ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 4, No. 3, 2011

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

Праці міжнародного геометричного центру

Том.4, No. 3, 2011

Труды международного геометрического центра

Том.4, No. 3, 2011

Proceedings of the International Geometry Center

Vol. 4, No. 3, 2011

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Odessa
"Екологія"
2012

Зміст

Метрические дифференциальные инварианты на плоскости Лобачевского

Надежда Григорьевна Коновенко

Аннотация В этой статье мы описываем алгебру метрических дифференциальных инвариантов и рассматриваем метрическую эквивалентность функций на плоскости Лобачевского относительно группы изометрий.

Ключевые слова Плоскость Лобачевского, дифференциальные инварианты.

УДК 517.956.4

1 Введение.

В данной работе мы рассматриваем проблему эквивалентности функций на плоскости Лобачевского относительно группы изометрий. Эта задача является частью более общей задачи о классификации тензоров, заданных на плоскости Лобачевского относительно группы изометрий. Подход к решению этих задач, которые мы используем в данной работе может быть применен и для классификации тензоров, если воспользоваться [3].

В качестве модели для плоскости Лобачевского $\mathbb{L}_2$ мы вибираем верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$, снабженную метрикой

$$\Theta = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Структурной группой геометрии Лобачевского является группа сохраняющих ориентацию изометрий. Эта группа изоморфна проективной специальной линейной группе

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2,$$

а преобразования, входящие в эту группу, суть дробно-линейные преобразования вида:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d},$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Алгебра Ли инфинитезимальных изометрий плоскости $\mathbb{L}_2$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и порождена векторными полями:

$$A = \partial_x, \quad B = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \quad H = 2x\partial_x + 2y\partial_y,$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Отметим так же, что действие группы Ли $PSL_2(\mathbb{R})$ на плоскости Лобачевского $\mathbb{L}_2$ является симплектическим относительно 2-формы

$$\Omega = \frac{dx \wedge dy}{y^2}.$$

Мы говорим, что две гладкие функции f_1 и f_2, заданные в некоторой области плоскости Лобачевского, *метрически эквивалентны*, если найдется такой элемент $g \in PSL_2(\mathbb{R})$, что

$$f_2 = f_1 \circ g^{-1},$$

в области определения.

В качестве примера рассмотрим функции

$$f_1 = x^2 + y^2, \qquad f_2 = (x^2 + y^2)^{-1}.$$

Тогда эквивалентность реализуется элементом $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Проблему метрической эквивалентности функций на плоскости Лобачевского мы будем исследовать следующим образом:

1. Найдем условия метрической эквивалентности функций на формальном уровне (то есть на уровне ∞-джетов функций), а затем
2. Сводем задачу метрической эквивалентности к проблеме разрешимости системы дифференциальных уравнений конечного типа.

Данная схема применима к некоторому классу функций, которые мы называем *регулярными*. Отметим, что условия нерегулярности функций, т.е. условия ее сингулярности, означает, что данная функция удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению (3).

2 Алгебра дифференциальных инвариантов

Пусть $J^k(\mathbb{L}_2)$ - многообразие k-джетов функций, заданных на плоскости Лобачевского. Тогда каждая изометрия $g \in PSL_2(\mathbb{R})$ продолжается до диффеоморфизма

$$g^{(k)} : J^k(\mathbb{L}_2) \to J^k(\mathbb{L}_2)$$

пространства k-джетов [4].

Аналогично, каждая инфинитезимальная изометрия $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ продолжается до векторного поля $X^{(k)}$ на многообразии k-джетов.

Так например, вторые продолжения векторных полей A, B, H выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
A^{(2)} &= \partial_x, \\
B^{(2)} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y - (2xu_x + 2yu_y)\partial_{u_x} + \\
&+ (2yu_x - 2xu_y)\partial_{u_y} - (2u_x + 4yu_{xy} + 4xu_{xx})\partial_{u_{xx}} - \\
&- (2u_y + 4xu_{xy} - 2yu_{xx} + 2yu_{yy})\partial_{u_{xy}} + \\
&+ (2u_x - 4xu_{yy} + 4yu_{xy})\partial_{u_{yy}}, \\
H^{(2)} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y - 2u_x\partial_{u_x} - 2u_y\partial_{u_y} - \\
&- 4u_{xx}\partial_{u_{xx}} - 4u_{xy}\partial_{u_{xy}} - 4u_{yy}\partial_{u_{yy}},
\end{aligned} \tag{1}$$

где x, y - координаты на плоскости Лобачевского,
u, u_x, $u_y, \ldots$ - стандартные координаты в расслоении k-джетов.

Гладкую функцию I, заданную на многообразии $J^k(\mathbb{L}_2)$, мы называем метрическим дифференциальным инвариантом порядка $\leq k$, если

$$I = I \circ g^{(k)}, \tag{2}$$

для всех изометрий $g \in PSL_2(\mathbb{R})$.

Поскольку группа $PSL_2(\mathbb{R})$ связна, то (2) эквивалентна системе дифференциальных уравнений на функцию I:

$$A^{(k)}(I) = B^{(k)}(I) = H^{(k)}(I) = 0.$$

Оператор полной производной

$$\nabla = a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy},$$

где $a, b \in C^\infty(J^\infty(\mathbb{L}_2))$ - гладкие функции на пространстве джетов, а $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ - полные производные относительно x и y, мы называем инвариантным метрическим дифференцированием, если ∇ коммутирует с продолженным действием группы изометрий, или, что эквивалентно,

$$[\nabla, A^{(\infty)}] = [\nabla, B^{(\infty)}] = [\nabla, H^{(\infty)}] = 0.$$

Пусть $(x, y, u, u_1, \ldots, u_\sigma, \ldots)$ - канонические координаты в пространстве джетов. Наличие $PSL_2(\mathbb{R})$-инвариантной метрики и инвариантной симплектической структуры позволяет построить по каждому метрическому дифференциальному инварианту I два инвариантных дифференцирования [1].

$$\nabla_I = y^2\left(\frac{dI}{dx}\frac{d}{dx} + \frac{dI}{dy}\frac{d}{dy}\right),$$

$$\gamma_I = y^2\left(\frac{dI}{dy}\frac{d}{dx} - \frac{dI}{dx}\frac{d}{dy}\right).$$

Дифференцирование ∇_I отвечает градиенту I относительно метрики Θ.

Дифференцирование γ_I соответствует гамильтонову полю с гамильтонианом I относительно инвариантной симплектической формы Ω.

Наличие таких дифференцирований позволяет определить следующую скобку между двумя дифференциальными инвариантами.

$$[I, J] = \gamma_I(J),$$

где I и J метрические дифференциальные инварианты.

Отметим, что скобка $[I, J]$ является метрическим дифференциальным инвариантом. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1 *Алгебра метрических дифференциальных инвариантов на плоскости Лобачевского является пуассоновой алгеброй относительно скобки:*

$$[I, J] = y^2\left(\frac{dI}{dy}\frac{dJ}{dx} - \frac{dJ}{dy}\frac{dI}{dx}\right),$$

то есть удовлетворяет следующим свойствам:

1) $[I, J]$ - *дифференциальный инвариант, всякий раз, как* I *и* J *дифференциальные инварианты.*

2) *скобка кососимметрична;*

3) *скобка* $\mathbb{R}$*-билинейна;*

4) *скобка является дифференцированием по каждому аргументу;*

5) *скобка удовлетворяет тождеству Якоби.*

Координатная функция

$$u : J^0(\mathbb{L}_2) = \mathbb{L}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

является метрическим дифференциальным инвариантом порядка нуль.

Эта функция порождает два инвариантных дифференцирования:

$$\nabla_u = y^2\left(u_x \frac{d}{dx} + u_y \frac{d}{dy}\right)$$

и

$$\gamma_u = y^2\left(u_y \frac{d}{dx} - u_x \frac{d}{dy}\right).$$

Применяя их к функции u, мы видим, что метрический дифференциальный инвариант первого порядка имеет вид:

$$J_1 = \nabla_u(u) = y^2\left(u_x^2 + u_y^2\right).$$

Несложно проверить, что метрические дифференциальные инварианты

$$J_0 = u, \qquad J_1 = \nabla_u(u)$$

порождают дифференциальные инварианты порядка ≤ 1.

Аналогично, применяя к инварианту J_1 эти дифференцирования, мы получаем метрические дифференциальные инварианты 2-го порядка:

$$J_2(1) = \gamma_u(J_1), J_2(2) = \nabla_u(J_1),$$

$$J_2(1) = 2y^4(2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy}) + 2y^3(u_y u_x^2 + u_y^3),$$
$$J_2(2) = 2y^4(u_x u_y u_{xx} + u_y^2 u_{xy} + u_x^2 u_{xy} - u_x u_y u_{yy}) - 2y^3 u_x(u_x^2 + u_y^2).$$

Дифференциальный инвариант $J_2(1)$ равен скалярному произведению между градиентом функции u и J_1. Инвариант J_1 в свою очередь, равен квадрату градиента функции u, а инвариант $J_2(2)$ совпадает со скобкой Пуассона между u и J_1.

Несложно проверить, что размерности орбит общего положения группы изометрий пространства 2-джетов равна 3, а размерность пространства 2-джетов равна 8, поэтому для размености регулярных орбит должны существовать 5 независимых дифференциальных инвариантов, порядка ≤ 2. Найденные инваринаты

$$J_0, \quad J_1, \quad J_2(1), \quad J_2(2)$$

функционально независимы и чтобы найти недостающий инвариант, мы воспользуемся следующим наблюдением.

На плоскости Лобачевского оператор Лапласа

$$\Delta = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$$

инвариантен относительно группы изометрий $PSL_2(\mathbb{R})$, поэтому дифференциальный оператор в полных производных:

$$\widehat{\Delta} = -y^2\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$$

коммутирует с продолженным действием группы изометрий.

Следовательно, $\widehat{\Delta}(I)$ является дифференциальным инвариантом всякий раз, когда I является дифференциальным инвариантом.

Это означает, что мы можем применять его к дифференциальным инвариантам и получать следующие дифференцильные инварианты.

Применяя оператор $\widehat{\Delta}(I)$ к J_0 мы находим дифференциальный инвариант второго порядка

$$J_2(3) = \widehat{\Delta}(u) = -y^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

Прямой подсчет показывает, что найденные дифференциальные инварианты

$$J_0, \quad J_1, \quad J_2(1), \quad J_2(2), \quad J_2(3)$$

порождают все дифференциальные инварианты до второго порядка включительно. Несложный подсчет размерностей показывает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2 *1. Алгебра метрических дифференциальных инвариантов на плоскости Лобачевского порождена базисными инвариантами*

$$J_0 = u$$

и

$$J_2(3) = -y^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

а также всеми их инвариантными производными вдоль ∇_u *и* γ_u.

2. Дифференциальные сизигии в этой алгебре порождены следующими соотношениями:

$$\nabla_u(J_2(1)) - \gamma_u(J_2(2)) = J_2(1)J_2(3)$$

и

$$\gamma_u(J_2(1)) + \nabla_u(J_2(2)) + 2J_1\nabla_u(J_2(3)) =$$
$$= 3J_2(2)J_2(3) + 2J_1J_2^2(3) + 2J_1^{-1}\left(J_2^2(2) + J_2^2(1)\right) - 2J_1^2.$$

3 Метрическая эквивалентность функций

Гладкую функцию $f \in C^{\infty}(\mathbb{L}_2)$, заданную в некоторой области плоскости Лобачевского, мы называем *регулярной*, если значения $J_0(f)$, $J_1(f)$ дифференциальных инвариантов J_0 и J_1 на этой функции независимы:

$$dJ_0(f) \wedge dJ_1(f) \neq 0$$

в этой области.

В противном случае, то есть, если $dJ_0(f) \wedge dJ_1(f) \equiv 0$, функция f называется *сингулярной*.

Иначе говоря, функция f - сингулярна, если она является решением дифференциального уравнения

$$f_x^2 + f_y^2 = y^{-2}\varphi(f),$$

для некоторой функции φ.

