\underset{\circ}{p}}^{\alpha} a_{\underset{\circ}{q}}^{\beta} R_{\cdot l \alpha \beta}^h y^l + \\ &+ \frac{1}{3} [(a_{\underset{\circ}{p}}^{\alpha} a_{\underset{\circ}{q}}^{\beta} - a_{\underset{\circ}{q}}^{\alpha} a_{\underset{\circ}{p}}^{\beta}) R_{\cdot(\alpha l_2) \beta}^h + (a_{\underset{\circ}{q}}^h a_{\underset{\circ}{p}}^{\beta} - a_{\underset{\circ}{p}}^h a_{\underset{\circ}{q}}^{\beta}) R_{\cdot l_1 l_2 \beta}^{\alpha}] y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношение (8) свидетельствует о справедливости теоремы:

Теорема 1 Риманово пространство $\tilde{V}_n^2$, допускающее максимальное число $\tilde{r}$ линейно независимых с постоянными коэффициентами бесконечно малых движений второй степени, допускает $\tilde{r}$ -параметрическую группу Ли движений второй степени.

Порядок $\tilde{r}$ группы Ли движений второй степени в пространстве $\tilde{V}_n^2$ определяется максимальным числом независимых параметров $a_{\underset{\circ}{p}}^h$ и $a_{\underset{\circ}{l}}^h$. Для определения порядка $\tilde{r}$ уравнения (4)-(6) будем рассматривать, как системы линейных однородных алгебраических уравнений относительно $a_{\underset{\circ}{p}}^h$ и $a_{\underset{\circ}{l}}^h$ с коэффициентами, которые определяются исходным пространством V_n . Из (4)-(6) следует, что среди $a_{\underset{\circ}{i}}^h$ имеется не более $\frac{n(n-1)}{2}$ независимых параметров а среди a_i - не более чем n . Через q_1 обозначим ранг матрицы системы (5) относительно $a_{\underset{\circ}{k}}^h$:

$$q_1 = \text{rang} \| R_{\cdot(l_1 l_2)(i) \delta_j}^{\alpha} + R_{\cdot(ij)(l_1) \delta_{l_2}}^{\alpha} \|;$$

через q_2 обозначим ранг матрицы системы (6) относительно $a_{\cdot}^h$:

$$q_2 = \text{rang} \| R_{\alpha(l_1 l_2) \beta} R_{\cdot(ij) l_3}^{\beta} + R_{\alpha(l_2 l_3) \beta} R_{\cdot(ij) l_1}^{\beta} + R_{\alpha(l_3 l_1) \beta} R_{\cdot(ij) l_2}^{\beta} \|$$

Тогда справедлива лемма.

Лемма 1 Порядок $\tilde{r}$ группы Ли движений второй степени в пространстве $\tilde{V}_n^2$ удовлетворяет условию

$$\tilde{r} \leq \frac{n(n+1)}{2} - (q_1 + q_2)$$

Пусть исходное V_n является пространством первой лакуарности (пространством постоянной ненулевой кривизны) в терминологии И.П. Егорова([1]). Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что уравнения (5) выполняются тождественно при любых $a_{\cdot k}^h$, удовлетворяющих (4). Из (6) следует, что $q_2 = n$, поэтому $a_{\cdot}^h = 0$. Тогда из (2) видим, что

$$\tilde{\xi}^h(y) = a_{\cdot l}^h y^l,$$

т.е. мы приходим к группе линейных однородных движений

$$y'^h = \left[\delta_l^h + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p a_{\cdot l}^{(p)h}}{p!} \right] y^l,$$

где $a_{\cdot l}^{(p)h} = a_{\cdot \alpha}^{(p-1)h} a_{\cdot l}^{\alpha}$ ($p = 2, 3, \dots$)

Покажем, что ряды $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p a_{\cdot l}^{(p)h}}{p!}$ сходятся абсолютно и равномерно для t , изменяющемся на любом ограниченном множестве. Действительно, введём следующие обозначения:

$$\max \{ |a_{\cdot l}^h t| \} = \frac{c}{n} \quad (c = \text{const})$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|a_{\cdot l}^{(2)h} t^2| \leq |a_{\cdot 1}^h t| \cdot |a_{\cdot l}^1 t| + |a_{\cdot 2}^h t| \cdot |a_{\cdot l}^2 t| + \dots + |a_{\cdot n}^h t| \cdot |a_{\cdot l}^n t| \leq \frac{c^2}{n}$$

$$|a_{\cdot l}^{(3)h} t^3| \leq \frac{c^3}{n}$$

...

$$|a_{\cdot l}^{(p)h} t^p| \leq \frac{c^p}{n},$$

$$(p = 4, 5, \dots)$$

(9)

Поэтому ряды $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p a_{.l}^{(p)h}}{p!}$, мажорирующиеся равномерно сходящимися числовым рядом $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{c^p}{p!} = e^p$, сходятся абсолютно и равномерно для t , изменяющемся на любом ограниченном множестве.

Порядок $\tilde{r}$ данной группы равен

$$\tilde{r} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Последнее равенство означает ([2]), что пространство $\tilde{V}_n^2$ является субпроективным. Т.о. доказана теорема.

Теорема 2 *Приближение второго порядка для пространства первой лакунарности в окрестности данной его точки M_0 , является пространством второй лакунарности относительно движений второй степени.*

Пусть исходное пространство V_n является пространством второй лакунарности - субпроективным пространством основного случая ненулевой скалярной кривизны:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \rho g_{ij} + e \lambda_i \lambda_j \\ e &= \pm 1, \quad \lambda_\alpha \lambda^\alpha \neq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (6) теоремы 1 выполняются тождественно, причём

$$a_i = c \lambda_i \quad (c = \text{const}), \quad (11)$$

а уравнение (5) на основании (10) и (11) принимают вид:

$$a_{.i}^\alpha \lambda_\alpha = 0 \quad (12)$$

Из (11) следует, что среди a_i имеется $(n-1)$ зависимые компоненты, а из (12) - количество зависимых компонент среди $a_{.k}^h$ равно $(n-1)$. Т.о. доказана теорема.

Теорема 3 *Максимальный порядок $\tilde{r}$ группы Ли движений второй степени в пространстве $\tilde{V}_n^2$, реализующего приближение второго порядка для субпроективного пространства основного случая ненулевой скалярной кривизны, равен*

$$\tilde{r} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$$

Следствие 1 *Приближение второго порядка для риманова пространства V_n второй лакунарности является пространством третьей лакунарности относительно движений второй степени.*

Список литературы

1. И. П. Егоров. Движения в пространствах аффинной связности // Учен. зап. Казан. ун-та., 1965.
2. В. Н. Казан. Субпроективные пространства // Москва, Физматизд., 1961.
3. С. М. Покась. Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения // известия Пенз. гос. пед. ун-та., физ.-матем. науки., №26, 2011, 173–183.
4. Н. Г. Чеботарёв. Теория групп Ли // Москва, Ленинград, ГИТТЛ., 1940
5. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований // Москва, ИЛ., 1947

Сергей Михайлович Покась

ОНУ им.И.И. Мечникова, Одесса, Украина

E-mail: pokas@onu.edu.ua

Sergey M. Pokas

About an order of Lie group of motions of the second degree in Riemannian space of the second approach

In this paper we determine maximal order of $\tilde{r}$ of Lie group of motions of the second degree in Riemannian space $\tilde{V}_n^2$, which implements the approach for V_n and determine connection with the order r of Lie group of motions of basic V_n

Одержано 18.7.2011

Два многомерных аналога треугольной салфетки Серпинского I типа

Ю. С. Резникова

Аннотация Рассмотрены два конструктивных фрактальных множества, названные каркасом Серпинского I типа и пластинчатым симплексом I типа. В векторных метрических пространствах размерности три и выше данные множества являются многомерными аналогами треугольной салфетки Серпинского I типа. Представлены результаты исследования внутренней геометрической структуры и основных характеристик указанных фрактальных множеств в векторных метрических пространствах произвольной размерности.

Ключевые слова Конструктивное фрактальное множество · Однородное самоподобное фрактальное множество · Неоднородное самоподобное фрактальное множество · Каркас Серпинского I типа · Пластинчатый симплекс I типа · Срединно-усеченный симплекс · Топологическая размерность · Мера Хаусдорфа · Размерность Хаусдорфа-Безиковича · Совершенное множество

1 Введение

Одним из перспективных направлений современного развития фрактальной геометрии видятся исследования, посвященные конструктивным фрактальным множествам в векторных метрических пространствах произвольной размерности.

Отметим, что в отличие от подобных геометрических объектов в двумерных пространствах, которые являются наиболее изученными¹ [3, 7, 10, 11, 12, 17, 19, 20], конструктивные фрактальные множества в векторных пространствах размерности четыре и выше остаются на сегодня вне поля зрения специалистов в области теории фракталов и смежных дисциплин.

Материалами представленной работы вводятся в рассмотрение два многомерных конструктивных фрактальных множества, а именно *каркас Серпинского I типа*² и *пластинчатый симплекс I типа*. В векторных пространствах размерности три и выше данные множества представляют собой многомерные аналоги такого конструктивного фрактального множества, как треугольная салфетка Серпинского I типа на плоскости. При этом первое из указанных множеств является пространственной фрактальной линией, второе – фрактальной поверхностью.

Целью является исследование внутренней геометрической структуры и основных характеристик каркаса Серпинского I типа и пластинчатого симплекса I типа в векторных метрических пространствах произвольной размерности.

Прежде, чем перейти к изложению основного материала, остановимся на некоторых общих понятиях теории фракталов.

Рассмотрим метрическое пространство M , а также совокупность всех его непустых компактных подмножеств $K(M)$.