Исключая функцию φ, получаем следующее уравнение

$$f_x\big(f_x^2 + f_y^2\big) - y f_x f_y \big(f_{yy} - f_{xx}\big) - y f_{xy}\big(f_y^2 - f_x^2\big) = 0. \tag{3}$$

Предположим, что функция f регулярна, тогда значения инвариантов J_0 и J_1 на f являются независимыми функциями, поэтому значения иинвариантов $J_2(1)$, $J_2(2)$, $J_2(3)$ являются функциями от J_0 и J_1. Иными словами, функция f удовлетворяет системе дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned} J_2(1) &= 2a(J_0, J_1)J_1^2, \\ J_2(2) &= 2b(J_0, J_1)J_1^2, \\ J_2(3) &= c(J_0, J_1)J_1^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Представив функцию $c\big(J_0, J_1\big)$ в виде $c\big(y, J_0, J_1\big) J_1^2 y^{-2}$ и выразив вторые производные u из этой системы уравнений, мы приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{xx} &= cy^2{u_y}^2({u_y}^2 + {u_x}^2) + b({u_x}^2 - {u_y}^2) + au_x u_y + \frac{u_y}{y}, \\ u_{xy} &= -cy^2 u_x u_y({u_x}^2 + {u_y}^2) - \frac{a}{2}({u_x}^2 - {u_y}^2) + 2bu_x u_y - \frac{u_x}{y}, \\ u_{yy} &= cy^2{u_x}^2({u_x}^2 + {u_y}^2) - b({u_x}^2 - u_y 2) - au_x u_y - \frac{u_y}{y}, \end{aligned} \tag{5}$$

Соотношения сизигии в теореме 2 дают условия формальной интегрируемости этой системы, а поскольку данная система имеет конечный тип, то выполнение условий сизигии обеспечивает интегрируемость системы (5).

Размерность пространства решений не превосходит 3, а при выполнении условий интегрируемости (сизигий) эта размерность равна 3.

Очевидно, что группа изометрии являются симметриями системы (4). Более того, для регулярных функции f действие группы изометрий на пространстве локальных решений эффективно и транзитивно, поэтому в этом случае любые два локальных решения переводятся друг в друга изометрией. Суммируя сказанное, мы приходим к следующему результату.

Теорема 3 *1. Класс $PSL_2(\mathbb{R})$-эквивалентности ростков регулярных функций на плоскости Лобачевского определяется функциями a, b, c, задающими зависимость метрических инвариантов 2-го порядка $J_2(1)$, $J_2(2)$, $J_2(3)$ через инварианты J_0, J_1.*

2. Функции a, b, c, задающие класс метрической эквивалентности, не произвольны, а удовлетворяют двум сизигиям, выполнение которых гарантирует, что система дифференциальных уравнений (4) находится в инволюции.

Список литературы

1. Н. Г. Коновенко, В. В. Лычагин. Алгебры дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера // Доповіді НАН України, №1, 2010 13–17.
2. Н. Г. Коновенко, В. В. Лычагин. О метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки., Т. 151, кн. 4, 2009, 54–60.
3. Н. Г. Коновенко. Локальная классификация геометрических величин на плоскости Лобачевского // Фундаментальная и прикладная математика, МГУ, 2010, (В печати).
4. И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, А. В. Виноградов. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений // Москва, Наука., 1986.

Надежда Григорьевна Коновенко

ОНАПТ, Одесса, Украина

E-mail: konovenko@ukr.net

Nadiia G. Konovenko

The metric differential invariants on the Lobachevski plane

In this paper we investigate the algebra of metric differential invariants and we describe metric equivalence of functions on the Lobachevski plane with respect to the isometry group.

О слабо конциркулярно симметрических псевдоримановых пространствах

В.А. Киосак **Е.Е. Чепурная**

Аннотация Введены в рассмотрение A–слабо симметрические пространства — специальные псевдоримановы пространства, обобщающие симметрические и рекуррентные псевдоримановы пространства. Рассмотрены пространства, в которых свойством слабой симметричности обладает тензор конциркулярной кривизны. Получена их алгебраическая классификация и изучены некоторые геометрические свойства

Ключевые слова Псевдоримановы пространства, слабо симметрические пространства, тензор конциркулярной кривизны

УДК 514.765.1+512.813.4

1 Введение

В теории специальных псевдоримановых пространств особое место занимают симметрические и рекуррентные пространства. Обобщение этих пространств шло в основном в двух направлениях: увеличение порядка ковариантных производных и рассмотрением в качестве симметрических (рекуррентных) других тензоров [1]. В работах [2], [3], [4], [6] естественным образом возник новый тип рекуррентности — слабая симметричность. В данной статье изучаются псевдоримановы пространства, в которых свойством слабой симметрии обладает тензор конциркулярной кривизны [7].

2 Алгебраические свойства

Рассмотрим специальные псевдоримановы пространства.

Определение 1 *Псевдориманово пространство V_n, в котором существует тензор $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ такой, что*

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k, j} = {}_1\tau_j A_{i_1 i_2 \dots i_k} + {}_2\tau_{i_1} A_{j i_2 \dots i_k} + {}_3\tau_{i_2} A_{i_1 j i_3 \dots i_k} + \dots + {}_{k+1}\tau_{i_k} A_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} j} \tag{1}$$

называют A–слабо симметрическим.

Здесь ${}_\alpha\tau_i$ — некоторые векторы, запятая ", " знак ковариантной производной по связности V_n.

Если условию (1) удовлетворяет тензор Римана, то пространство называют слабо симметрическим, а если условиям (1) удовлетворяет тензор конциркулярноцй кривизны Y_{hijk}, заданный формулой

$$Y^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)} (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}), \tag{2}$$

то (1) имеет вид

$$Y_{hijk,m} = a_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + c_i Y_{hmjk} + d_j Y_{himk} + f_k Y_{hijm}, \tag{3}$$

(где R^h_{ijk} — тензор Римана V_n, $Y_{hijk} = g_{\alpha h} Y^\alpha_{ijk}$, R — скалярная кривизна, δ^h_i — символы Кронекера, g_{ij} — метрический тензор V_n, a_i, b_i, c_i, d_i, f_i — некоторые векторы) и пространство называют конциркулярно слабо симметрическим.

Альтернируя последнее по индексам h и i, учитывая алгебраические свойства тензора Y_{hijk}, получим

$$\tau_h Y_{lijk} + \tau_i Y_{lhjk} = 0, \tag{4}$$

где $\tau_h def{=} b_n - c_n$;

Предположим, что $\tau_h \neq 0$, тогда можно подобрать вектор ζ^h такой, что $\tau_\alpha \zeta^\alpha = 1$. Домножая (4) на ζ^h и сворачивая по индексу h, будем иметь

$$Y_{lijk} + \tau_i \zeta^\alpha Y_{l\alpha jk} = 0. \tag{5}$$

Еще раз домножая и сворачивая с ζ^l, убедимся, что

$$\zeta^\alpha Y_{\alpha ijk} = 0 \tag{6}$$

и тогда из (5) следует $Y_{hijk} = 0$, а это приводит к пространствам постоянной кривизны. Следовательно, $\tau_i = 0$ и, значит, $b_n = c_n$.

Аналогично покажем, что $d_n = f_n$.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1 *В слабо конциркулярно симметрических пространствах, отличных от пространств постоянной кривизны, выполняются условия*

$$Y_{hijk\ ,\,m} = a_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + b_i Y_{hmjk} + d_j Y_{himk} + d_k Y_{hijm}. \tag{7}$$

Определение 2 *Говорят, что псевдориманово пространство V_n допускает векторную оболочку относительно тензора A_{ijkl}, если в нем существует векторное поле τ_h такое, что*

$$\tau_h A_{ijkl} + \tau_i A_{jhkl} + \tau_j A_{hikl} = 0. \tag{8}$$

Если тензор удовлетворяет A_{ijkl} алгебраическим условиям

$$A_{ijkl} + A_{jikl} = 0 \tag{9}$$

$$A_{ijkl} - A_{klij} = 0 \tag{10}$$

$$A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} = 0, \tag{11}$$

то в V_n существует не более двух линейно независимых ненулевых векторных поля, удовлетворяющих (8).

Для доказательства этого факта воспользуемся методикой, предложенной В. Кайгородовым [1].

Предположим, что число линейно независимых векторов $(\alpha)\tau$, удовлетворяющих (13), равно трем и, выбирая систему координат таким образом, чтобы линейно независимые векторы $(^\alpha)\tau^i(\alpha = 1, 2, 3)$ имели вид $(^\alpha)\tau_i = \delta_i^\alpha$ из (13), учитывая (9), (10), (11), получим, что $A_{hijk} = 0$. Если же $\alpha \leq 2$, то система уравнений (13) допускает нетривиальные решения.

Таким образом, доказана теорема

Теорема 2 *Максимальное число линейно независимых веторов среди векторов, входящих в векторную оболочку ненулевого тензора A_{ijkl}, не превышает двух.*

Заметим, что тензор конциркулярной кривизны удовлетворяет условиям (9), (10), (11). Проциклировав (7) по индексам i, j, k убедимся, что в псевдоримановом пространстве V_n выполняются условия:

$$(b_i - d_i)Y_{hmjk} + (b_j - d_j)Y_{hmki} + (b_k - d_k)Y_{hmij} = 0.$$

Таким образом, возможны три типа конциркулярно слабо симметричных пространств:

I тип: $b_i = d_i$ и

$$Y_{hijk\,,\,m} = a_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + b_i Y_{hmjk} + b_j Y_{himk} + b_k Y_{hijm}$$

II тип: $b_i \neq d_i$ и в V_n существует одна векторная оболочка относительно тензора Y_{hijk}, задаваемая вектором $(b_i - d_i)$

III тип: $b_i \neq d_i$ и в V_n существует еще одна векторная оболочка относительно тензора Y_{hijk}, задаваемая вектором не коллинеарным вектору $(b_i - d_i)$.

3 Пространства постоянной скалярной кривизны

Уравнение

$$R_{hijk\,,\,l} + R_{hikl\,,\,j} + R_{hilj\,,\,k} = 0 \tag{12}$$

называется дифференциальным уравнением Бианки [5].

Докажем теорему:

Теорема 3 *В псевдоримановом пространстве $V_n (n > 2)$ тензор Y_{hijk} удовлетворяет тождествам типа Бианки тогда и только тогда, когда $R = const$.*

Доказательство Пусть $R = const$, тогда, дифференцируя (2), получим

$$Y_{hijk\,,\,l} = R_{hijk\,,\,l} \tag{13}$$

и, следовательно, Y_{hijk} удовлетворяет условиям

$$Y_{hijk\,,\,l} + Y_{hikl\,,\,j} + Y_{hilj\,,\,k} = 0 \tag{14}$$

Наоборот, пусть выполняются (14), тогда с учетом (2) и (12), будем иметь

$$R_{,\,l}(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + R_{,\,j}(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il}) + R_{,\,k}(g_{hj}g_{il} - g_{hl}g_{ij}) = 0.$$

Если свернуть с g^{hk}, получим

$$R_{,\,l}g_{ij} - R_{,\,j}g_{il} = 0. \tag{15}$$

И, наконец, свернув последнее с g^{ij}, убедимся, что $R_{,\,l} = 0$.

Что и требовалось доказать.

Если $R = const$, то циклируя (7) по индексам j, k, m и h, i, m, получим соответственно:

$$(a_m - 2d_m)Y_{hijk} + (a_i - 2d_i)Y_{hikm} + (a_k - 2d_k)Y_{himj} = 0 \tag{16}$$

$$(a_m - 2b_m)Y_{hijk} + (a_h - 2b_h)Y_{imjk} + (a_i - 2b_i)Y_{mhjk} = 0. \tag{17}$$

Следовательно, при $R = const$ конциркулярно слабо симметрические пространства могут быть

I типа: *a)* $a_i = 2b_i \quad \Rightarrow$

$$Y_{hijk\,,\,m} = 2b_mY_{hijk} + b_hY_{mijk} + b_iY_{hmjk} + b_jY_{himk} + b_kY_{hijm}$$

b) $a_i \neq 2b_i$

и в V_n существует одна векторная оболочка относительно тензора Y_{hijk}, образованная вектором $(a_i - 2b_i)$

II типа:

Если оба вектора $(a_i - 2d_i)$ и $(a_i - 2b_i)$ равны нулю, то это противоречит тому, что $d_i \neq b_i$. То есть среди векторов $(a_i - 2d_i)$ и $(a_i - 2b_i)$ хотя бы один не нулевой.

Пусть $(a_i - 2b_i) = 0$, а $(a_i - 2d_i) \neq 0$, тогда возможны два случая:

a) $(a_i = 2b_i)$ и $d_i - b_i = \alpha(a_i - 2d_i)$; (где α — коэффициент пропорциональности), а, значит,

$$Y_{hijk\,,\,m} = 2b_m Y_{hijk} + b_h Y_{mijk} + b_i Y_{hmjk} + d_j Y_{himk} + d_k Y_{hijm}$$

и α — по необходимости равно $\frac{1}{2}$.

Если $(a_i = 2b_i)$ и $d_i - b_i \neq \mu(a_i - 2d_i)$, тогда два линейно независимых вектора принадлежат векторной оболочке относительно тензора Y_{hijk} и пространство принадлежит к III типу.

Пусть оба вектора $(a_i - 2b_i)$ и $(a_i - 2d_i)$ ненулевые, тогда в зависимости от того, линейно зависимы или независимы векторы тройки $(d_i - b_i)$, $(a_i - 2b_i)$, $(a_i - 2d_i)$, получим:

b) Тройка линейно зависимых векторов:

в векторную оболочку тензора Y_{hijk} входит один вектор.

Среди пространств, принадлежащих к III типу, выделим, исходя из изложенного выше, следующие типы:

a) $(d_i - b_i)$, $(a_i - 2b_i)$ отличны от нуля и линейно независимы, $(a_i - 2d_i)$ отличен от нуля, линейно зависимый от них, либо нулевой

b) $(d_i - b_i)$, $(a_i - 2d_i)$ отличны от нуля и линейно независимы, $(a_i - 2b_i)$ отличен от нуля, линейно зависимый от них, либо нулевой.

Таким образом, нами рассмотрены все возможные случаи и полностью описаны характеристики слабо конциркулярных псевдоримановых пространств, которые вытекают из алгебраических свойств тензора конциркулярной кривизны и из дифференциальных тождеств Бианки.

Список литературы

1. Кайгородов В. Р. Структура кривизны пространства-времени//Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии. - М.: ВИНИТИ, 1983. - 14. - С. 177-204
2. Киосак В. А. Об эквидистантных римановых пространствах//Геометрия обобщенных пространств. - Пенза, 1992. – С. 60-65
3. Кіосак В. А. Про еквідістантні псевдоріманові простори. Математичні студії, Львів, 36, №1, 2011. – С. 21-25
4. Кіосак В. А. Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів. Математичні методи та фізико-механічні поля, 54, №2, 2011. – С. 17-22
5. Eisenhart L. P. Riemannian geometry. - Princeton Univ. Press, 1926 (Пер. на рус. яз.: Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. - М.: ИИЛ, 1948)
6. Kiosak V.A., Matveev V.S. Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics. - Journal of the London Mathematical Society 80(2009) №2, P. 341–356

7. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces. - Oxford: Pergamon Press, 1965. – 326 p.

В.А. Киосак

Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина
E-mail: vkiosak@ukr.net

Е.Е. Чепурная

Одесский государственный экономический университет, Одесса, Украина
E-mail: kulechova@ukr.net

V. Kiosak & **E. Chepurna**

On the weakly concircularly symmetrical pseudo-Riemannian spaces

We introduce A - weakly concircularly symmetrical spaces - special pseudo-Riemannian spaces, that generalize symmetrical and recurrent pseudo-Riemannian spaces. We treat spaces where tensor of concircular curvature has a property of weak symmetry. We have obtained their algebraic classification and studied some their properties.

Симметрии дифференциальных инвариантов семейства поверхностей $\varphi : R^3 \to R$

Кузаконь В. М. **Федченко Ю. С.**

Аннотация Изучается расслоение $\varphi : R^3 \to R$ евклидовых пространств, которое относительно псевдогруппы евклидовых движений R^3 и перепараметризаций R имеет четыре дифференциальных инварианта второго порядка. Для двух из них получена полная система уравнений Ли и найдены контактные симметрии специального вида.

Ключевые слова Группы преобразований · дифференциальные инварианты · расслоения ·

УДК 514.76

Введение

В работе [1] найден базис дифференциальных инвариантов второго порядка для субмерсии $\varphi : R^n \to R$ относительно псевдогруппы Ли G порожденной движениями евклидова пространства R^n и диффеоморфизмами прямой R. Базис алгебры Ли этой псевдогруппы состоит из следующих векторных полей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n} - & \text{параллельные переносы,} \\ x_i \dfrac{\partial}{\partial x_j} - x_j \dfrac{\partial}{\partial x_i} - & \text{повороты в плоскости } (\mathrm{x}_i, x_j), \\ h(u)\dfrac{\partial}{\partial u}, \quad h(u) \in C^\infty(R) - & \text{перепараметризация,} \end{cases}$$

В этой работе мы изучаем алгебру Ли контактных симметрий дифференциальных инвариантов вычисленных в [1] для $n = 3$. Для субмерсии $\varphi : R^3 \to R$ мы приводим полные системы уравнений Ли для двух базисных инвариантов из четырех. Получаем для них полное описание алгебры точечных симметрий и контактных симметрий сцециального вида. Отметим, что полная контактная группа симметрий, рассматриваемых инвариантов шире используемой вначале псевдогруппы евклидовых движений и перепараметризаций. Однако, если мы ограничимся только точечными симметриями, то псевдогруппа симметрий каждого дифференциального инварианта совпадает с исходной псевдогруппой. В этом смысле каждый в отдельности дифференциальный инвариант определяет евклидову геометрию.

1. Дифференциальные инварианты субмерсии $\varphi : R^3 \to R$

При $n = 3$ (см. [2]) субмерсии $\varphi : R^3 \to R$ определяют семейства поверхностей. В рассматриваемом случае базис в пространстве инвариантов второго порядка образуют следующие инварианты:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -H = \frac{D}{B^{3/2}}, \quad I_2 = H^2 - \frac{AD - BC}{B^2}, \\
I_4 &= K = \frac{F}{B^2}, \quad I_3 = HK - \frac{AF - BE}{B^{5/2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A = \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}, \quad B = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2, \\
&C = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{13} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \\
&D = -\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} & \varphi_1 \\ \varphi_{13} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_2 \\ \varphi_{23} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix}, \\
&E = -\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_2 \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Отметим, что инварианты I_1 и I_4 вычисляют соответственно среднюю и гауссову кривизны поверхности, проходящей через данную точку. Разность $I_4 - I_2$ равна квадрату кривизны ортогональной траектории семейства поверхностей. Изучим алгебру Ли контактных симметрий дифференциальных инвариантов I_1 и I_4.

2. Контактные симметрии средней кривизны поверхности

Для нахождения алгебры Ли контактных симметрий мы используем подход предложенный в [3]. Преобразуем I_1 к виду

$$I_1 = \frac{(\varphi_2^2+\varphi_3^2)\varphi_{11}+(\varphi_1^2+\varphi_3^2)\varphi_{22}+(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi_{33}-2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)^{3/2}} -$$

$$\frac{-2\varphi_{13}\varphi_1\varphi_3-2\varphi_{23}\varphi_2\varphi_3}{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)^{3/2}}.$$

Рассмотрим расслоение струй первого порядка $J^1(R^3,R)$ координаты в котором $(x_1,x_2,x_3,u,P_1,P_2,P_3)$, где $P_1=\varphi_1,\ P_2=\varphi_2,\ P_3=\varphi_3$.

Шестимерное распределение Картана определяется здесь как аннулятор 1-формы ω_0, имеющей вид

$$\omega_0 = du - P_1dx_1 - P_2dx_2 - P_3dx_3$$

Запишем эффективную 3-форму, соответствующую инварианту I_1.

$$\omega_1 = -\tfrac{1}{(P_1^2+P_2^2+P_3)^2}\times$$
$$\times[(P_2^2+P_3^2)dP_1\wedge dx_2\wedge dx_3+(P_1^2+P_2^2)dx_1\wedge dP_2\wedge dx_3+(P_1^2+P_2^2)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3+$$
$$+\mathrm{P}_1P_2(dP_1\wedge dx_1-dP_2\wedge dx_2)\wedge dx_3+P_1P_3(dP_3\wedge dx_3-dP_1\wedge dx_1)\wedge dx_2+$$
$$+\mathrm{P}_2P_3(dP_2\wedge dx_2-dP_3\wedge dx_3)\wedge dx_1].$$

Будем искать контактные симметрии формы ω_1. Рассмотрим производящую функцию $f(x_1,x_2,x_3,u,P_1,P_2,P_3)$ и сопоставим ей контактное поле

$$X_f = -\frac{\partial f}{\partial P_1}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial P_2}\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial P_3}\frac{\partial}{\partial x_3}+\left(f-\sum_{i=1}^{3}P_i\frac{\partial f}{\partial P_i}\right)\frac{\partial}{\partial u}+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+P_i\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial P_i}.$$

Вычислим производную Ли $L_{X_f}(\omega_1)=L_f(\omega_1)$ и рассмотрим ее проекцию ρ на картановскую плоскость

$$\begin{cases}\rho(dx_i)=dx_i,\\ \rho(dP_i)=dP_i, \quad i=1,2,3.\\ \rho(du)=P_1dx_1+P_2dx_2+P_3dx_3.\end{cases}$$

Из условия $L_f(\omega_1)=0$ получим систему уравнений Ли для инварианта I_1 :

$$(P_1^2+P_3^2)f_{P_1P_3}+P_1P_2f_{P_2P_3}+P_2P_3f_{P_1P_2}-P_1P_3f_{P_2P_1}=0,$$

$$(P_1^2+P_2^2)f_{P_1P_2}+P_1P_3f_{P_2P_3}+P_2P_3f_{P_1P_3}-P_1P_2f_{P_3P_3}=0,$$

$$(P_1^2+P_3^2)f_{P_3P_3}+(P_1^2+P_2^2)f_{P_2P_2}+2P_2P_3f_{P_2P_3}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)f_{P_2P_3}+P_1P_2f_{P_1P_3}+P_1P_3f_{P_1P_2}-P_2P_3f_{P_1P_1}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)f_{P_3P_3}+(P_1^2+P_2^2)f_{P_1P_1}+2P_1P_3f_{P_1P_3}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)f_{P_2P_2}+(P_1^2+P_3^2)f_{P_1P_1}+2P_1P_2f_{P_1P_2}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)f_{x_1x_1}+(P_2^2+P_3^2)f_{x_2x_2}+(P_1^2+P_2^2)f_{x_3x_3}-$$

$$-2P_1P_2f_{x_1x_2}-2P_1P_3f_{x_1x_3}-2P_2P_3f_{x_2x_3}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)f_{x_1P_3}+(P_1^2+P_2^2)f_{x_3P_1}-P_1P_2f_{x_2P_3}-P_2P_3f_{x_2P_1}+$$

$$+P_1P_3f_{x_2P_2}+P_1P_3f_{P_3u}+P_1^2P_3f_{P_1u}+P_1P_2P_3f_{P_2u}-$$

$$-\frac{P_3(P_3^2+P_2^2-2P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-\frac{P_1(P_1^2+P_2^2-2P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}+\frac{3P_1P_2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}=0,$$

$$(P_1^2+P_3^2)f_{x_2P_3}+(P_1^2+P_2^2)f_{x_3P_2}-P_1P_2f_{x_1P_3}-P_1P_3f_{x_1P_2}+P_2P_3f_{x_1P_1}+$$