Предположим, что задано семейство сжимающих отображений $f_1, f_2, \dots, f_k$ из M в себя. Пусть E — компактное непустое множество. Зададим отображение $F : K(M) \rightarrow K(M)$ следующим образом:

$$F(E) = f_1(E) \cup f_2(E) \cup \dots \cup f_k(E). \quad (1.1)$$

Определение 1.1 ([9]) *Непустое компактное множество $E \subset M$, обладающее свойством $F(E) = E$, где $F(E)$ — сжимающее отображение (1.1), называется однородным самоподобным фрактальным множеством.*

Зададим отображение $F : K(M) \rightarrow K(M)$ иначе:

$$F(E) = f_1(E) \cup f_2(E) \cup \dots \cup f_k(E) \cup Y, \quad (1.2)$$

где Y — фиксированное компактное подмножество в M .

¹ Существует также ряд работ, содержащих общие геометрические сведения относительно некоторых конструктивных фрактальных множеств в трехмерных пространствах.

² Невзирая на то, что каркас Серпинского I типа представляет собой наиболее очевидный из возможных многомерных аналогов треугольной салфетки Серпинского I типа и является на сегодня известным [9], подробного исследования данного множества автору не встречалось.

Определение 1.2 ([9]) *Непустое компактное множество $E \subset M$, обладающее свойством $F(E) = E$, где $F(E)$ — сжимающее отображение (1.2), называется неоднородным самоподобным фрактальным множеством.*

Определение 1.3 ([15]) *Число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, удовлетворяющее равенству*

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\},$$

где $H_\alpha(E)$ — α -мера Хаусдорфа множества E , называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича множества E .

Отметим некоторые свойства размерности Хаусдорфа-Безиковича [15]:

1. Если E_1 и E_2 — геометрически подобны, то $\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2)$.
2. $\alpha_0(E) = 0$ для произвольного не более чем счетного множества E .
3. $\alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$.
4. $\alpha_0(\bigcup_n E_n) = \sup\{\alpha_0(E_n)\}$.

Рассмотрим метрическое пространство $\{M, \rho\}$. Введем общие понятия коэффициента подобия, самоподобного множества и самоподобной размерности.

Определение 1.4 ([15]) *Множество $F \subset M$ называется подобным множеству $E \subset M$ с коэффициентом подобия $k > 0$, если существует отображение $g : E \rightarrow F$ такое, что $\forall x_1, x_2 \in E$:*

$$\frac{\rho(g(x_1), g(x_2))}{\rho(x_1, x_2)} = k. \quad (1.3)$$

Определение 1.5 ([15]) *Непустое ограниченное множество E метрического пространства $\{M, \rho\}$ называется самоподобным (СП-множеством), если*

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad n > 1, \\ E_i \stackrel{k_i}{\sim} E, \quad i = \overline{1, n}, \\ \alpha_0(E_i \cap E_j) < \alpha_0(E), \quad \forall i \neq j, \end{cases}$$

т.е. множество E самоподобное, если его можно представить в виде конечного объединения своих неперекрывающихся подмножеств E_i , геометрически подобных E (в общем случае каждое со своим коэффициентом подобия k_i), причем размерность Хаусдорфа-Безиковича пересечения произвольных двух таких подмножеств меньше, чем размерность самого множества E .

Определение 1.6 ([15]) Неотрицательное число α_s , являющееся решением уравнения

$$\sum_{i=1}^n k_i^x = 1,$$

называется самоподобной размерностью (СП-размерностью) множества E .

Перепишем определения (1.1) и (1.2) с использованием обозначений определений (1.4), (1.5).

Определение 1.7 Непустое компактное множество E метрического пространства $\{M, \rho\}$ называется однородным самоподобным фрактальным множеством, если

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i=1}^n E_i, & n > 1, \\ E_i \stackrel{k_i}{\sim} E, & 0 < k_i < 1, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Определение 1.8 Непустое компактное множество E метрического пространства $\{M, \rho\}$ называется неоднородным самоподобным фрактальным множеством, если

$$\begin{cases} E = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \cup Y, & n > 1, \\ E_i \stackrel{k_i}{\sim} E, & 0 < k_i < 1, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где Y — фиксированное компактное подмножество в $\{M, \rho\}$.

Теорема 1.1 ([15]) Размерность Хаусдорфа-Безиковича однородного самоподобного фрактального множества совпадает с его СП-размерностью: $\alpha_0(E) = \alpha_s(E)$.

Также в работе использована классификация, отображающая принадлежность фрактальных множеств к определенным классам в зависимости от значений размерности Хаусдорфа-Безиковича [14,15], применительно к фрактальным множествам в смысле определений (1.7), (1.8).

Определение 1.9 Фракталом в широком смысле называется однородное или неоднородное фрактальное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше топологической размерности последнего.

Определение 1.10 Фракталом в узком смысле называется однородное или неоднородное фрактальное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого принимает дробное значение.

Определение 1.11 Целофракталом называется однородное или неоднородное фрактальное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого принимает целое значение.

Определение 1.12 Квазифракталом называется однородное или неоднородное фрактальное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого совпадает с топологической.

Определение 1.13 Гиперфракталом называется однородное или неоднородное фрактальное множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого на единицу меньше топологической размерности пространства.

Поскольку процедуры построения представленных многомерных аналогов треугольной салфетки Серпинского I типа предполагают обращение к таким многогранникам как срединно-усеченные симплексы, введем следующее определение.

Определение 1.14 ([16]) n -мерным срединно-усеченным симплексом $(_{mt}Simp^n)$, $n \geq 2$, называется n -мерный многогранник, представляющий собой выпуклую оболочку C_{n+1}^2 точек (вершин срединно-усеченного симплекса), являющихся серединами 1-граней произвольного n -мерного симплекса.

Автором были исследованы внутренние геометрическая структура и основные характеристики данных многогранников [16], результатом чего явилась, в частности, следующая теорема.

Теорема 1.2 ([16]) n -мерный срединно-усеченный симплекс является выпуклым многогранником, $(n-1)$ -границ которого представлены равным количеством многогранников двух типов, а именно:

- симплексами;
- срединно-усеченными симплексами.

При этом количество i -граней, $i = \overline{0, n-1}$, n -мерного срединно-усеченного симплекса равно:

$$\begin{cases} N_i(_{mt}Simp^n) = (n-i+1) \cdot C_{n+1}^{n-i}, & i = \overline{2, n-1}, \\ N_1(_{mt}Simp^n) = (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}, \\ N_0(_{mt}Simp^n) = C_{n+1}^{n-1}. \end{cases}$$

2 Треугольная салфетка Серпинского I типа. Основные подходы, используемые для построения многомерных аналогов

Как известно [3, 7, 10, 11, 12, 17, 19, 20], треугольная салфетка Серпинского I типа $_{ms}SCar^{(2)}$ может быть определена как конструктивное фрактальное множество в двумерном векторном пространстве, являющееся результатом счетной процедуры исключений.

Некоторое представление о данном фрактальном множестве дает Рис. 2.1, на котором изображена фигура, полученная на третьем этапе построения.



Рис. 2.1 Третий этап построения треугольной салфетки Серпинского I типа

Треугольная салфетка Серпинского I типа обладает следующим, отмеченным профильными специалистами, свойством [17]: несмотря на то, что в качестве изначального множества построения выступает заполненный треугольник, а само множество является результатом счетной процедуры исключений, площадь последнего равна нулю, поскольку сумма площадей исключенных треугольников равна площади изначального множества построения. Одновременно, длина рассматриваемого фрактального множества бесконечна.

С точки зрения геометрической структуры рассматриваемый объект является ограниченным самоподобным фрактальным множеством, представляющим собой объединение трех конгруэнтных и подобных целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$:

$$_{ms}SCar^{(2)} = \bigcup_{i=1}^3 E_i, \quad E_i \stackrel{1/2}{\sim} _{ms}SCar^{(2)}.$$

Таким образом, треугольная салфетка Серпинского I типа есть однородное самоподобное фрактальное множество в смысле определения (1.7).

Представленное фрактальное множество можно также рассматривать как объединение двух непересекающихся множеств (см. например, [1]):

- нигде не плотной на плоскости, при этом плотной в себе, бесконечно-звенной ломаной L – счетного объединения сторон треугольников промежуточных этапов построения, включая изначальный треугольник построения;
- несчетного множества точек, не лежащих на указанной бесконечно-звенной ломаной L .

Треугольная салфетка Серпинского I типа есть нигде не плотное на плоскости совершенное множество, каждая точка которого есть точкой конденсации данного множества, имеющее мощность континуума.

Треугольная салфетка Серпинского I типа есть фрактал в узком смысле, т. е. ее размерность Хаусдорфа-Безиковича принимает дробное значение, а именно: $\alpha_0(msSCar^{(2)}) = \log_2 3$.

Поскольку треугольная салфетка Серпинского I типа является одномерным континуумом, то, следуя [13, 18], можно говорить, что рассматриваемое фрактальное множество есть плоскостная фрактальная линия (в смысле Урысона).

Прежде чем перейти собственно к многомерным аналогам треугольной салфетки Серпинского I типа, остановимся на основных используемых подходах к их отысканию.

С геометрической точки зрения данное фрактальное множество может восприниматься следующим образом:

- *как самостоятельный с точки зрения геометрической структуры фрактальный объект без привязки непосредственно к некой процедуре построения*, т. е. как ограниченное самоподобное фрактальное множество, представляющее собой объединение трех конгруэнтных и подобных целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$.

С другой стороны данное множество может восприниматься

- *как результат определенной процедуры построения*, а именно счетной процедуры последовательных исключений внутренностей соответствующего количества треугольников промежуточных этапов построения.

Обратим внимание, что изложенные подходы обуславливают принципиальные различия не только с точки зрения **видения** изначального фрактального объекта, но и с точки зрения полученных результатов в части многомерных аналогов. Так, один из многомерных аналогов, названный каркасом Серпинского I типа, представляет собой фрактальную линию, другой

же, названный пластинчатым симплексом I типа, – фрактальную поверхность.

Итак, имеем следующие многомерные аналоги треугольной салфетки Серпинского I типа (в качестве изначального множества построения выступает многомерный заполненный симплекс).