$$+P_2P_3f_{P_3u}+P_2^2P_3f_{P_2u}+P_1P_2P_3f_{x_1u}-\frac{P_3(P_3^2+P_2^2-2P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-$$

$$-\frac{P_2(P_1^2+P_2^2-2P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}+\frac{3P_1P_2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)f_{x_1P_2}+(P_1^2+P_3^2)f_{x_2P_1}-P_1P_3f_{x_3P_2}-P_2P_3f_{x_3P_1}+$$

$$+P_1P_2f_{x_3P_3}+P_1P_2^2f_{P_2u}+P_1P_2P_3f_{P_3u}-$$

$$-\frac{P_2(P_2^2+P_3^2-2P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-\frac{P_1(P_1^2+P_3^2-2P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}+\frac{3P_1P_2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}=0,$$

$$(P_1^2+P_3^2)(f_{x_2P_2}-f_{x_1P_1}-f_{x_3P_1}-P_1f_{P_1u}-P_2f_{P_2u}-P_3f_{P_3u})-$$

$$-2P_1P_2f_{x_1P_2}-2P_2P_3f_{x_3P_3}-\frac{P_1(P_1^2+P_3^2-2P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-\frac{P_3(P_1^2+P_3^2-2P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-$$

$$-\frac{3P_2(P_1^2+P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}=0,$$

$$(P_1^2+P_2^2)(f_{x_3P_3}-f_{x_1P_1}-f_{x_2P_2}-P_1f_{P_1u}-P_2f_{P_2u}-P_3f_{P_3u})-2P_1P_3f_{x_1P_3}-$$

$$-2P_2P_3f_{x_3P_3}-\frac{P_1(P_1^2+P_2^2-2P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-\frac{P_2(P_2^2+P_1^2-2P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-$$

$$-\frac{3P_2(P_1^2+P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}=0,$$

$$(P_2^2+P_3^2)(f_{x_1P_1}-f_{x_2P_2}-f_{x_3P_3}-P_1f_{P_1u}-P_2f_{P_2u}-P_3f_{P_3u})-2P_1P_2f_{x_2P_1}-$$

$$-2P_1P_3f_{x_1P_1}-\frac{P_2(P_2^2+P_3^2-2P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-\frac{P_3(P_2^2+P_3^2-2P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-$$

$$-\frac{3P_1(P_2^2+P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}=0.$$

$$(*)$$

Справедлива теорема

Теорема 1.

(1) Производящие функции контактных симметрий инварианта I_1 являются решением системы уравнений $(*)$.

(2) Точечные симметрии инварианта I_1 совпадают с преобразованиями из псевдогруппы G.

3. Контактные симметрии гауссовой кривизны

Рассмотрим инвариант I_4.

Преобразуем его к виду:

$$I_4=\frac{1}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}\left[\varphi_1^2\begin{vmatrix}\varphi_{22}&\varphi_{23}\\\varphi_{23}&\varphi_{33}\end{vmatrix}+\varphi_2^2\begin{vmatrix}\varphi_{11}&\varphi_{13}\\\varphi_{13}&\varphi_{33}\end{vmatrix}+\varphi_3^2\begin{vmatrix}\varphi_{11}&\varphi_{12}\\\varphi_{12}&\varphi_{22}\end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-2\varphi_1\varphi_2\begin{vmatrix}\varphi_{12}&\varphi_{23}\\\varphi_{13}&\varphi_{33}\end{vmatrix}+2\varphi_1\varphi_3\begin{vmatrix}\varphi_{12}&\varphi_{22}\\\varphi_{13}&\varphi_{23}\end{vmatrix}-2\varphi_3\varphi_3\begin{vmatrix}\varphi_{11}&\varphi_{12}\\\varphi_{13}&\varphi_{23}\end{vmatrix}\right].$$

Запишем эффективную 3-форму, соответствующую инварианту I_4 :

$$\omega_4=(P_1^2+P_2^2+P_3^2)^2\cdot\Big[P_1^2dx_1\wedge dP_2\wedge dP_3+P_2^2dP_1\wedge dx_2\wedge dP_3+$$

$$+P_3^2dP_1\wedge dP_2\wedge dx_3+P_1P_2(dP_1\wedge dx_1-dP_2\wedge dx_2)\wedge dP_3+$$

$$+P_1P_3(dP_3 \wedge dx_3 - dP_1 \wedge dx_1) \wedge dP_2 + P_2P_3(dP_2 \wedge dx_2 - dP_3 \wedge dx_3) \wedge dP_1] \,.$$

Аналогично, как и для I_1, получим следующую систему уравнений Ли для инварианта I_4 :

$$P_1P_2f_{x_2x_3} + P_2P_3f_{x_1x_2} - P_1P_3f_{x_2x_3} - P_2^2f_{x_1x_3} = 0,$$

$$P_1P_2f_{x_1x_3} + P_1P_3f_{x_1x_2} - P_2P_3f_{x_1x_1} - P_1^2f_{x_2x_3} = 0,$$

$$P_1^2f_{x_2x_2} + P_2^2f_{x_1x_1} - 2P_1P_2f_{x_1x_2} = 0,$$

$$P_1P_3f_{x_2x_3} + P_2P_3f_{x_3x_1} - P_1P_2f_{x_3x_3} - P_3^2f_{x_1x_2} = 0,$$

$$P_1^2f_{x_3x_3} + P_3^2f_{x_1x_1} - 2P_1P_3f_{x_3x_3} = 0,$$

$$P_2^2f_{x_3x_3} + P_3^2f_{x_2x_2} - 2P_2P_3f_{x_2x_3} = 0,$$

$$P_1^2f_{x_3P_1} + P_3^2f_{x_1P_3} + P_1P_2f_{x_3P_2} + P_1P_3f_{x_1P_2} - P_1P_3f_{x_2P_2}+$$

$$+P_1^2P_3f_{P_1u} + P_3^2P_1f_{P_3u} + P_1P_2P_3f_{P_2u} - \frac{P_3(P_2^2+P_3^2-3P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-$$

$$-\frac{P_1(P_1^2+P_2^2-3P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3} - \frac{4P_1P_2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2} = 0,$$

$$P_1^2f_{x_2P_1} + P_2^2f_{x_1P_2} + P_1P_3f_{x_2P_3} + P_2P_3f_{x_1P_3} - P_1P_2f_{x_3P_3} + P_1^2P_2f_{P_1u}+$$

$$+P_2^2P_1f_{P_2u} + P_1P_2P_3f_{P_3u} - \frac{P_2(P_2^2+P_3^2-3P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1} - \frac{P_1(P_1^2+P_2^2-3P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}+$$

$$+\frac{4P_1P_2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3} = 0,$$

$$P_1^2(f_{x_2P_2} + f_{x_3P_3} - f_{x_1P_1} + P_2f_{P_2u} + P_3f_{P_3u} - P_1f_{P_1u})-$$

$$-2P_1P_2(f_{x_1P_2} + P_1f_{P_2u}) - 2P_1P_3(f_{x_1P_3} + P_1f_{P_3u})+$$

$$+\frac{2P_1(P_2^2+P_3^2-2P_1^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1} - \frac{4P_1^2P_2}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2} - \frac{4P_1^2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3} = 0,$$

$$P_2^2f_{x_3P_3} + P_3^2f_{x_2P_3} + P_1P_3f_{x_2P_1} + P_1P_2f_{x_3P_1} - P_2P_3f_{x_1P_1}+$$

$$+P_2^2P_3f_{P_2u}+P_3^2P_2f_{P_3u}+P_1P_2P_3f_{P_1u}-\frac{P_3(P_1^2+P_2^2-3P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-$$

$$-\frac{P_2(P_1^2+P_2^2-3P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}+\frac{4P_1P_2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}=0,$$

$$P_2^2(f_{x_1P_1}+f_{x_3P_3}-f_{x_2P_2}+P_1f_{P_1u}+P_3f_{P_3u}-P_2f_{P_2u})-$$

$$-2P_1P_2(f_{x_2P_1}+P_2f_{P_1u})-2P_1P_3(f_{x_2P_3}+P_2f_{P_3u})+$$

$$+\frac{2P_2(P_1^2+P_3^2-2P_2^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}-\frac{4P_2^2P_1}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-\frac{4P_2^2P_3}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}=0,$$

$$P_3^2(f_{x_1P_1}+f_{x_2P_2}-f_{x_3P_3}+P_1f_{P_1u}+P_2f_{P_2u}-P_3f_{P_3u})-$$
$$-2P_1P_3(f_{x_3P_1}+P_3f_{P_1u})-2P_2P_3(f_{x_3P_2}+P_3f_{P_2u})+$$

$$+\frac{P_3(P_1^2+P_2^2-2P_3^2)}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_3}-\frac{4P_3^2P_1}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_1}-\frac{4P_3^2P_2}{P_1^2+P_2^2+P_3^2}f_{x_2}=0,$$

$$P_1^2f_{P_1P_1}+P_2^2f_{P_2P_2}+P_3^2f_{P_3P_3}+2P_1P_2f_{P_1P_2}+2P_1P_3f_{P_1P_3}-2P_2P_3f_{P_2P_3}=0.$$

$(**)$

Рассмотрим симметрии, отвечающие контактным векторным полям с производящей функцией следующего вида:

$$f=f(P_1,P_2,P_3)$$

Для функций такого вида система уравнений $(**)$ редуцируется к одному уравнению

$$\nabla^2 f-\nabla f=0,$$

где

$$\nabla=P_1\frac{\partial}{\partial P_1}+P_2\frac{\partial}{\partial P_2}+P_3\frac{\partial}{\partial P_3},$$

откуда следует, что

$$f=f_1(P)+f_2(P)\exp(|P|),\quad |P|=\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2},$$

где $f_1(P)$ и $f_2(P)$ - однородные функции степени 0, и

Теорема 2.

(1) Производящие функции контактных симметрий инварианта I_4 являются решением системы уравнений $(**)$.

(2) Точечные симметрии инварианта I_4 совпадают с преобразованиями из псевдогруппы G.

(3) Контактная симметрия с производящей функцией $f=f(P)$ имеет вид

$$f=f_1(P)+f_2(P)\exp(\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2})$$

где f_1 и f_2 однородные функции степени 0.

Литература

1. В.М. Кузаконь Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств. // Математичні методи та фізико-механічні поля. - 2005, т.48, №4.- С. 95-99.

2. Кузаконь В.М. Інваріантні сім'ї поверхонь и евклідовому просторі. // Вісник Київського університету. Математика і механіка. - 1979, вип. 21. - С. 58-61.

3. Лычагин В.И. Контактная геометрия и нелинсйные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. - 1979, т.34. Вып.1. - С.137-167.

Кузаконь Виктор Михайлович
Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса, Украина

Юлия Степановна Федченко
Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса, Украина

Kuzakon Viktor Mikhailovich
Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine
E-mail: kuzakon_v@ukr.net

Fedchenko Juliya Stepanovna
Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine
E-mail: Fedchenko_Julia@ukr.net

Symmetries of differential invariants of a kind of surfaces $\varphi : R^3 \to R$.
The submersion $\varphi : R^3 \to R$ of Euclidean spaces which has four deferential invariants of the second order as to pseudogroup of Euclidean movements R^3 and reparameterization R is being studied. It is for one of them the complete system of Lie equations has been obtained and the symmetries of the special type has been found.

Proc. Intern. Geom. Center 2011 **4**(3) 30–33 $d\omega$

Інфінітезимальні еквіареальні деформації двовимірних метрик

Ігор Володимирович Потапенко

Аннотация В даній статті доведено критерій еквіареальності двовимірних метрик при їх інфінітезимальних деформаціях.

Ключові слова Варіація · Еквіареальна деформація двовимірної метрики, варіація символів Крістоффеля другого роду

УДК 514.752.43

1 Вступ.