Каркас Серпинского I типа (многомерный аналог треугольной салфетки Серпинского I типа с точки зрения геометрической структуры фрактального множества). Данный аналог является результатом конструктивного процесса, приводящего к образованию ограниченного самоподобного фрактального множества, представляющего собой объединение $(n + 1)$ конгруэнтных и подобных целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$.

И, как уже было сказано, представляет собой фрактальную линию.

Пластинчатый симплекс I типа (многомерный аналог треугольной салфетки Серпинского I типа с точки зрения процедуры построения фрактального множества). Данный аналог является результатом счетной процедуры последовательных исключений внутренностей соответствующего количества срединно-усеченных симплексов (центральных многогранников) промежуточных этапов построения.

И, как уже было сказано, представляет собой фрактальную поверхность.

3 Многомерный каркас Серпинского I типа (фрактальная линия)

Рассмотрим векторное метрическое пространство $\{V^n(\mathbb{R}), \rho\}$, $n \geq 2$, где ρ — фиксированная метрика, сохраняющая коэффициент подобия k , определяемый выражением (1.3)³.

Поскольку каркас Серпинского I типа, $n \geq 3$, является многомерным аналогом треугольной салфетки Серпинского I типа с точки зрения геометрической структуры фрактального множества, определим общий конструктивный процесс для случая $n \geq 2$, приводящий к образованию указанных фрактальных множеств.

С точки зрения конструктивного объекта каркас Серпинского I типа, $n \geq 2$, является результатом счетной процедуры исключений в соответствии с принципами, изложенными ниже.

³ В контексте предложенной работы в качестве метрики используется произвольная, сохраняющая коэффициенты подобия фрактальных множеств. Это может быть как привычная евклидова метрика, так и иные, например, так называемая σ -метрика [5], обладающая указанным свойством.

Процедура построения. Разобьем произвольный n -мерный заполненный симплекс $(n-1)$ -мерными гиперплоскостями, проходящими через середины его ребер параллельно основаниям. При этом образуются $(n+1)$ заполненных n -мерных симплексов около вершин исходного (далее – привершинные симплексы), а также центральный заполненный n -мерный срединно-усеченный симплекс $_{mt}Simp^n$.

Исключим следующие множества:

внутренность центрального заполненного n -мерного срединно-усеченного симплекса $_{mt}Simp^n$;

внутренности $(n+1)$ $(n-1)$ -мерных заполненных срединно-усеченных симплексов, представляющих собой один из типов $(n-1)$ -граней центрального многогранника $_{mt}Simp^n$;

внутренности C_{n+1}^{n-2} $(n-2)$ -мерных заполненных срединно-усеченных симплексов, представляющих собой один из типов $(n-2)$ -граней центрального многогранника $_{mt}Simp^n$;

.....

внутренности C_{n+1}^{n-2} двумерных заполненных срединно-усеченных симплексов (треугольников), представляющих собой один из типов 2-граней центрального многогранника $_{mt}Simp^n$.

Далее сделаем аналогичную процедуру с $(n+1)$ оставшимися заполненными привершинными симплексами. Продолжая подобную операцию бесконечно, после счетного количества исключений получим искомое фрактальное множество.

Определение 3.1 n -мерным каркасом Серпинского I типа, $n \geq 2$, называется фрактальное множество, являющееся результатом счетной процедуры исключений в соответствии с вышеизложенными принципами.

Заметим, что в процессе указанной счетной процедуры на каждом l -м, $l \geq 1$, этапе исключается множество, представляющее собой объединение внутренностей:

$(n+1)^{l-1}$ n -мерных заполненных срединно-усеченных симплексов,

$(n+1)^{l-1} \cdot C_{n+1}^1$ $(n-1)$ -мерных заполненных срединно-усеченных симплексов, представляющих собой один из типов старших $(n-1)$ -граней

$(n+1)^{l-1}$ n -мерных срединно-усеченных симплексов,

.....

$(n+1)^{l-1} \cdot C_{n+1}^{n-2}$ двумерных заполненных срединно-усеченных симплексов (треугольников), представляющих собой один из типов 2-граней $(n+1)^{l-1}$ n -мерных срединно-усеченных симплексов,

с коэффициентом подобия $1/2^{l-1}$ ($l \geq 2$) относительно первого этапа построения.

Отметим, что аналогично треугольной салфетке Серпинского I типа в евклидовых пространствах размерности три и выше каркас Серпинского I типа обладает следующим свойством: старший объем рассматриваемого фрактального множества равен нулю, одновременно, длина бесконечна (см. Приложение).

Свойство 3.1 *C точки зрения геометрической структуры n -мерный каркас Серпинского I типа, $n \geq 2$, является ограниченным самоподобным фрактальным множеством, представляющим собой объединение $(n + 1)$ конгруэнтных и подобных целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$:*

$${}_{ms}SCar^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i, \quad E_i \stackrel{1/2}{\sim}_{ms} {}_{ms}SCar^{(n)}.$$

Таким образом, многомерный каркас Серпинского I типа есть однородное самоподобное фрактальное множество в смысле определения (1.7).

С целью более глубокого понимания внутренней геометрической структуры многомерного каркаса Серпинского I типа как конструктивного объекта воспользуемся методологическими подходами, в целом аналогичными изложенным в [1] применительно к совершенному множеству Кантора.

n -мерный каркас Серпинского I типа, $n \geq 2$, является результатом счетной процедуры исключений, основные принципы которой изложены выше. Указанная процедура приводит к последовательности убывающих предфракталов:

$$\Pi_1^n \supset \Pi_2^n \supset \dots \Pi_l^n \dots,$$

причем предфрактал l -го поколения Π_l^n представляет собой объединение $(n + 1)^l$ заполненных n -мерных симплексов, ρ -длины ребер которых равны $1/2^l$ (в качестве изначального множества построения рассматривается заполненный n -мерный симплекс, ρ -длины ребер которого равны единице).

Следуя подходу, изложенному в [1], введем аналогичные обозначения составляющих заполненных n -мерных симплексов промежуточных этапов построения рассматриваемого фрактального множества.

Исходя из введенных обозначений очевидно, что каждый заполненный n -мерный симплекс, являющийся составляющим предфрактала l -го поко-

ления, имеет вид:

$$\Delta_{i_1^{(1)} i_2^{(1)} \dots i_l^{(1)} / i_1^{(2)} i_2^{(2)} \dots i_l^{(2)} / \dots / i_1^{(n)} i_2^{(n)} \dots i_l^{(n)}}, \quad (3.1)$$

причем $i_1^{(1)}, \dots, i_l^{(1)}, \dots, i_1^{(n)}, \dots, i_l^{(n)}$ принимают значения 0 или 1⁴.

На основании изложенного, n -мерный каркас Серпинского I типа, $n \geq 2$, можно определить следующим образом:

$${}_{ms}SCar^{(n)} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \Pi_l^n. \quad (3.2)$$

Утверждение 3.1 $\forall n \geq 2$ размерность Хаусдорфа-Безиковича n -мерного каркаса Серпинского I типа равна: $\alpha_0({}_{ms}SCar^{(n)}) = \log_2(n+1)$.

Доказательство Рассматриваемое фрактальное множество замкнуто как пересечение убывающей последовательности замкнутых множеств (последовательность убывающих предфракталов) (3.2). Исходя из того, что размерность Хаусдорфа-Безиковича ограниченных замкнутых СП-множеств, каковым и является фрактальное множество ${}_{ms}SCar^{(n)}$, совпадает с СП-размерностью (Теорема 1.1), получим следующее значение искомой размерности Хаусдорфа-Безиковича в векторном метрическом пространстве $\{V^n(\mathbb{R}), \rho\}$: $\alpha_0({}_{ms}SCar^{(n)}) = \alpha_s({}_{ms}SCar^{(n)}) = \log_2(n+1)$.

Введем следующие определения.

Определение 3.2 Счетным каркасом фрактального множества ${}_{ms}SCar^{(n)}$ называется множество L , состоящее из всех точек рассматриваемого множества, принадлежащих ребрам составляющих симплексов полной совокупности предфракталов и изначального симплекса построения.

Определение 3.3 Пылевидным подмножеством фрактального множества ${}_{ms}SCar^{(n)}$ называется множество $\bar{L}$, состоящее из всех точек рассматриваемого множества, не лежащих на счетном каркасе L .

Утверждение 3.2 n -мерный каркас Серпинского I типа, $n \geq 2$, представляет собой объединение двух непересекающихся множеств: счетного каркаса L и пылевидного подмножества $\bar{L}$.

⁴ Обратим внимание, что последовательности индексов $i_1^{(1)}, \dots, i_l^{(1)}, \dots, i_1^{(n)}, \dots, i_l^{(n)}$ представлены не всеми возможными последовательностями, составленными из нулей и единиц, но лишь соответствующими непосредственно процедуре построения фрактального множества ${}_{ms}SCar^{(n)}$, $n \geq 2$.

Утверждение 3.3 Множество L обладает следующим свойством: $\dim L = \alpha_0(L) = 1$.

Доказательство Заметим, что множество L представляет собой бесконечную ломаную — счетное объединение отрезков L_i , $i = \overline{1, \infty}$, являющихся ребрами составляющих симплексов полной совокупности предфракталов и изначального симплекса построения. Следовательно, $\dim L = \sup_i (\dim L_i) = 1$. Поскольку размерности Хаусдорфа–Безиковича составляющих отрезков совпадают с топологическими, справедливо следующее тождество: $\alpha_0(L) = \sup_i (\alpha_0(L_i)) = 1$.

Утверждение 3.4 Множество $\bar{L}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\dim \bar{L} = 0$.
- 2) $\alpha_0(\bar{L}) = \log_2(n + 1)$.
- 3) Множество $\bar{L}$ несчетно.

Доказательство 1) Воспользуемся подходами монографии [6]. Множество $\bar{L}$ нульмерно, поскольку каждая его точка содержится в произвольно малых n –мерных симплексах, ребрами которых служат составляющие отрезки счетного каркаса L . При этом пересечение $(n - 1)$ –мерных границ указанных симплексов и рассматриваемого несчетного подмножества $\bar{L}$ пусто.