Відомо [3], що інфінітезимальна деформація метрики є еквіареальною, якщо варіація елемента площі пропорційна самому елементу площі. У цій статті доводиться критерій еквіареальності двовимірної метрики, що задається в однозвязній області D зміни параметрів.

В роботі обмежуємося розглядом виключно інфінітезимальних деформацій першого порядку метрик у вигляді

$$g_{ij}(x^1, x^2, t) = g_{ij}(x^1, x^2) + t\delta g_{ij}(x^1, x^2). \tag{1}$$

Відмітимо, що геометрична характеристика об'єкта зберігається при інфінітезимальній деформації першого порядку метрики (1), якщо її приріст є величина не менш ніж другого порядку відносно t. Надалі розглядатиме виключно інфінітезимальні деформації двовимірних метрик у вигляді (1), опускаючи слово першого порядку.

Означення 1. [3] Інфінітезимальну деформацію двовимірної метрики ds^2 в однозв'язній області D зміни параметрів $(x^1, x^2), g_{ij} \in C^2$ будемо називати еквіареальною, якщо варіація $\delta(d\sigma)$ елемента площі $d\sigma = \left(det\|g_{ij}\|\right)^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2$ задовольняє умові

$$\delta(d\sigma) = cd\sigma, \tag{2}$$

де c - const.

Зокрема, якщо $c = 0$,то інфінітезимальна деформація метрики (2) буде ареальною ($\delta g = 0$), що гарантує з точністю t^2 стаціонарність елемента площі.

Далі доведемо критерій еквіареальності двовимірної метрики $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, що задається в однозв'язній області D зміни параметрів $(x^1, x^2), g_{ij} \in C^2$.

Теорема 1. Для того щоб деформація двовимірної метрики ds^2 була еквіареальною в однозв'язній області D зміни параметрів $(x^1, x^2), g_{ij} \in C^2$ необхідно і достатньо виконання умови

$$\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha i} = 0, \tag{3}$$

де $\delta \Gamma^h_{ij}$ - варіація символів Крістоффеля другого роду.

Доведення

Необхідність

Нехай інфінітезимальна деформація метрики є еквіареальною в однозв'язній області D зміни параметрів $(x^1, x^2), g_{ij} \in C^2$, тоді виконуються умови (2), які рівносильні співвідношенням [3]

$$\delta g = 2cg. \tag{4}$$

Оскільки при будь - якій інфінітезимальній деформації [2] мають місце співвідношення

$$\frac{\partial \delta g}{\partial x^l} = 2\delta g \Gamma^{\alpha}_{\alpha l} + 2g\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha l}, \tag{5}$$

то підставляючи (5) в (6) отримаємо

$$c\frac{\partial g}{\partial x^l} = 2cg\Gamma^{\alpha}_{\alpha l} + 2g\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha l}. \tag{6}$$

Користуючись формулою Фоса - Вейля [1],

$$\frac{\partial g}{\partial x^l} = 2g\Gamma^{\alpha}_{\alpha l}, \tag{7}$$

(8) перепишемо у вигляді

$$2cg\Gamma^{\alpha}_{\alpha l} = 2cg\Gamma^{\alpha}_{\alpha l} + 2g\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha l}. \tag{8}$$

Звідки і випливає з урахуванням $2g \neq 0$ (4).

Необхідність доведена.

Достатність.

Нехай в результаті інфінітезимальної деформації метрики в однозв'язній області D зміни параметрів $(x^1, x^2), g_{ij} \in C^2$ виконуються умови (4). Доведемо, що дана інфінітезимальна деформація є еквіареальною, тобто мають місце співвідношення (5). Оскільки при будь-якій інфінітезимальній деформації метрики [2], мають місце співвідношення (6), то підставляючи (4) в (6) будемо мати:

$$\frac{\partial \delta g}{\partial x^l} = 2\delta g \Gamma^{\alpha}_{\alpha l}. \tag{9}$$

Користуючись формулою Фосса-Вейля (7), (9) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial \delta g}{\partial x^l} = \delta g \frac{\partial g}{g \partial x^l}. \tag{10}$$

Або в еквівалентному вигляді (виключаючи випадок ареальності $\delta g = 0$)

$$\frac{\partial \ln(|\delta g|)}{\partial x^l} = \frac{\partial \ln(|g|)}{\partial x^l}. \tag{11}$$

З (9) випливає

$$\ln(|\delta g|) = \ln(|cg|), \tag{12}$$

де c =const.

З (10) випливає (5).

Достатність доведена.

Теорема 1 доведена.

Відмітимо, що в (5) випадок ареальності буде мати місце при $c = 0$.

Висновки

За допомогою отриманого в статті критерію можна вивчати інфінітезимальні еквіареальні деформації поверхонь та двовимірних метрик.

Література

1. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей в тензорном изложении.// Москва. Ленинград: ОГИЗ Гостехиздат, Т.1, 1947, 512с.
2. І. В. Потапенко. Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі Е3 // Український математичний журнал, Т.63, №4, 2011, С.523 – 530.
3. В. Т. Фоменко. О бесконечно малых эквиареальных геодезических деформациях двумерных метрик // Вестник ТГПИ, №1, 2009, С.18 – 24.

Ігор Володимирович Потапенко
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: igopotapenko@yandex.ru

Igor V. Potapenko
Odessa I.I.Mechnikov National University, Odessa, Ukraine.

Infinitesimal ekviareal deformations of two-dimensional metrics

In this article the criterion of ekviareal of two-dimensional metric is well-proven at their infinitesimal deformations.

Proc. Intern. Geom. Center 2011 **4**(3) 34–44 $d\omega$

Инвариантность AC-структуры относительно характеристического вектора

Терпстра Мария Александровна

Аннотация Исследуются условия, когда почти контактная метрическая структура инвариантна относительно действия локальной 1-параметрической группы диффеоморфизмов, порожденной характеристическим векторным полем. В частности, когда этот характеристический вектор является торсообразующим векторным полем, когда рассматриваемая структура нормальна и когда структура является $lcQS$-структурой.

Ключевые слова Почти контактная метрическая структура · Характеристический вектор · Локальная однопраметрическая группа диффеоморфизмов · Торсообразующее векторное поле · Нормальное векторное поле · $lcQS$-структура

УДК 514.76

Введение.

Напомним некоторые необходимые сведенья.

Определение 1 *[5] Почти контактной структурой на многообразии M называется совокупность (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η -дифференциальная 1-форма, называемая контактной, ξ – векторное поле, называемое характеристическим, Φ - эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый структурным эндоморфизмом. При этом*

1) $\eta(\xi) = 1$;

2) $\eta \circ \Phi = 0$;

3) $\Phi(\xi) = 0$;

4) $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$

Если дополнительно задана риманова метрика $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, такая, что

$$\langle \varPhi X, \varPhi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y); X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

четверка $(\eta, \xi, \varPhi, g)$ называется *почти контактной метрической структурой (AC-структурой).*

Распределения $\mathfrak{L} = \ker\eta$ и $\mathfrak{M} = \ker \mathrm{d}\eta$,возникающие на многообразии M, назовем *первым* и *вторым фундаментальным распределениями.*

Для модуля $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей верно разложение [2]:

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M},$$

где $\dim\mathfrak{L} = 2n$, $\dim\mathfrak{M} = 1$.

На многообразии M с модулем $\mathfrak{X}(M)$ также определяется пара взаимно дополнительных проекторов:

$$\mathfrak{m} = \eta \otimes \xi; \quad \mathfrak{l} = id - \xi \otimes \eta \tag{1}$$

на распределения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ соответственно. Очевидно, что $\mathfrak{m} + \mathfrak{l} = \mathrm{id}$.

Определение 2 *AC-структура $S = (\xi, \eta, \varPhi, g)$ на M называется локально конформно квази-сасакиевой, короче $lcQS$-структурой, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в квази-сасакиеву структуру $\tilde{S} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \varPhi, \tilde{g})$.*

Теорема 1 *[3] На всяком $lcQS$-многообразии M внутренним образом определена глобальная дифференциальная 1-форма α, такая что $\alpha\big|_U = d\sigma$, где σ - определяющая функция соответствующего локально-конформного преобразования.*

Определение 3 *Глобальная 1-форма α называется* (контактной) формой Ли $lcQS$-многообразия. *Вектор $\alpha^\#$, дуальный форме Ли, называется* контактным вектором Ли.

Теорема 2 *[3] Пусть $S = (\xi, \eta, \varPhi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – $lcQS$- структура на $(2n+1)$-мерном многообразии M. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *S - нормальная структура*
2. $\alpha \circ \varPhi = 0$
3. $\alpha^\# \in \mathfrak{M}$
4. $\alpha = \alpha(\xi)\eta$

Локально конформные квази-сасакиевы структуры включают в себя квази-сасакиевы структуры и структуры Кенмоцу.

Определение 4 *[1] Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) называется торсообразующим векторным полем, если выполняется условие*

$$\nabla X = \rho \cdot id + a \otimes X,$$

для некоторых 1-формы a и гладкой функции ρ.

Здесь ρ и a будем называть определяющими элементами торсообразующего векторного поля.

Из [4] известно, что характеристический вектор ξ многообразия Кенмоцу и косимплектического многообразия является торсообразующим векторным полем с определяющими элементами

$$\rho = 1, \quad a = -\eta, \tag{2}$$

$$\rho = 0, \quad a = 0, \tag{3}$$

соответственно, а характеристический вектор многообразия Сасаки не является торсообразующим векторным полем.

Инвариантность AC-структуры относительного характеристического вектора

Из [1] известно, что поле линейного геометрического объекта инвариантно при действии локальной 1-параметрической группы преобразований порожденных векторным полем X, тогда и только тогда, когда производная Ли этого объекта обращается в нуль.

Почти контактная метрическая структура (η, ξ, Φ, g) будет инвариантна относительно действия локальной 1-параметрической группы диффеоморфизмов, порожденной характеристическим вектором ξ, если производная Ли от структурного эндоморфизма, контактной формы и римановой метрики будет обращаться в нуль:

$$\mathfrak{L}_\xi(\Phi) = 0; \qquad \mathfrak{L}_\xi(\eta) = 0; \qquad \mathfrak{L}_\xi(g) = 0;$$

Назовем первые два условия, соответственно, Φ-инвариантностью и η-инвариантностью AC-структуры. Третье условие соответствует тому, что характеристический вектор является вектором Киллинга (см. [1]).

Теорема 3 *Характеристический вектор ξ сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда*

$$1)\nabla_{\xi}(\Phi)Y = \nabla_{\Phi Y}(\xi) - \Phi(\nabla_Y \xi), \tag{4}$$

$$2)\nabla_{\xi}\xi = 0, \tag{5}$$

$$3)\langle \nabla_X \xi, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y \xi\rangle = 0. \tag{6}$$

□ Пусть (η, ξ, Φ, g) – почти контактная метрическая структура на M. Найдем условия того, что AC-структура будет Φ-инвариантной. Рассмотрим производную Ли в направлении вектора X от структурного эндоморфизма $\mathfrak{L}_X(\Phi)(Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_X(\Phi)(Y) &= \mathfrak{L}_X(\Phi Y) - \Phi\mathfrak{L}_X(Y) = [X, \Phi Y] - \Phi[X, Y] = \\
&= \nabla_X(\Phi Y) - \nabla_{\Phi Y} X - \Phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \\
&= \nabla_X(\Phi Y) - \nabla_{\Phi Y} X - \Phi\nabla_X Y + \Phi\nabla_Y X = \\
&= \nabla_X(\Phi)Y + \Phi(\nabla_X Y) - \Phi(\nabla_X Y) - \nabla_{\Phi Y}(X) + \Phi(\nabla_Y X) = \\
&= \nabla_X(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(X) + \Phi(\nabla_Y X).
\end{aligned}$$

Если $\mathfrak{L}_X(\Phi)(Y) = 0$, то при $X = \xi$ получаем:

$$\nabla_{\xi}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\xi) + \Phi(\nabla_Y \xi) = 0.$$

В силу равносильности проведенных преобразований, верно и обратное.