2) Поскольку размерность Хаусдорфа–Безиковича каркаса Серпинского I типа равна $\log_2(n + 1)$ и при этом рассматриваемое фрактальное множество может быть представлено в виде объединения счетного каркаса L , размерность Хаусдорфа–Безиковича которого равна единице, и пылевидного подмножества $\bar{L}$, то, исходя из соотношения $\alpha_0(m_s SCar^{(n)}) = \max(\alpha_0(L); \alpha_0(\bar{L})) = \log_2(n + 1)$, очевидно, что $\alpha_0(\bar{L}) = \log_2(n + 1)$.

3) Проведем доказательство от противного. Предположим, что пылевидное подмножество $\bar{L}$ счетно, и, следовательно его размерность Хаусдорфа–Безиковича равна нулю. Тогда размерность Хаусдорфа–Безиковича каркаса Серпинского I типа как объединения своих непересекающихся подмножеств L и $\bar{L}$ равна единице, что, в силу Утверждения (3.1) неверно. Таким образом рассматриваемое подмножество $\bar{L}$ действительно является несчетным.

На основании изложенного можно сформулировать следующее свойство каркаса Серпинского I типа.

Свойство 3.2 n –мерный каркас Серпинского I типа, $n \geq 2$, представляет собой объединение двух непересекающихся множеств:

- нигде не плотного в $V^n(\mathbb{R})$, при этом плотно в себе счетного каркаса L (бесконечнозвенной ломаной);
- несчетного множества точек $\bar{L}$, не лежащих на указанной бесконечнозвенной ломаной L (пылевидное подмножество).

Свойство 3.3 Топологическая размерность n -мерного каркаса Серпинского I типа, $n \geq 2$, равна единице.

Доказательство Поскольку каркас Серпинского I типа может быть представлен в виде объединения своих подмножеств L и $\bar{L}$ (Свойство (3.2)), топологическая размерность рассматриваемого фрактального множества равна: $\dim_{(ms)} SCar^{(n)} = \max(\dim L; \dim \bar{L}) = 1$.

Используя упомянутую ранее классификацию, отображающую принадлежность фрактальных множеств к определенным классам в зависимости от значений размерности Хаусдорфа-Безиковича, а также учитывая, что топологическая размерность каркаса Серпинского I типа равна единице, можно сформулировать следующее свойство.

Свойство 3.4 $\forall n \geq 2$ n -мерный каркас Серпинского I типа есть фрактал в широком смысле, т.е. его размерность Хаусдорфа-Безиковича не совпадает с топологической размерностью. При этом

$\forall n = 2^k - 1, k \geq 2: \alpha_0(msSCar^{(n)}) = \log_2(n+1) = k \in Z$, т.е. $msSCar^{(n)}$ есть целофрактал;

$\forall n \neq 2^k - 1, k \geq 1: \alpha_0(msSCar^{(n)}) = \log_2(n+1) \notin Z$, т.е. $msSCar^{(n)}$ есть фрактал в узком смысле.

Свойство 3.5 n -мерный каркас Серпинского I типа есть нигде не плотное в $V^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, совершенное множество, каждая точка которого есть точкой конденсации этого множества, имеющее мощность континуума.

Доказательство • Рассматриваемое фрактальное множество является замкнутым континуумом как пересечение убывающей последовательности замкнутых континуумов (последовательность убывающих предфракталов).

• Докажем, что каркас Серпинского I типа нигде не плотен в $V^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Т.к. данное множество является замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $V^n(\mathbb{R}) \setminus msSCar^{(n)}$ было всюду плотно в $V^n(\mathbb{R})$ [1], т.е. чтобы каждая точка $\mathbf{x} \in V^n(\mathbb{R})$ являлась точкой прикосновения указанного дополнения. Достаточно рассмотреть случай $\mathbf{x} \in msSCar^{(n)}$ и показать, что каково бы ни было $\epsilon > 0$, имеются точки из $V^n(\mathbb{R}) \setminus msSCar^{(n)}$, лежащие в окрестности $O_\epsilon(\mathbf{x})$.

Рассмотрим множество K всех точек изначального симплекса построения каркаса Серпинского I типа вида $\mathbf{x} = (\frac{k_1}{2^{m_1}}; \dots; \frac{k_n}{2^{m_n}})$, $k_i, m_i \in N$, $i = \overline{1, n}$, $x_i = \frac{k_i}{2^{m_i}} < 1$.

Рассмотрим также счетное подмножество C множества K , представляющее собой полную совокупность центров срединно-усеченных симплексов, исключаемых в процессе конструктивной процедуры построения рассматриваемого фрактального множества.

Как следствие конструктивного процесса построения каркаса Серпинского I типа, очевидно, что последний содержит только те точки множества K , которые соответствуют вершинам составляющих симплексов полной совокупности предфракталов и изначального симплекса построения. Таким образом, множество C плотно в K .

Рассмотрим точку $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}; \dots; x_n^{(0)}) \in {}_{ms}SCar^{(n)}$ и докажем, что в любой ее окрестности $O_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$, $\epsilon > 0$, имеются точки $\mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n) \in C \subset V^n(\mathbb{R}) \setminus {}_{ms}SCar^{(n)}$.

Построим множество $\tilde{O}_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)}) = O_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)}) \cap S$, где S — открытый изначальный симплекс построения каркаса Серпинского I типа. Рассмотрим окрестность $\tilde{O}_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^{(0)}) \subset \tilde{O}_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$, $\epsilon_1 < \epsilon$, и ее проекции R_i , $i = \overline{1, n}$, на оси координат.

Поскольку на каждом отрезке R_i , $i = \overline{1, n}$, лежит счетное множество точек, i -я координата которых принимает значение $x_i = \frac{k_i}{2^{m_i}} < 1$, $k_i, m_i \in N$, при этом остальные координаты равны нулю, то и в самой окрестности $\tilde{O}_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^{(0)}) \subset \tilde{O}_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$ также содержится счетное множество точек, все координаты которых равны $\frac{k_i}{2^{m_i}} < 1$ (прообразы указанных счетных множеств точек на R_i). Пересечение этого множества с множеством C центров срединно-усеченных симплексов и есть искомое множество, принадлежащее дополнению $V^n(\mathbb{R}) \setminus {}_{ms}SCar^{(n)}$, что и требовалось доказать. Очевидно, что такое пересечение непусто, поскольку множество C плотно в K .

• Докажем, что каркас Серпинского I типа есть нигде не плотное в $V^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, совершенное множество, каждая точка которого есть точкой конденсации этого множества.

Рассмотрим окрестность $O_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$, $\epsilon > 0$, точки $\mathbf{x}^{(0)} \in {}_{ms}SCar^{(n)}$. Следуя конструктивному процессу построения рассматриваемого фрактального множества существует n -мерный симплекс (3.1), вложенный в указанную окрестность:

$$\Delta_{i_1^{(1)} i_2^{(1)} \dots i_l^{(1)} / i_1^{(2)} i_2^{(2)} \dots i_l^{(2)} / \dots / i_1^{(n)} i_2^{(n)} \dots i_l^{(n)}} \subset O_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$$

Воспользуемся подходами, аналогичными изложенным в монографии [18]. Исходя из самоподобия каркаса Серпинского I типа, мощность его подмножества, содержащегося в n -мерном симплексе (3.1), совпадает с мощностью полного фрактала (континуум). Следовательно, и в самой окрестности $O_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$ содержится несчетное множество точек из ${}_{ms}SCar^{(n)}$.

На основании изложенного можно утверждать, что каждая точка $\mathbf{x} \in {}_{ms}SCar^{(n)}$ действительно является точкой конденсации рассматриваемого множества и при этом иных предельных точек последнее не имеет как замкнутое. Таким образом каркас Серпинского I типа является совершенным, поскольку совпадает со своим производным множеством.

Поскольку многомерный каркас Серпинского I типа является одномерным континуумом, то, следуя [13,18], можно говорить, что рассматриваемое фрактальное множество есть пространственная фрактальная линия (в смысле Урысона).

Пример 3.1 Рассмотрим каркас Серпинского I типа в векторном метрическом пространстве $\{V^3(\mathbb{R}), \rho\}$, где ρ — фиксированная метрика, сохраняющая коэффициент подобия k , определяемый выражением (1.3).

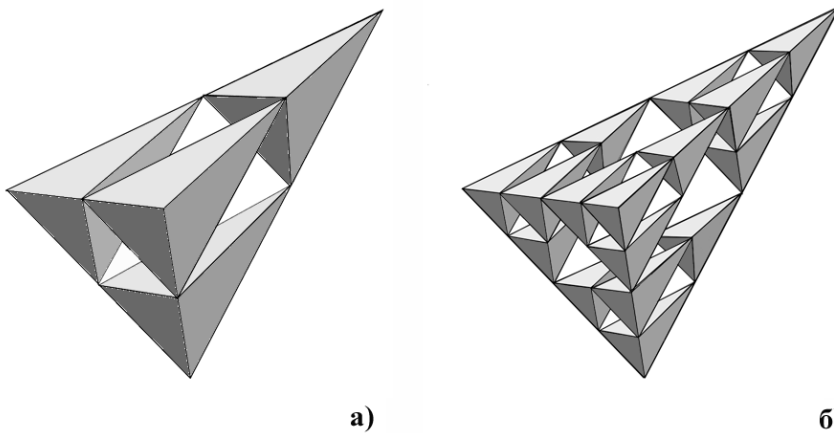


Рис. 3.1 Первый (а)) и второй (б)) этапы построения трехмерного каркаса Серпинского I типа

С точки зрения геометрической структуры рассматриваемый объект является ограниченным самоподобным фрактальным множеством, представляющим собой объединение четырех конгруэнтных и подобных целому

неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$:

$${}_{ms}SCar^{(3)} = \bigcup_{i=1}^4 E_i, \quad E_i \stackrel{1/2}{\sim} {}_{ms}SCar^{(3)}.$$

Размерность Хаусдорфа–Безиковича: $\alpha_0({}_{ms}SCar^{(3)}) = 2$.