Таким образом, условие Φ-инвариантности AC-структуры равносильно условию (4).

Далее найдем условие η-инвариантности AC-многообразия. Для этого должно выполняться

$$\mathfrak{L}_{\xi}(\eta) = 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\xi}(\eta)X &= \mathfrak{L}_{\xi}(\eta(X)) - \eta\mathfrak{L}_{\xi}(X) = \xi(\eta(X)) - \eta([\xi, X]) = \\
&= \xi(\eta(X)) - \eta(\nabla_{\xi} X) + \eta(\nabla_X \xi) = \nabla_{\xi}(\eta)X + \eta(\nabla_X \xi) = \\
&= \nabla_{\xi}(\eta)X + \langle \xi, \nabla_X \xi\rangle = \nabla_{\xi}(\eta)X.
\end{aligned}$$

Таким образом, если AC-структура η-инвариантна, то выполнено равенство

$$\nabla_{\xi}(\eta)X = 0.$$

Проведем дальнейшие преобразования:

$$
\begin{aligned}
0 = \nabla_\xi(\eta)X = \nabla_\xi(\eta(X)) - \eta(\nabla_\xi X) = \\
= \nabla_\xi\langle\xi, X\rangle - \langle\xi, \nabla_\xi X\rangle = \\
= \langle\nabla_\xi\xi, X\rangle + \langle\xi, \nabla_\xi X\rangle - \langle\xi, \nabla_\xi X\rangle = \langle\nabla_\xi\xi, X\rangle.
\end{aligned}
$$

В силу невырожденности метрики, AC-структура η-инвариантна если $\nabla_\xi\xi = 0$. Такие же рассуждения, можно провести и в обратном порядке. Таким образом, η-инвариантность структуры равносильна утверждению формулы 5 теоремы.

Осталось рассмотреть вопрос о том, когда характеристический вектор является вектором Киллинга, то есть

$$
\mathfrak{L}_\xi(g) = 0.
$$

Распишем это выражение:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\xi(g)(X,Y) = \mathfrak{L}_\xi(g(X,Y)) - g(\mathfrak{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathfrak{L}_\xi Y) = \\
= \xi(g(X,Y)) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) = \\
= \xi(g(X,Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) + g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + \\
+ g(X, \nabla_Y\xi) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\xi(g)(X,Y) = \nabla_\xi(g(X,Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) - \\
- g(X, \nabla_\xi Y) = \xi(g(X,Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) - g(X, \nabla_\xi Y) = 0.
\end{aligned}
$$

В силу равносильности преобразований, получаем, что характеристический вектор является вектором Киллинга тогда и только тогда

$$
\langle\nabla_X\xi, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y\xi\rangle = 0.
$$

Это условие совпадает с (6). Тем самым, теорема полностью доказана. □

Предложение 1 *Характеристический вектор* ξ *сохраняет структуру* $lcQS$*-многообразия тогда и только тогда когда это квази-сасакиево многообразие.*

□ Для доказательства предложения воспользуемся Теоремой 3. Рассмотрим, когда для $lcQS$-многообразия выполняется условие (6).

Согласно [3], на многообразии с локально-конформно квази-сасакиевой структурой верно соотношение:

$$
\nabla_X\xi = -C\Phi X + \eta(\alpha^\#)X - \eta(X)\alpha^\#,
$$

где эндоморфизм C определяется формулой

$$C(X) = \nabla_{\Phi X}\xi - \alpha(\xi)\Phi X. \tag{7}$$

Тогда формула (6) запишется в виде:

$$\langle -C\Phi X + \eta(\alpha^{\#})X - \eta(X)\alpha^{\#}, Y\rangle + \\ + \langle X, -C\Phi Y + \eta(\alpha^{\#})Y - \eta(Y)\alpha^{\#}\rangle = 0.$$

Отсюда

$$-\langle C\Phi X, Y\rangle + \eta(\alpha^{\#})\langle X, Y\rangle - \eta(X)\langle\alpha^{\#}, Y\rangle - \langle X, C\Phi Y\rangle + \\ + \eta(\alpha^{\#})\langle X, Y\rangle - \eta(Y)\langle X, \alpha^{\#}\rangle = 0.$$

Приведем подобные:

$$2\eta(\alpha^{\#})\langle X, Y\rangle - \eta(X)\langle\alpha^{\#}, Y\rangle - \eta(Y)\langle X, \alpha^{\#}\rangle = 0.$$

$$2\eta(\alpha^{\#})X - \eta(X)\alpha^{\#} - \langle X, \alpha^{\#}\rangle\xi = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим частный случай, когда $X = \xi$ и, в силу невырожденности метрики, получим

$$2\eta(\alpha^{\#})\xi - \eta(\xi)\alpha^{\#} - \langle\xi, \alpha^{\#}\rangle\xi = 0,$$

$$\alpha^{\#} = \eta(\alpha^{\#})\xi.$$

Обозначим $\eta(\alpha^{\#}) = \lambda$. Тогда $\alpha^{\#} = \lambda\xi \in \mathfrak{M}$. По Теореме 2, это равносильно нормальности многообразия. Более того, с учетом этого, соотношение (8) можем переписать в виде:

$$2\eta(\lambda\xi)X - \eta(X)\lambda\xi - \langle X, \lambda\xi\rangle\xi = 0,$$

$$2\lambda\eta(\xi)X - \lambda\eta(X)\xi - \lambda\eta(X)\xi = 0,$$

$$2\lambda(X - \eta(X)\xi) = 0,$$

$$-2\lambda\Phi^2(X) = 0.$$

Отсюда $\lambda = 0$ и, значит, $\eta(\alpha^{\#}) = 0$. Из [3] известно, что α и $\alpha^{\#}$ связаны соотношением $\alpha(X) = \langle\alpha^{\#}, X\rangle$ и учитывая Теорему 2, получаем, что $\alpha = 0$.

Таким образом, если характеристический вектор $lcQS$ многообразия является вектором Киллинга, то оно нормально и его контактная форма Ли равна нулю. Из [3] следует, что в этом случае $lcQS$-многообразие является квази-сасакиевым. Проверим выполнение формул (4) и (5) для квази-сасакиева многообразия.

Для квази-сасакиевых структур верны соотношения [2]:

$$\nabla_\xi(\Phi)Y = \langle\tilde{C}\xi, Y\rangle\xi - \eta(Y)(\tilde{C}\xi), \quad \nabla_X\xi = -\Phi\tilde{C}X. \tag{9}$$

где $\tilde{C}(X) = \nabla_{\Phi X}\xi, \quad X \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда равенство (4), с учетом (9) примет вид:

$$\langle\tilde{C}\xi, Y\rangle\xi - \eta(Y)(\tilde{C}\xi) = \tilde{C}Y + \Phi^2\tilde{C}Y. \tag{10}$$

Покажем, что это равенство выполняется. В силу (7), $C(\xi) = 0$ и левая часть равенства обратиться в нуль. А по Определению 1 почти контактной структуры, правая часть примет вид:

$$\eta \otimes \xi(\tilde{C}Y) = 0$$

Известно, что $\eta \otimes \xi(X) = \eta(X)\xi$ [2] , получим

$$\eta \otimes \xi(\tilde{C}Y) = \eta(\nabla_{\Phi Y}\xi)\xi = \langle\nabla_{\Phi Y}\xi, \xi\rangle\xi = 0.$$

Но $\langle\nabla_{\Phi Y}\xi, \xi\rangle = 0$ для любой AC-структуры. Это следует из того, что $\langle\xi, \xi\rangle = 1$ и того, что $\nabla_{\Phi X}\langle\xi, \xi\rangle = \langle\nabla_{\Phi Y}\xi, \xi\rangle + \langle\xi, \nabla_{\Phi Y}\xi\rangle = 2\langle\nabla_{\Phi Y}\xi, \xi\rangle$. Таким образом, соотношение (4) является тождественно верным для квази-сасакиевой структуры.

Соотношение (5): $\nabla_\xi\xi = 0$, легко следует из соотношения (9) и определения эндоморфизма $\tilde{C}$:

$$\nabla_\xi\xi = -\Phi\tilde{C}(\xi) = -\Phi\nabla_{\Phi\xi}\xi = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

□

Следствие 1 *Характеристический вектор ξ не сохраняет почти контактную метрическую структуру многообразия Кенмоцу.*

Следствие 2 *Характеристический вектор ξ сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) многообразия Сасаки, квази-сасакиева многообразия и косимплектического многообразия.*

Пусть (η, ξ, Φ, g) – нормальная почти контактная метрическая структура. Любое векторное поле распадается в прямую сумму : $Y = Y_{\mathfrak{L}} + Y_{\mathfrak{M}}$. Распишем равенство (4) на первом и втором фундаментальном распределении:

$$\begin{cases} \nabla_\xi(\Phi)Y_{\mathfrak{L}} = \nabla_{\Phi Y_{\mathfrak{L}}}(\xi) - \Phi(\nabla_{Y_{\mathfrak{L}}}\xi), \\ \nabla_\xi(\Phi)Y_{\mathfrak{M}} = \nabla_{\Phi Y_{\mathfrak{M}}}(\xi) - \Phi(\nabla_{Y_{\mathfrak{M}}}\xi). \end{cases}$$

Так как

$$\Phi Y_{\mathfrak{M}} = \Phi(\mathfrak{m}(Y)) = \Phi(\eta \otimes \xi(Y)) = \Phi(\eta(Y)\xi) = \eta(Y)\Phi\xi = 0,$$

то $\nabla_{\Phi Y_{\mathfrak{M}}}(\xi) = 0$. Из [2] для нормальных AC-структур верно равенство $\nabla_\xi(\Phi)X = 0 : \quad X \in \mathfrak{L}$. следовательно, $\nabla_\xi(\Phi)Y_{\mathfrak{L}} = 0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \nabla_{\Phi Y_{\mathfrak{L}}}(\xi) = \Phi(\nabla_{Y_{\mathfrak{L}}}\xi), \\ \nabla_\xi(\Phi)Y_{\mathfrak{M}} = -\Phi(\nabla_{Y_{\mathfrak{M}}}\xi). \end{cases}$$

Учитывая, вид проекторов на первое и второе фундаментальное распределение , $Y = Y_{\mathfrak{L}} + Y_{\mathfrak{M}} = -\Phi^2(Y) + \eta(Y)\xi$ (1). Подставляя в систему, получим:

$$\begin{cases} \nabla_{-\Phi^3 Y}(\xi) = \Phi(\nabla_{-\Phi^2 Y}\xi), \\ \nabla_\xi(\Phi)\eta(Y)\xi = -\Phi(\nabla_{\eta(Y)\xi}\xi). \end{cases}$$

После преобразований и с учетом того, что $\nabla_\xi(\Phi)\xi \in \mathfrak{L}$, то есть $l(\nabla_\xi(\Phi)\xi) = \nabla_\xi(\Phi)\xi$ и $-\Phi^2\nabla_\xi(\Phi)\xi = \nabla_\xi(\Phi)\xi$, получаем:

$$\begin{cases} \nabla_\xi(\Phi)\xi + \Phi\nabla_\xi(\xi) = 0, \\ \nabla_{\Phi^2(X)}(\xi) = \Phi\nabla_{\Phi(X)}(\xi). \end{cases}$$

Первое уравнение системы тождественно верно, так как $\nabla_\xi(\Phi)\xi = \nabla_\xi(\Phi\xi) - \Phi\nabla_\xi(\xi) = -\Phi\nabla_\xi(\xi)$. Следовательно, останется лишь одно уравнение системы:

$$\nabla_{\Phi^2(X)}(\xi) = \Phi\nabla_{\Phi(X)}(\xi). \tag{11}$$

Таким образом, нормальная почти контактная метрическая структура Φ-инварианта при выполнении (11).

Возможно показать и обратное, что для нормальной структуры выполнение критерия Φ-инвариантности (4) следует из (11).

Действительно, любое векторное поле распадается в прямую сумму векторных полей на первом и втором фундаментальном распределении, с учетом вида проекторов на эти распределения (1), любое векторное поле представимо в виде

$$X = X_{\mathfrak{L}} + X_{\mathfrak{M}} = -\Phi^2(X) + \eta(X)\xi = \Phi(Y) + \eta(X)\xi,$$

где $Y = -\Phi X$. Пусть $Z = \Phi Y \in \mathfrak{L}$. Тогда (11)

$$\nabla_{\Phi^2(Y)}(\xi) = \Phi\nabla_{\Phi(Y)}(\xi),$$

запишется в виде

$$\nabla_{\Phi(Z)}(\xi) - \Phi\nabla_Z(\xi) = 0.$$

С учетом (4), оно равносильно

$$\nabla_\xi(\Phi)Z = 0 \quad \forall Z \in \mathfrak{L}.$$

Это соотношение будет верно для любой нормальной структуры (см. [2]).

При $Z = \eta(X)\xi \in \mathfrak{M}$, уравнение (4) выполняется тождественно. Действительно:

$$\begin{aligned}0 = \nabla_\xi(\Phi)Z - \nabla_{\Phi Z}(\xi) + \Phi\nabla_Z\xi = \\ = \nabla_\xi(\Phi)(\eta(X)\xi) - \nabla_{\Phi\eta(X)\xi}(\xi) + \Phi\nabla_{\eta(X)\xi}\xi = \\ = \eta(X)\nabla_\xi(\Phi)\xi + \xi\nabla_\xi(\Phi)(\eta(X)) = \\ = \eta(X)\nabla_\xi(\Phi\xi) + \eta\Phi\nabla_\xi\xi + \xi\nabla_\xi(\Phi\eta(X)) + \xi\Phi\nabla_\xi(\eta(X)) = 0\end{aligned}$$

Нормальная AC-структура (η, ξ, Φ, g) Φ-инвариантна тогда и только тогда, когда

$$\nabla_{\Phi^2(X)}\xi - \Phi\nabla_{\Phi(X)}\xi = 0.$$

Таким образом, справедливо

Предложение 2 *Характеристический вектор ξ сохраняет нормальную почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда*

1) $\nabla_{\Phi^2(X)}\xi - \Phi\nabla_{\Phi(X)}\xi = 0$

2) $\nabla_\xi\xi = 0$

3) $\langle\nabla_X\xi, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y\xi\rangle = 0$

Рассмотрим теперь торсообразующий характеристический вектор. В этом случае справедлива

Теорема 4 *Торсообразующий характеристический вектор ξ с определяющими элементами ρ и a сохраняет почти контактную метрическую структуру (η, ξ, Φ, g) тогда и только тогда, когда*

$$a = 0 \qquad \rho = 0$$

□ Так как ξ – торсообразующее векторное поле, то по определению (4):

$$\nabla_X\xi = \rho X + a(X)\xi. \tag{12}$$

Перепишем условия Теоремы 3 с учетом этого :

Первое условие (4), $\nabla_\xi(\Phi)Y = \nabla_{\Phi Y}(\xi) - \Phi(\nabla_Y\xi)$, перепишется в виде

$$\nabla_\xi(\Phi)X = \rho\Phi X + a(\Phi X)\xi - \Phi(\rho X + a(X)\xi) = a(\Phi X)\xi.$$

Из второго условия (5), $\nabla_\xi \xi = 0$, следует, что

$$\nabla_\xi \xi = \rho\xi + a(\xi)\xi = 0,$$

$$a(\xi) = -\rho.$$

Далее рассмотрим условие (6), киллинговости вектора ξ:

$$\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle = 0.$$

Из Определения 4 :

$$\nabla_X \xi = a(X)\xi + \rho X,$$

$$\nabla_Y \xi = a(Y)\xi + \rho Y.$$

Подставляя в (6) получим:

$$a(X)\eta(Y) + a(Y)\eta(X) + 2\rho\langle X, Y \rangle = 0. \tag{13}$$

Пологая $X = Y = \xi$ и $X = \xi$ из (13) находим соответственно, что:

$$\rho = -a(\xi). \tag{14}$$

$$a(X) = a(\xi)\eta(X). \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (13), поучаем:

$$a(\xi)\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = 0.$$

Отсюда, $a(\xi) = 0$.

Таким образом, если характеристический вектор ξ является торсообразующим векторным полем и вектором Киллинга, то его определяющие элементы будут выглядят следующим образом:

$$\rho = 0, \qquad a = 0. \tag{16}$$

Обратно, пусть $a = 0$ и $\rho = 0$, покажем, что торсообразующий вектор будет сохранять почти контактную метрическую структуру.

Φ-инвариантность равносильна соотношению $\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi$:

$$\nabla_\xi(\Phi)X - a(\Phi X)\xi = \nabla_\xi(\Phi X) + \Phi\nabla_\xi X = \\ = \rho(\Phi X) + a(\Phi X)\xi + \Phi\rho(X) + \Phi a(X)\xi = 0.$$

η-инвариантность определена соотношением $\nabla_\xi \xi = 0$, тогда:

$$\nabla_\xi \xi = \rho\xi + a(\xi)\xi = 0.$$

Равенство
$$a(X)\eta(Y) + a(Y)\eta(X) + 2\rho\langle X, Y\rangle = 0.$$
также тождественно верно, то есть торсообразующий вектор ξ – вектор Киллинга. □

Результат этой теоремы можно применить к $lcQS$-структурам и очевидным образом получить Следствие 1 и часть Следствия 2 относительно косимплектических многообразий. Действительно, это следует из соотношений, определяющих элементы торсообразующего характеристического вектора: для структур Кенмоцу это формула $\rho = 1 \quad a = \eta$ (2), а для косимплектических структур $\rho = 0 \quad a = 0$ (3) .

Использовать Теорему 3 относительно квази-сасакиевых структру, включающих структуры Сасаки, не представляется возможным, так как характеристический вектор многообразия Сасаки не является торсообразующим векторным полем.

Список литературы

1. Аминова А.В., Проективные преобразования псевдоримановых многообразий, М., Янус-К, №5, 2003, 46–172.
2. Кириченко В.Ф., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, Типография МПГУ, М., 2003, с. 440–468.
3. Кириченко В.Ф., Баклашова Н.С., Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты, Математические заметки, М., т.82, выпуск 3, 2007, с. 347–360.
4. Терпстра М.А. О геометрии характеристического вектора $lcQS$-многообразия // Труды матем. центра имени Н.И.Лобачевского, Казань: т.44, 2011, 275-277.
5. Sasaki S., On differetiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures. 1.// Tôhoku Math. J., 12, 1960, №3, p. 459–476.

Терпстра Мария Александровна
Московский Педагогический Государственный Университет, Москва, Россия
E-mail: maria_terpstra@mail.ru

Mariya A. Terpstra

The invariance with respect to the AC-structures characteristic vector’

We study conditions where the almost contact metrical structure is invariant under action of the local one-parameteric diffeomorphisms group, generated by the characteristic vector field. In particular, when the characteristic vector is the developable vector field, when the structure is normal and when the structure is lcQS - structure.

О разрешимости квадратно-радикальных задач на построение в плоскости Лобачевского неевклидовой геометрии с помощью циркуля (аналогично построениям Маскерони в плоскости евклидовой геометрии)

Мартыненко Владимир Семенович

Аннотация В этой статье мы описываем алгебру метрических дифференциальных инвариантов и рассматриваем метрическую эквивалентность функций на плоскости Лобачевского относительно группы изометрий.

Ключевые слова Плоскость Лобачевского, дифференциальные инварианты.

УДК 514.132.01

В евклидовой и неевклидовой геометриях геометрические построения и средства, которыми они выполняются, имеют важное значение — они являются одним из направлений развития их идей.

Некоторые классические построения, которые в евклидовой плоскости имеют вековую историю, заканчивающуюся доказательством их невозможности (задача о квадратуре круга), в плоскости Лобачевского порой допускают простые решения. Постановка задачи о геометрических построениях в неевклидовой плоскости имеет свои существенные особенности.

Традиционно считается, что геометрические построения в плоскости евклидовой геометрии рассматривались ещё древнегреческими математиками в VI-V вв. до н. э. Они выполнялись ограниченными средствами линейкой и циркулем (комплекс — E), отображающими прямую и окружность как линии постоянной кривизны. С развитием теории геометрических построений стало выясняться, что комплекс — E обладает избытком конструктивной мощности при решении задач первой и второй степени. Они аналитически приводятся к линейным и квадратичным уравнениям — квадратно-радикальным выражениям, которые можно построить минимальными средствами.

В работах французских математиков *Ламберта* (1728-1777), *Карно* (1753-1828), *Сервуа* (1767-1847) и *Брианшона* (1785-1864) доказано, что только задачи первой степени разрешимы одной линейкой. Французский математик *Понселе* (1788-1867) и швейцарский математик *Штейнер* (1796-1863) доказали, что для решения задач второй степени достаточно линейки и циркуля постоянного раскрытия. Русский математик Д. Д. Мордухай-Болтовской [1] (1876-1952), итальянец *Севери* (1879-1961) и японец Наги Юлиус [2] доказали разными методами, что для решения задач второй степени достаточно линейки и начерченной малой конечной дуги окружности с её центром. Этот критицизм в геометрических построениях минимальными средствами из комплекса — E особенно проявился в работах математиков в последние десятилетия XX века. Их трудами доказано: конструктивные задачи второй степени в евклидовой плоскости разрешимы при помощи линейки и дуги окружности с её центром, либо двух концентрических или пересекающихся окружностей без центров, либо трёх непересекающихся окружностей без центров и без общей радикальной оси.

Датский геометр *Йорген Мор* (1.04.1640-26.01.1697) [3] в 1672 г. в книге «Euclides Danicus» [4] («Датский Евклид») и, независимо от него, в 1797 г. итальянский геометр *Лоренцо Маскерони* [5] (1750-1800) показали, что при решении задач второй степени достаточно лишь одного циркуля. Так случилось, что книга Мора была мало известна среди математиков, поэтому не оказала влияния на решение этой проблемы. В 1928 г. антикварный экземпляр её был обнаружен *Ельмслевом* [6] у букиниста; он изучил её и устано-

[1] Д. Д. Мордухай-Болтовской выведен под именем университетского профессора Дмитрия Дмитриевича Горяинова-Шаховского в романе А. И. Солженицына «В круге первом» см.: Солженицын А. И. В круге первом. Роман. / С 3-мя доп. автора, ст. и прим. М. Петровой. М.: Наука, 2006. С. 45. (Российская академия наук. Литературные памятники).

[2] Нет данных о годах жизни.

[3] Jшrgen Mohr — латинизированное имя Georg(ius) Mohr.

[4] Georg Mohr, Euclides Danicus (Amsterdam: Jacob van Velsen, 1672).

[5] Lorenzo Mascheroni, La Geometria del Compasso (Pavia: Pietro Galeazzi, 1797). Эта книга была, как подобает в таких случаях, посвящена в стихотворной форме императору Наполеону Бонапарту.

[6] Johannes Trolle Hjelmslev (7.03.1873-16. 02.1950) – датский математик, отец Луи Ельмслева (Louis Hjelmslev) — выдающегося датского лингвиста основателя Копенгагенского лингвистического кружка, разработавшего оригинальную структуралистскую теорию со значительной математической составляющей (глоссематика).

вил, что книга содержит полное решение проблемы *Маскерони*[1,2]. В книге *Маскерони* не было дано общего доказательства, а рассматривались решения одним циркулем большого количества задач второй степени. Полное доказательство теоремы *Маскерони*, с указанием общего метода решения — метода инверсии, было дано[3,4] в 1890 г. чешским (австрийским) математиком *Августом Адлером* (1863-1923). Таким образом, к началу XX века были решены вопросы о достаточности минимальных конструктивных средств комплекса — E для разрешения на построение задач второй степени, а также была выяснена неразрешимость комплексом – E четырёх знаменитых задач древности: удвоения куба, трисекции угла, о правильном семиугольнике, квадратуре круга и обратной ей задаче — циркулятуре квадрата.