Поскольку размерность Хаусдорфа–Безиковича не совпадает с топологической, которая равна единице, рассматриваемое фрактальное множество есть фрактал в широком смысле. Очевидно также, что данное множество представляет собой целофрактал. Более того, гиперфрактал, поскольку размерность Хаусдорфа–Безиковича положительна и на единицу меньше топологической размерности пространства.

Замечание 3.1 В работе [11] трехмерный каркас Серпинского I типа упоминается под названием асимметричной фрактальной паутины, в [20] — как один из трехмерных вариантов треугольного ковра Серпинского.

4 Многомерный пластинчатый симплекс I типа (фрактальная поверхность)

Рассмотрим векторное метрическое пространство $\{V^n(\mathbb{R}), \rho\}$, $n \geq 3$, где ρ — фиксированная метрика, сохраняющая коэффициент подобия k , определяемый выражением (1.3).

Поскольку пластинчатый симплекс I типа, $n \geq 3$, является многомерным аналогом треугольной салфетки Серпинского I типа с точки зрения процедуры построения фрактального множества необходимым видится прежде всего определить соответствующий конструктивный процесс.

С точки зрения конструктивного объекта многомерный пластинчатый симплекс I типа является результатом счетной процедуры исключений в соответствии с принципами, изложенными ниже.

Процедура построения. Разобьем произвольный n –мерный заполненный симплекс $(n-1)$ –мерными гиперплоскостями, проходящими через середины его ребер параллельно основаниям. При этом образуются $(n+1)$ заполненных n –мерных симплексов около вершин исходного, а также центральный заполненный n –мерный срединно-усеченный симплекс ${}_{mt}Simp^n$. Исключим внутренность последнего. Далее проделаем аналогичную процедуру с $(n+1)$ оставшимися заполненными привершинными симплексами. Продолжая подобную операцию бесконечно, после счетного количества исключений получим искомое фрактальное множество.

Определение 4.1 n -мерным $(n-1)$ -мерно пластинчатым симплексом I типа, $n \geq 3$, называется фрактальное множество, являющееся результатом счетной процедуры исключений в соответствии с вышеизложенными принципами.

Заметим, что в процессе указанной счетной процедуры на каждом l -м, $l \geq 1$, этапе исключается множество, представляющее собой объединение внутренностей $(n+1)^{l-1}$ n -мерных заполненных срединно-усеченных симплексов с коэффициентом подобия $1/2^{l-1}$ ($l \geq 2$) относительно первого этапа построения.

Отметим, что аналогично треугольной салфетке Серпинского I типа в евклидовых метрических пространствах размерности три и выше старший объем пластинчатого симплекса равен нулю (см. Приложение).

Одновременно, площадь поверхности $((n-1)$ -мерный объем) рассматриваемого фрактального множества:

- бесконечна в единственном случае, а именно при $n = 3$;
- $\forall n \geq 4$ принимает конечное значение

$$V_{n-1} = (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)}$$

Свойство 4.1 C точки зрения геометрической структуры n -мерный $(n-1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа, $n \geq 3$, является ограниченным фрактальным множеством, представляющим собой объединение $(n+1)$ конгруэнтных и подобных целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$, а также $(n+1)$ соединяющих средних частей старших граней изначального n -мерного симплекса построения:

$${}_{ms}Sim p_{/n-1}^{(n)} = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} G_i \right),$$

$$E_i \stackrel{1/2}{\sim} {}_{ms}Sim p_{/n-1}^{(n)},$$

$$G_i - (n-1)\text{-мерные срединно-усеченные симплексы,}$$

$$i = \overline{1, n+1}.$$

Таким образом, многомерный пластинчатый симплекс I типа есть неоднородное самоподобное фрактальное множество в смысле определения (1.8).

Введем следующее определение.

Определение 4.2 Счетным каркасом фрактального множества $_{ms}Simp_{/n-1}^{(n)}$, $n \geq 3$, называется множество A , представляющее собой объединение старших граней $((n-1)$ -граней) изначального и промежуточных n -мерных симплексов построения рассматриваемого фрактального множества.

Утверждение 4.1 Множество A обладает следующим свойством: $\dim A = \alpha_0(A) = n - 1$.

Доказательство Множество A может быть представлено в виде объединения счетного количества составляющих $(n-1)$ -мерных симплексов A_i , $i = \overline{1, \infty}$, размерности Хаусдорфа-Безиковича которых совпадают с топологическими и равны $(n-1)$. Отсюда $\alpha_0(A) = \sup_i (\alpha_0(A_i)) = n - 1$.

Свойство 4.2 n -мерный $(n-1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа, $n \geq 3$, представляет собой объединение двух непересекающихся множеств:

- нигде не плотного в $V^n(\mathbb{R})$, при этом плотного в себе, $(n-1)$ -мерного счетного каркаса A ;
- несчетного множества точек $\bar{A}$ (совпадает с несчетным пылевидным подмножеством точек каркаса Серпинского I типа), не лежащих на указанном счетном каркасе A .

Свойство 4.3 Топологическая размерность n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа, $n \geq 3$, равна $(n-1)$.

Доказательство Поскольку рассматриваемое фрактальное множество может быть представлено в виде объединения своих подмножеств A и $\bar{A} = \bar{L}$ (Свойство 4.2), его топологическая размерность равна: $\dim(_{ms}Simp_{/n-1}^{(n)}) = \max(\dim A; \dim \bar{A}) = \max(n-1; 0) = n-1$.

Используя классификацию, отображающую принадлежность фрактальных множеств к определенным классам в зависимости от значений размерности Хаусдорфа-Безиковича, а также учитывая, что топологическая размерность n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа равна $n-1$, можно сформулировать следующее свойство.

Свойство 4.4 $\forall n \geq 3$ n -мерный $(n-1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа есть квазигиперфрактал, т.е. его размерность Хаусдорфа-Безиковича положительна, совпадает с топологической размерностью и принимает значение на единицу меньше топологической размерности пространства: $\alpha_0(_{ms}Simp_{/n-1}^{(n)}) = n - 1$.

Доказательство n -мерный $(n - 1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа может быть представлен в виде объединения двух непересекающихся подмножеств A и $\bar{A}$.

Поскольку $\forall n \geq 3$ справедливо соотношение: $\log_2(n + 1) \leq n - 1$, то искомая размерность Хаусдорфа-Безиковича принимает значение:

$$\alpha_0(ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}) = \max(\alpha_0(A); \alpha_0(\bar{A})) = \max(n - 1; \log_2(n + 1)) = n - 1.$$

Свойство 4.5 *Многомерный пластинчатый симплекс I типа есть нигде не плотное в $V^n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$, совершенное множество, каждая точка которого есть точкой конденсации этого множества, имеющее мощность континуума.*

Доказательство Рассматриваемое фрактальное множество является замкнутым континуумом как пересечение убывающей последовательности замкнутых континуумов (последовательность убывающих предфракталов).

Докажем, что многомерный пластинчатый симплекс I типа нигде не плотен в $V^n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$. Т.к. данное множество является замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $V^n(\mathbb{R}) \setminus ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}$ было всюду плотно в $V^n(\mathbb{R})$ [1], т.е. чтобы каждая точка $\mathbf{x} \in V^n(\mathbb{R})$ являлась точкой прикосновения указанного дополнения. Достаточно рассмотреть случай $\mathbf{x} \in ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}$ и показать, что каково бы ни было $\epsilon > 0$, имеются точки из $V^n(\mathbb{R}) \setminus ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}$, лежащие в окрестности $O_\epsilon(\mathbf{x})$.

Заметим, что рассматриваемое фрактальное множество может быть представлено в виде: $ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)} = ms\text{SCar}^{(n)} \cup S_{n-1}$, где множество S_{n-1} представляет собой счетное объединение $(n - 1)$ -мерных срединно-усеченных симплексов (полная совокупность открытых центральных многогранников составляющих $(n - 1)$ -мерных симплексов счетного каркаса A).

Для точек, принадлежащих $ms\text{SCar}^{(n)} \subset ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}$ доказательство проведено выше (см. доказательство Свойства 3.5).

Рассмотрим точку $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}; \dots; x_n^{(0)}) \in S_{n-1} \subset ms\text{SCar}^{(n)}$ и покажем, что каково бы ни было $\epsilon > 0$, имеются точки из $V^n(\mathbb{R}) \setminus ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}$, лежащие в окрестности $O_\epsilon(\mathbf{x}^{(0)})$. Поскольку точка $\mathbf{x}^{(0)}$ принадлежит одному из открытых центральных многогранников составляющих $(n - 1)$ -мерных симплексов счетного каркаса A , данный факт очевиден, поскольку указанный центральный многогранник лежит на границе соответствующего n -мерного срединно-усеченного симплекса, исключаемого в процессе построения фрактального множества $ms\text{Simp}_{/n-1}^{(n)}$.

Следовательно, рассматриваемое фрактальное множество действительно нигде не плотно в $V^n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$.

Многомерный пластинчатый симплекс I типа является совершенным множеством, каждая точка которого есть точкой его конденсации, как объединение двух непересекающихся совершенных множеств, обладающих аналогичным свойством, — $(n - 1)$ -мерного счетного каркаса A (счетное объединение $(n - 1)$ -мерных симплексов) и несчетного множества точек $\bar{A} = \bar{L}$.

Поскольку n -мерный $(n - 1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа является $(n - 1)$ -мерным континуумом, то, по аналогии с фрактальными линиями, можно говорить, что рассматриваемое фрактальное множество есть $(n - 1)$ -мерная фрактальная поверхность.

Пример 4.1 Рассмотрим пластинчатый симплекс I типа в векторном метрическом пространстве $\{V^3(\mathbb{R}), \rho\}$, где ρ — фиксированная метрика, сохраняющая коэффициент подобия k , определяемый выражением (1.3).

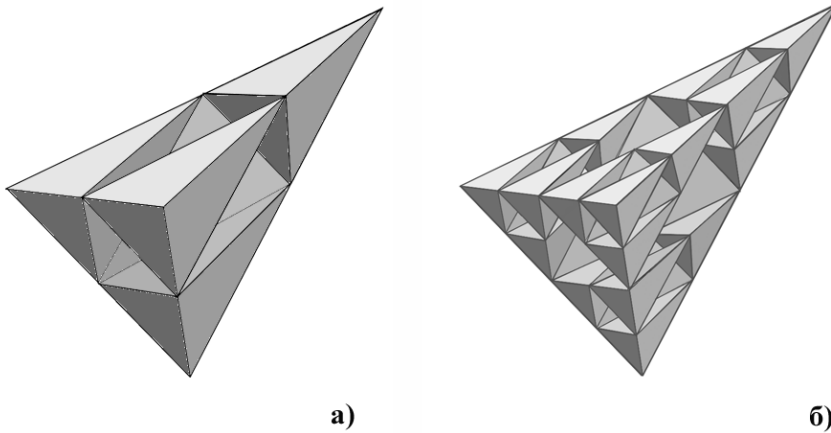


Рис. 4.1 Первый (а)) и второй (б)) этапы построения трехмерного двумерно-пластинчатого симплекса I типа

С точки зрения геометрической структуры рассматриваемый объект является ограниченным фрактальным множеством, представляющим собой объединение четырех конгруэнтных и подобной целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия $1/2$, а также четырех соединяющих средних частей старших граней изначального заполненного симплекса построения (треугольников):

$${}_{ms}Sim p_{/2}^{(3)} = \left(\bigcup_{i=1}^4 E_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^4 G_i \right),$$

$$E_i \stackrel{1/2}{\sim}_{ms} Simp_{/2}^{(3)},$$

G_i — треугольники, $i = \overline{1, 4}$.

Данное множество есть квазигиперфрактал, т.е. его размерность Хаусдорфа-Безиковича положительна, совпадает с топологической размерностью и принимает значение на единицу меньше топологической размерности пространства: $\alpha_0(Simp_{/2}^{(3)}) = 2$.

5 Приложение

Рассмотрим векторное метрическое пространство $\{V^n(\mathbb{R}), \rho\}$, $n \geq 2$, где ρ — евклидова метрика. Тогда мера Хаусдорфа определяется следующим выражением [4]:

$$H_n(\alpha; a) = D(\alpha) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} H_n^{(k)}(\alpha; a) = m_n(\alpha; a),$$

где

$D(\alpha)$ — нормирующий коэффициент;

$m_n(\alpha; a)$ — мера Лебега рассматриваемого множества.

Положим в качестве изначального множества построения каркаса Серпинского I типа и пластинчатого симплекса I типа правильный симплекс с единичными длинами ребер.

Свойство 5.1 Мера Хаусдорфа n -мерного каркаса Серпинского I типа, $n \geq 2$, равна:

$$H_n(\alpha; 2) \left(SCar^{(n)} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < \alpha_0; \\ \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, & \alpha = \alpha_0 = \log_2(n+1); \\ 0, & \alpha > \alpha_0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Доказательство Известно, что старший объем правильного n -мерного симплекса, длины ребер которого равны $r > 0$, определяется выражением:

$$V_n(r) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot r^n.$$

Положим в качестве изначального симплекса построения каркаса Серпинского I типа единичный, n -мерный объем которого равен:

$$V_n(1) = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}.$$

Поскольку предфрактал k -го поколения, $k \geq 1$, представляет собой объединение $N_n^{(k)} = (n+1)^k$ составляющих n -мерных симплексов, объемы которых равны $V_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^n$, мера Лебега рассматриваемого предфрактала равна $N_n^{(k)} \cdot V_n^{(k)} = (n+1)^k \cdot \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^n = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \cdot \left(\frac{n+1}{2^n}\right)^k$, а мера Лебега фрактала равна: $\lim_{k \rightarrow \infty} [N_n^{(k)} \cdot V_n^{(k)}] = 0$, $n \geq 2$.

Рассмотрим меру Хаусдорфа каркаса Серпинского I типа:

$$H_n(\alpha; 2)_{(ms)SCar^{(n)}} = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2^\alpha} \right)^k.$$

Очевидно, что при $q = (n+1)/2^\alpha = 1$, т.е. при $\alpha := \alpha_0 = \log_2(n+1)$, мера Хаусдорфа $H_n(\alpha; 2)_{(ms)SCar^{(n)}}$ принимает единственно возможное конечное значение. Одновременно, $\forall \alpha < \alpha_0$ рассматриваемая мера Хаусдорфа бесконечна, $\forall \alpha > \alpha_0$ — равна нулю.

Следствие 5.1 1) $\forall n = 2^k - 1$, $k \geq 2$, n -мерный каркас Серпинского I типа, имеет нулевые i -мерные объемы, $i = \overline{n; \alpha_0 + 1}$, конечный α_0 -объем и бесконечные i -мерные объемы, $i = \overline{\alpha_0 - 1; 1}$.

2) $\forall n \neq 2^k - 1$, $k \geq 1$, n -мерный каркас Серпинского I типа, имеет нулевые i -мерные объемы, $i = \overline{n; [\alpha_0] + 1}$, и бесконечные i -мерные объемы, $i = \overline{[\alpha_0]; 1}$.

Докажем дополнительное утверждение.

Утверждение 5.1 $\forall n \geq 2$ старший объем единичного n -мерного срединно-усеченного симплекса в евклидовом пространстве равен:

$$V_n^{mt}(1) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot [2^n - (n+1)].$$

Доказательство Положим в качестве изначального множества построения рассматриваемого многогранника n -мерный симплекс, длины ребер которого равны двойке. При этом старший объем последнего равен:

$$V_n(2) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot 2^n.$$

Следовательно, старший объем единичного n -мерного срединно-усеченного симплекса равен:

$$\begin{aligned} V_n^{mt}(1) &= V_n(2) - (n+1) \cdot V_n(1) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot 2^n - (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot 1^n = \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot [2^n - (n+1)]. \end{aligned}$$

Следствие 5.2 В n -мерном срединно-усеченном симплексе, длины ребер которого равны $1/2^k$, содержатся 2^n n -мерных срединно-усеченных симплексов, длины ребер которых равны $1/2^{k+1}$.

Доказательство Поскольку $V_n^{mt}(1/2^k) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot (1/2^{k-1})^n \cdot \frac{2^n - (n+1)}{2^n}$, а $V_n^{mt}(1/2^{k+1}) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} \cdot n!} \cdot (1/2^k)^n \cdot \frac{2^n - (n+1)}{2^n}$, утверждение очевидно.

Свойство 5.2 Мера Хаусдорфа n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа, $n \geq 3$, равна:

• $n = 3$:

$$H_3(\alpha; 2) \left(\text{Simp}_{ms}^{(3)} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 2; \\ 0, & \alpha > 2. \end{cases}$$

• $n > 3$:

$$H_n(\alpha; 2) \left(\text{Simp}_{ms}^{(n)} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < n-1; \\ (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)}, & \alpha = \alpha_0 = n-1; \\ 0, & \alpha > n-1. \end{cases}$$

Доказательство n -мерный $(n-1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа можно рассматривать как объединение n -мерного каркаса Серпинского I типа и дополнительного множества A_{n-1} , представляющего собой $(n-1)$ -мерную поверхность.

Определим меру Лебега дополнительного множества A_{n-1} .

Напомним, что в каждом $(n-1)$ -мерном срединно-усеченном симплексе, длины ребер которого равны $1/2^k$, содержатся 2^{n-1} $(n-1)$ -мерных срединно-усеченных симплексов, ребра которых равны $1/2^{k+1}$ (Следствие (5.2)).

На первом этапе построения n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа дополнительное множество A_{n-1} представляет собой объединение

$$N_{n-1}^{(1)} = (n+1)$$

$(n-1)$ -мерных срединно-усеченных симплексов, ребра которых равны $1/2$.

На втором этапе построения — объединение

$$N_{n-1}^{(2)} = N_{n-1}^{(1)} \cdot 2^{n-1} + (n+1)(n+1)$$

$(n-1)$ -мерных срединно-усеченных симплексов, ребра которых равны $1/2^2$.

На k -м этапе построения, $k \geq 1$, — объединение

$$N_{n-1}^{(k)} = N_{n-1}^{(k-1)} \cdot 2^{n-1} + (n+1)^k$$

$(n-1)$ -мерных срединно-усеченных симплексов, ребра которых равны $1/2^k$.

Запишем систему рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} N_{n-1}^{(k)} = 2^{n-1} \cdot N_{n-1}^{(k-1)} + (n+1)^k \\ N_{n-1}^{(k+1)} = 2^{n-1} \cdot N_{n-1}^{(k)} + (n+1)^{k+1}. \end{cases}$$

• $n = 3$: $N_2^{(k)} = k \cdot 4^k$. Следовательно, старший объем дополнительного множества A_2 на k -м этапе построения, $k \geq 1$, равен:

$$V_2^{(k)}(A_2) = N_2^{(k)} \cdot V_2^{mt}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 \cdot k \cdot 4^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Таким образом,

$$H_3(\alpha; 2)(A_2) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 2; \\ 0, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Определим меру Хаусдорфа n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа как объединения n -мерного каркаса Серпинского I типа и дополнительного множества A_{n-1} при $n = 3$.

Поскольку мера Хаусдорфа трехмерного каркаса Серпинского I типа равна (5.1):

$$H_3(\alpha; 2)\left(_{ms}SCar^{(3)}\right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{2}}{12}, & \alpha = \alpha_0 = 2, \\ 0, & \alpha > 2, \end{cases}$$

искомая мера Хаусдорфа трехмерного двумерно-пластинчатого симплекса I типа принимает значение:

$$H_3(\alpha; 2)\left(_{ms}Simp_{/2}^{(3)}\right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha \leq 2; \\ 0, & \alpha > 2. \end{cases}$$

• $n > 3$: $N_{n-1}^{(k)} = \frac{(n+1) \cdot [2^{(n-1)k} - (n+1)^k]}{2^{(n-1)} - (n+1)}$. Следовательно, старший объем дополнительного множества A_{n-1} на k -м этапе построения, $k \geq 1$, равен:

$$\begin{aligned} V_{n-1}^{(k)}(A_{n-1}) &= N_{n-1}^{(k)} \cdot V_{n-1}^{mt}\left(\frac{1}{2^k}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{n-1} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1}} \cdot \frac{(n+1) \cdot [2^{(n-1)k} - (n+1)^k]}{2^{(n-1)} - (n+1)} = \end{aligned}$$

$$= (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{n+1}{2^{n-1}} \right)^k \right].$$

Поскольку $\forall n > 3 : \frac{n+1}{2^{n-1}} < 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{n-1}^{(k)}(A_{n-1}) = (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)}.$$

Таким образом,

$$H_n(\alpha; 2)(A_{n-1}) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < n-1; \\ (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)}, & \alpha = \alpha_0 = n-1; \\ 0, & \alpha > n-1. \end{cases}$$

Определим меру Хаусдорфа n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа как объединения n -мерного каркаса Серпинского I типа и дополнительного множества A_{n-1} при $n > 3$.

Поскольку мера Хаусдорфа n -мерного каркаса Серпинского I типа равна (5.1):

$$H_n(\alpha; 2) \left({}_{ms} SCar^{(n)} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < \alpha_0; \\ \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, & \alpha = \alpha_0 = \log_2(n+1); \\ 0, & \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

искомая мера Хаусдорфа n -мерного $(n-1)$ -мерно пластинчатого симплекса I типа принимает значение:

$$H_n(\alpha; 2) \left({}_{ms} Simp_{/n-1}^{(n)} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < n-1; \\ (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)}, & \alpha = \alpha_0 = n-1; \\ 0, & \alpha > n-1. \end{cases}$$

Замечание 5.1 Обращаем внимание, что при $n = 3$ n -мерный $(n-1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа представляет собой квазигиперфрактал не только в смысле определений (1.12), (1.13), но также в терминах монографии [15]. При $n > 3$ — только в смысле определений (1.12), (1.13).

Следствие 5.3 $\forall n \geq 3$ n -мерный $(n-1)$ -мерно пластинчатый симплекс I типа имеет нулевой старший объем. Одновременно, площадь поверхности $((n-1)$ -мерный объем) рассматриваемого фрактального множества:

- бесконечна в единственном случае, а именно при $n = 3$;

- $\forall n \geq 4$ принимает конечное значение

$$V_{n-1} = (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} \cdot (n-1)!} \cdot \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1} - (n+1)}.$$

При этом k -мерные объемы, $k = \overline{n-2; 1}$, бесконечны.

Заключение

В целом исследования автора в части некоторых типов конструктивных фрактальных симплекс-множеств в векторных метрических пространствах произвольной размерности, к которым относятся рассмотренные в работе каркас Серпинского I типа и пластинчатый симплекс I типа, носят теоретический характер.

Одновременно, перспективным видится использование как предложенных методологических подходов, так и полученных результатов, в процессе дальнейшего развития не только многомерной фрактальной геометрии непосредственно, но и разнообразных пространственно-временных теорий, которые на сегодня активно совершенствуются.

Список литературы

1. Александров П. С.: Введение в теорию множеств и общую топологию. М., Наука, 1977, 368с.
2. Берже М.: Геометрия. Т. 1, М., Мир, 1984, 560с.
3. Божокин С. В., Паршин Д. А.: Фракталы и мультифракталы. Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001, 128с.
4. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.: Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004, 512с.
5. Великий А. П., Турбин А. Ф.: Преобразования А.И.Лобанова. Кибернетика и системный анализ. К., Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 5, 160-168 (2004)
6. Волман Г., Гуревич В.: Теория размерности. М., Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948, 232с.
7. Газале М.: От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002, 272с.
8. Д'Андреа К., Сомбра М.: Определитель Кэли-Менгера неприводим при $n \geq 3$. Сибирский математический журнал, Том 46, № 1, 90-97 (2005)
9. Кириллов А. А.: Повесть о двух фракталах. М., МЦНМО, 2010, 179с.
10. Кроновер Р. М.: Фракталы и хаос в динамических системах. М., Постмаркет, 2000, 352с.
11. Мандельброт Б.: Фрактальная геометрия природы. М., Институт компьютерных исследований, 2002, 666с.
12. Морозов А. Д.: Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002, 160с.
13. Пархоменко А. С.: Что такое линия. М., Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1954, 140с.
14. Працьовитий М. В.: Про означення фрактала та фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей. Фрактальний аналіз та суміжні питання: 36. наук. праць. К., Інститут математики НАН України – НПУ ім. М.П.Драгоманова, 5-26 (1998)

15. Працьовитий М. В.: Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. К., НПУ ім. М.П.Драгоманова, 1998, 298с.
16. Резникова Ю. С.: Срединно-усеченные симплексы в аффинных пространствах произвольной размерности. *Proc. Intern. Geom. Center*, 2, 13-24 (2010)
17. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.: Фрактальные множества, функции, распределения. К., Наукова думка, 1992, 208с.
18. Урысон П. С.: Труды по топологии и другим областям математики: в двух томах. М.-Л., Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1951.
19. Федер Е.: Фракталы. М., Мир, 1991, 260с.
20. Шредер М.: Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001, 528с.

Ю. С. Резникова

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина.

E-mail: yurss@mail.ru

Yuliya Reznikova

Two many-dimensional analogies of the Serpinsky's napkin of I type

Two constructive fractal sets, called the Serpinsky's carcass of I type and the plate-like simplex of I type, are considered. In vector metric spaces of dimension three and higher these sets are the multidimensional analogues of triangular Serpinsky's napkin of I type. The results of research underlying geometrical structure and basic descriptions of the indicated fractal sets are presented in vector metric spaces of arbitrary dimension.

Одержано 12.6.2011

О геодезических отображениях пространств квазипостоянной кривизны

В.А. Киосак

Аннотация Изучается частный случай конформно-плоских пространств — пространства квазипостоянной кривизны. Получен вид метрики пространства, находящегося в геодезическом соответствии с пространством квазипостоянной кривизны.

Ключевые слова пространства квазипостоянной кривизны, псевдоримановы пространства, геодезические отображения

УДК 514.765.1+512.813.4

1 Пространства квазипостоянной кривизны

Псевдориманово пространство $V_n (n > 2)$ с метрическим тензором g_{ij} называют пространством квазипостоянной кривизны, если его тензор Римана R_{ijk}^h удовлетворяет условиям:

$$R_{hijk} = \alpha(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) + \beta(\varphi_h\varphi_jg_{ik} - \varphi_h\varphi_kg_{ij} + \varphi_i\varphi_kg_{hj} - \varphi_i\varphi_jg_{hk}), \quad (1)$$

где $R_{hijk} = g_{ah}R_{ijk}^a$; α, β — некоторые инварианты, а φ_i — единичный вектор [1], [5].

Сворачивая (1), убедимся, что

$$R_{ij} = -(\alpha(n-1) + \beta)g_{ij} - \beta(n-2)\varphi_i\varphi_j, \quad (2)$$

здесь $R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}$ — тензор Риччи V_n .

Из (2) для скалярной кривизны $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$, где g^{ji} — элементы обратной матрицы к g_{ij} , получим:

$$R = -n(\alpha(n-1) + \beta) - \beta(n-2), \quad (3)$$

и тогда (2) примет вид

$$R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij} + \frac{\beta(n-2)}{n}g_{ij} - \beta(n-2)\varphi_i\varphi_j. \quad (4)$$

Из последнего видно, что для пространств Эйнштейна, то есть пространств, в которых выполняются условия $R_{ij} = \frac{R}{n}g_{ij}$, инвариант β — по необходимости нулевой, и пространство квазипостоянной кривизны будет пространством постоянной кривизны. Поэтому, в дальнейшем, будем рассматривать пространства отличные от пространств Эйнштейна.

2 О геодезических отображениях псевдоримановых пространств

Диффеоморфизм между точками псевдоримановых пространств V_n и $\bar{V}_n$ называют геодезическим отображением, если при нем каждая геодезическая линия V_n переходит в геодезическую линию $\bar{V}_n$.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы V_n допускало геодезические отображения, является существование в нем решений уравнения:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \quad (5)$$

Здесь a_{ij} — некоторый симметрический тензор, λ_i — градиентный вектор, а запятая “,” — знак ковариантной производной по связности V_n .

Уравнения (5) называют линейной формой основных уравнений теории геодезических отображений. Условия интегрируемости (5) приводят к уравнениям:

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R_j^{\alpha} - a_{\alpha\beta} R_{.ij}^{\alpha\beta} \quad (6)$$

$$(n-1)\mu_{,i} = 2(n+1)\lambda_{\alpha} R_i^{\alpha} + a_{\alpha\beta} (2R_{.i.}^{\alpha\beta} - R_{.i.}^{\alpha\beta}), \quad (7)$$

где $R_j^i = R_{\alpha j} g^{\alpha i}$; $R_{.ij}^{h.k} = R_{ij\alpha}^h g^{\alpha k}$; $R_{..,k}^{ij} = R_{\alpha\beta,k} g^{\alpha i} g^{\beta j}$; $R_{j.}^{i,k} = R_{\alpha j,\beta} g^{\alpha i} g^{\beta k}$.

Системы (5), (6), (7) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений типа Коши относительно неизвестных тензора a_{ij} , вектора λ_i и инварианта μ [4], [2].

При известных решениях системы (5), (6), (7) метрики геодезически соответствующих пространств V_n и $\bar{V}_n$ могут быть восстановлены из формул

$$a_{ij} = e^{-2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\alpha j}; \quad (8)$$

$$\lambda_i = -e^{-2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \psi_{\alpha}. \quad (9)$$

Здесь ψ — инвариант, а $\psi_i = \psi_{,i}$ — вектор, участвующий в уравнениях

$$2(n+1)\psi_i = \partial_i \ln \left| \frac{\bar{g}}{g} \right|, \quad (10)$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$.

Если векторы ψ_i и соответственно λ_i не равны тождественно нулю, то геодезические отображения называют нетривиальными.

Псевдориманово пространство V_n , допускающее нетривиальное геодезическое отображение, в которых вектор λ_i удовлетворяет условиям

$$\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + B a_{ij}, \quad (11)$$

здесь B — некоторый инвариант, называют пространствами $V_n(B)$.

Количество существенных параметров r в общем решении системы (5), (6), (7) называют степенью мобильности относительно V_n геодезических отображений.

Пространства V_n , у которых $r > 2$, по необходимости являются пространствами $V_n(B)$, при чем $B = \text{const}$ [3], [4], [6].

3 О свойствах решений линейной системы основных уравнений в пространствах квазипостоянной кривизны

Условия интегрируемости уравнений (5) имеют вид:

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = \lambda_{li} g_{jk} + \lambda_{lj} g_{ik} - \lambda_{kj} g_{il} - \lambda_{ki} g_{jl}, \quad (12)$$

где $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$.

Циклируя последнее по индексам (i и l), получим

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha k} R_{jli}^{\alpha} + a_{\alpha l} R_{jik}^{\alpha} = 0. \quad (13)$$

Из последнего будем иметь, сворачивая с g^{ij} —

$$a_{\alpha l} R_h^{\alpha} - a_{\alpha k} R_l^{\alpha} = 0. \quad (14)$$

Подставляя в (14) условие (2), убедимся, что при $\beta \neq 0$

$$\varphi^{\alpha} a_{\alpha i} = \rho \varphi_i, \quad (15)$$

где ρ — некоторый инвариант, а $\varphi^h = \varphi_{\alpha} g^{\alpha h}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1 *Если псевдориманово пространство квазипостоянной кривизны допускает геодезическое отображение, то вектор φ_i удовлетворяет условиям (15).*

Дифференцируя (15), будем иметь с учетом (5)

$$\varphi^{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{ij} + \lambda_i \varphi_j + a_{\alpha i} \varphi_{,j}^{\alpha} = \rho_{,j} \varphi_i + \rho \varphi_{i,j}. \quad (16)$$

Сворачивая (16) с φ^i , получим

$$\rho_{,j} = 2\varphi^{\alpha} \lambda_{\alpha} \varphi_j \quad (17)$$

и, следовательно,

Теорема 2 *Для того, чтобы собственное число ρ , соответствующее собственному вектору φ^{α} матрицы a_{ij} , было постоянным, необходимо и достаточно, чтобы векторы φ^h и λ_i были ортогональными.*

Решение уравнений (5), удовлетворяющее условиям

$$a_{ij} = u g_{ij} + v R_{ij}, \quad (18)$$

называют каноническим [4].

Докажем теорему:

Теорема 3 *В псевдоримановом пространстве квазипостоянной кривизны не существует решений уравнений (5), отличных от канонических.*

Доказательство. Условия (12) с учетом (1) и (15) примут вид:

$$\begin{aligned} & \beta(\varphi_j\varphi_la_{ik} - \varphi_j\varphi_ka_{il} + \varphi_i\varphi_la_{jk} - \varphi_i\varphi_ka_{jl}) = \\ & = \Lambda_{li}g_{jk} + \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{kj}g_{il} - \Lambda_{ki}g_{jl}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\Lambda_{li} \stackrel{def}{=} \lambda_{li} + \alpha a_{li} + \rho\beta\varphi_i\varphi_l. \quad (20)$$

Сворачивая (20) с g^{jk} , получим

$$a\varphi_i\varphi_l - a_{il} = n\Lambda_{li} - \Lambda g_{il}, \quad (21)$$

где

$$a \stackrel{def}{=} a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \quad \Lambda \stackrel{def}{=} \Lambda_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$$

Или, выражая Λ_{li} —

$$\Lambda_{li} = \frac{\Lambda}{n}g_{li} + \frac{\beta a}{n}\varphi_i\varphi_l - \frac{\beta}{n}a_{il}. \quad (22)$$

Проальтернируем (19) по индексам i и k

$$\begin{aligned} & \beta(\varphi_j\varphi_la_{ik} - \varphi_j\varphi_ia_{lk} - \varphi_i\varphi_ka_{jl} + \varphi_l\varphi_ka_{ji}) = \\ & = \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{ij}g_{lk} - \Lambda_{ki}g_{jl} + \Lambda_{kl}g_{ji}. \end{aligned} \quad (23)$$

В последнем взаимно переобозначим индексы j и l :

$$\begin{aligned} & \beta(\varphi_l\varphi_ja_{ik} - \varphi_l\varphi_ia_{jk} - \varphi_i\varphi_ka_{jl} + \varphi_j\varphi_ka_{li}) = \\ & = \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{il}g_{jk} - \Lambda_{ki}g_{jl} + \Lambda_{kj}g_{li}. \end{aligned} \quad (24)$$

Складывая (24) и (19), будем иметь:

$$\beta(\varphi_j\varphi_la_{ik} - \varphi_i\varphi_ka_{jl}) = \Lambda_{lj}g_{ik} - \Lambda_{ik}g_{jl}. \quad (25)$$

С учетом (22), (25) можно записать в виде

$$\varphi_j\varphi_l(na_{ik} - ag_{ik}) - \varphi_i\varphi_k(na_{jl} - ag_{jl}) = a_{ik}g_{jl} - a_{lj}g_{ik}. \quad (26)$$

Свернем (26) с $\varphi^j \varphi^l$, учитывая (15), получим

$$(n-1)a_{ik} = (a-\rho)g_{ik} + (n\rho-a)\varphi_i \varphi_j. \quad (27)$$

Из (27) и (2) убедимся в справедливости теоремы, причем

$$u = \frac{\alpha\beta - 2\beta\rho + a\alpha - n\alpha\rho}{\beta(n-2)}, \quad (28)$$

$$v = \frac{a - n\rho}{\beta(n-1)(n-2)}. \quad (29)$$

Пространства, допускающие только канонические решения уравнений (5), имеют степень мобильности относительно геодезических отображений не больше двух. Поэтому можно сформулировать

Следствие 1 *Степень мобильности относительно геодезических отображений пространств квазипостоянной кривизны не более двух.*

4 О пространствах $V_n(B)$

Домножая (1) на φ^h и сворачивая по h , получим

$$\varphi_\alpha R_{ijk}^\alpha = (\alpha + \beta)(\varphi_j g_{ik} - \varphi_k g_{ij}). \quad (30)$$

Действуя аналогично на (12) и учитывая (30), будем иметь

$$\begin{aligned} &(\alpha + \beta)(\varphi_j a_{ik} - \varphi_\alpha a_i^\alpha g_{kj} + \varphi_i a_{jk} - \varphi_\alpha a_j^\alpha g_{ik}) = \\ &= \varphi^\alpha \lambda_{\alpha i} g_{jk} + \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j} g_{ik} - \lambda_{ki} \varphi_j - \lambda_{kj} \varphi_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Альтернируя по индексам k и j , взаимно переобозначая индексы i и k и складывая полученное с (31), убедимся в справедливости уравнений —

$$\varphi_j((\alpha + \beta)(a_{ik} - \rho g_{ik}) + \lambda_{ik}) = \varphi^\alpha \lambda_{\alpha j} g_{ik}. \quad (32)$$

Из последнего получим

$$\lambda_{ik} = (\varphi^\alpha \varphi^\beta \lambda_{\alpha\beta} + \rho(\alpha + \beta))g_{ik} - (\alpha + \beta)a_{ik}. \quad (33)$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 4 *Если псевдориманово пространство V_n квазипостоянной кривизны допускает нетривиальные геодезические отображения, то V_n является пространством $V_n(B)$, причем $B = -(\alpha + \beta)$.*

Учитывая (33) и замены (8), (9), можно записать

$$\bar{B}\bar{g}_{ij} - Bg_{ij} = \psi_{ij}. \quad (34)$$

Последняя формула дает возможность исследовать метрические тензоры псевдоримановых пространств $\bar{V}_n$, находящихся в геодезическом соответствии с пространством квазипостоянной кривизны.

Список литературы

1. Каган В. Ф. Субпроективные пространства. М.: Физматгиз, 1961. 220с.
2. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 255 с.
3. Киосак В. А., Микеш Й. О степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений// Геометрия погруженных многообразий. М., 1986. С. 35–39.
4. Mikes J., Kiosak V., Vanzurova A. Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection. Olomouc.:UP, 2008. 220p.
5. Lie Jian-cheng, Du Li. A note on the 2-harmonic submanifolds of quasi constant curvature spaces.// J. Northw. Norm. Univ. Natur. Sci. 2008. T. 44. №2. p. 18–21.
6. Kiosak V.A., Matveev V.S. Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics. - Journal of the London Mathematical Society 80(2009) №2, P. 341–356

В.А. Киосак

Придунайский филиал Межрегиональной Академии управления персоналом, Украина

E-mail: vkiosak@ukr.net

В. Киосак

Про геодезичні відображення просторів квазісталої кривини

Вивчається спеціальний випадок конформно-пласких просторів — простори квазісталої кривини. Отримано вигляд метрики простору, що знаходиться у геодезичній відповідності з простором квазісталої кривини.

Одержано 15.7.2011

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік № 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлетень ВАК України. 2010.
№ 4)

Наклад 300 примірників. Зам. № 319.

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,

вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net

website: <http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4>

надруковано з готового оригінал-макета

Видавництво і друкарня "Екологія"

65045, м. Одеса, вул. Базарна, 106, к. 313

Тел.: (0482) 33-07-18, 33-07-95, 37-15-27

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1873 від 20.07.2004р.

ISSN 2072-9812. ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.

2011. ТОМ 4. №4. 1-68