Открытие неевклидовой геометрии великим русским математиком *Н. И. Лобачевским* (1792-1856) и, независимо от него, выдающимся венгерским математиком *Яношем Бойяи*[7] (1802-1860), а также развитие её идей явилось современным учением об основании евклидовой геометрии, всей математики и вообще всякой дедуктивной науки.

Таким образом, изучение построений в неевклидовой геометрии стало одним из направлений развития её идей.

Впервые геометрические построения в неевклидовой геометрии были рассмотрены *Яношем Бойяи* в его работе «Аппендикс»[5]. Он даёт построение трёх основных задач: 1). Параллели из данной точки к заданной прямой; 2). Угла параллельности, соответствующего данному отрезку; 3). Отрезка, соответствующего данному углу параллельности, а также решение задачи о циркулятуре квадрата.

С установлением логической правильности геометрии Лобачевского, с общим её признанием в связи со столетним юбилеем дня рождения Н. И. Лобачевсого (1892) и круглой датой со дня рождения Яноша Бойяи (1902) появились исследования в этой области ряда европейских математиков: Барбарена [6] (Paul Jean JosephBarbarin), Жерара [7], Енгеля [8], Либмана [9], Симона [10], Гроссмана [11], Бальдуса [12], Гильберта [13]. Они оживили интерес к исследованиям в неевклидовой геометрии и развитии её идей, в частности, по геометрическим построениям.

Изучение научного наследия и развития идей великого русского геометра Н. И. Лобачевского перешло к русским математикам. В частности, теории геометрических построений в пространстве Н. И. Лобачевского посвящены

[7] Венгерское написание имени Bolyai Janos и произносится — [ja :nos bo:ljai], хотя в русских источниках встречается множество вариантов написания его фамилии: Больяи, Больяй, Бойаи, Бояи, Бояй и даже Болье.

труды Д. Д. Мордухай-Болтовского, Н. М. Несторовича, Кагана, а также украинских математиков — выдающегося геометра А. С. Смогоржевского и учеников его школы: Н. П. Хоменко, В. Ф. Рогаченко, Р. И. Демаховской, В. И. Кобы, Б. Я. Букреева [14], М. Г. Андриевской [15], К. К. Мокрыщева и автора этой статьи о разрешимости без всяких ограничений раствора циркуля в гиперболической плоскости задачи Маскерони. В работе венгерского математика Я. Штромера [16] показана разрешимость задачи Маскерони в гиперболической плоскости с ограниченным раскрытием раствора циркуля (beschrдnkter Zirkelцffung) при её геометрическом построении.

На плоскости Лобачевского в неевклидовой геометрии существует три линии второй степени с постоянным радиусом гауссовой кривизны: окружность, эквидистанта и предельная линия, построение которых соответственно осуществляется следующими средствами: циркулем, гиперциркулем и орициркулем, их конструкция описана в работе [17, гл.3, §20].

Разрешимость задач на построение второй степени в плоскости Лобачевского доказана с помощью линейки, циркуля и гиперциркуля [18]; линейки и циркуля [19,20]; линейки и орициркуля [21]; линейки и гиперциркуля [22, 23]; линейки и начерченных некоторых фигур в плоскости построения [24, 25, 26, гл.VI]; циркуля, орициркуля и гиперциркуля [26, гл. VII, 27]; циркуля и гиперциркуля, орициркуля и гиперциркуля [28] ; циркуля и орициркуля, гиперциркуля [29] , орициркуля [30]; циркуля и начерченной прямой в плоскости построения[31].

Оставалось проблемным доказательство теоремы Маскерони [32] лишь одним циркулем без ограничения его раствора, которое получено автором этой статьи.

Мы доказываем в геометрии Лобачевского **Теорему Маскерони: если в геометрии Лобачевского всякая задача на построение разрешима циркулем и линейкой[8], то она разрешима и одним циркулем.**

Построение осуществляется описанием простейших конструктивных операций, которые должны быть выполнены в гиперболической плоскости. Для доказательства теоремы достаточно решить так называемые элементарные (1-8), основные (I-III) и главные (А, Б) задачи, которые являются базисными построениями в геометрии Лобачевского. Кроме того, решим вспомогательные задачи (1°-7°). В плоскости построения прямая задается двумя точками. Обозначим $k(O, R)$ окружность с центром в точке O и радиусом R;

[8] Доказано Н. М. Несторовичем в работе: Несторович Н. М. Об эквивалентности в конструктивном отношении комплекса М—Б и комплекса Е. -Докл. АН СССР, 1939, 22, № 5, с. 233—235. .

окружность $\chi(O, R')$ - образ абсолюта плоскости Лобачевского относительно окружности инверсии. Используется преобразование инверсии непосредственно в гиперболической плоскости [26, гл. III, § 16]; а также формулы гиперболической тригонометрии [26, гл. II, § 10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1°. Построить медиатрису отрезка AB. Проводим окружности $k_1\,(A, R)$ и $k_2\,(B, R)$, $R > \frac{1}{2}AB$, их точки пересечения определяют искомую медиатрису.

2°. Построить точку на прямой AB. Строим точки C и D симметричные относительно AB. Точка пересечения окружностей $k_1(C, R)$ и $k_2(D, R)$, $R > \frac{1}{2}CD$ будет искомой.

3°. Перенести данный отрезок AB на прямой AB, отложив его от данной точки C. Строим медиатрису MN отрезка BC (1°), точку D пересечения окружностей $k_1(M, MA)$ и $k_2(N, NA)$. Тогда $CD = AB$.

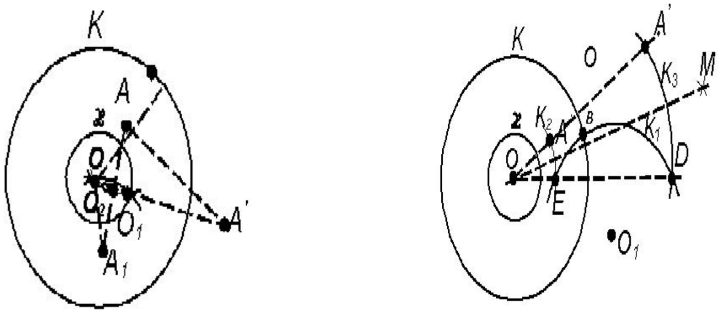
1. Удвоить данный отрезок AB. Откладываем на прямой AB от точки C отрезок $CD = AB$ (3°). Строим медиатрису EF отрезка AC (1°) и откладываем на прямой AB от точки A отрезок $AG = CD$ (3°). Тогда $BG = 2AB$.

2. Восстановить перпендикуляр к прямой AB в данной на ней точке C. Удвоим отрезок BC (1), $DC = CB$. Строим медиатрису MN отрезка $BD = 2BC$ (1°). Следовательно, $MC \perp AB$.

A. Построить точки пересечения прямой AB с данной окружностью k(O, R). Случай (A_1), когда AB, пересекающая окружность, не проходит через её центр. Строим точку O_1, симметричную точке O относительно прямой AB, и окружность $k_1(O_1, R)$. Точки пересечения окружностей $k(O, R)$ и $k_1(O_1, R)$ — искомые.

3. Удвоить данный∠AOB. Строим точку D, симметричную точке A относительно OB. Тогда $\angle AOD = 2\angle AOB$.

I. Построить угол параллельности α=П(AB), соответствующий данному отрезку AB. Строим $BM \perp AB$ (2), окружность $k(A, R)$, $R > AB$ и точки пересечения C и D этой окружности с прямой $BM(A_1)$, CB=BD. Удваиваем отрезок AC, CE=$2AC$, C и E — диаметрально противоположные точки окружности *k(A,R)* (1). Строим окружность $k_1(A, BD)$ и точки N и L пересечения этой окружности с прямой $ED(A_1)$. Тогда $AN \parallel BM$ и $LA \parallel MB$, следовательно, $\angle BAN = \prod(AB)$ — искомый угол параллельности [26, с. 64].



А Б

Рис. 1
А). Построение образа абсолюта плоскости окружности инверсии.
Б). Построение точки, симметричной данной точке относительно окружности инверсии.

4°. Построить образ χ(O, R') абсолюта плоскости при инверсии относительно окружности $\mathbf{k(O,R)}$. Строим окружность инверсии $k(O,R)$, где R=2OA (1) и OA - произвольный отрезок, угол параллельности $\angle AOA' = \prod(OA)$ (I), точку A_1, симметричную точке A относительно прямой OA', и точку O_1 пересечения окружностей $k_1(A,OA)$ и $k_2(A_1,OA)$ (рис. 1, А). Тогда $OO_1 = R'$ -радиус искомой окружности $\chi(O,R')$. Действительно, из прямоугольного $\triangle OO_2A$ имеем: $th\frac{OO_2}{r} = th\frac{OA}{2r}\cos\prod(OA)$, или $th\ \frac{OO}{2r} = th^2\frac{R}{2r}$, так как $\cos\prod(OA) = th\frac{R}{2r}$ [26, стр. 54]. Следовательно, $OO_1 = R'$.

5°. Построить точку A', симметричную данной точке A относительно окружности $\mathbf{k(O,R)}$. Строим окружность инверсии $k(O,R)$ и окружность $k_2(O,OA)$ (рис.1, Б). С произвольной точки B окружности $k(O,R)$ восстанавливаем перпендикуляр O_1B к OB (2), O_1B - произвольный отрезок такой, чтобы окружность $k_1(O_1,O_1B)$ пересекала окружность $k_2(O,OA)$. E - точка пересечения окружностей $k_1(O_1,O_1B)$ и $k_2(O,OA)$. Находим точку Dпересечения окружности $k_1(O_1,O_1B)$ и прямой $OE(A_1)$. Так как окружности k и k_1 по построению ортогональные, то точки E и Dпересечения луча OD и окружности $k_1(O_1,O_1B)$ симметричные относительно окружности $k(O,R)$ [26, с. 51].

Строим медиатрису OM отрезка AE (1°). Точка A^1, симметрична точке D относительно OM - искомая.

6°. Построить линию, симметричную данной прямой AB относительно окружности инверсии $\mathbf{k(O,R)}$. Пусть прямая AB не имеет общих точек с окружностью $\chi(O,R')$. На прямой AB строим произволь-

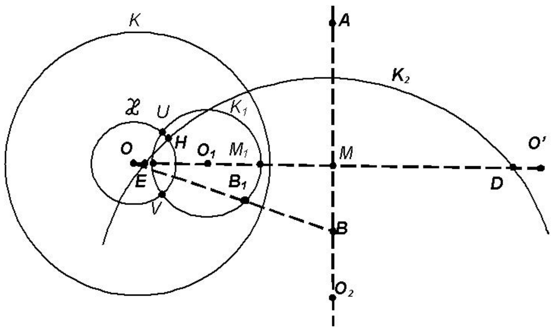


Рис. 2 Построение линии, симметричной прямой относительно окружности инверсии

ную точку O_2 (2°). Рассмотрим прямоугольный $\triangle OHO_2$, $\angle OHO_2 = \frac{\Pi}{2}$ (рис. 3), из его построения найдём отрезок O_2H. Строим произвольную окружность $k_3(O_3, R_3)$ и из её произвольной точки P проводим окружность $k(P, R')$, пусть F одна из точек пересечения окружностей k_3 и k_4. Тогда $PF = R'$. Строим $PL \perp PF$ (2), окружность $k_5(F, OO_2)$ и точку Q пересечения окружности k_5 с прямой $PL(A_1)$. Катет $O_2H = PQ$. Проводим окружность $k_2(O_2, O_2H)$, по построению ортогональную окружности $\chi(O, R')$; H - точка пересечения этих окружностей. Строим точку O', симметричную точке O относительно прямой AB, точки C и D пересечения окружности $k_2(O_2, O_2H)$ с прямой $OO'(A_1)$. Строим точки O_1 и B_1, симметричные соответственно точкам D и B относительно окружности $k(O, R)$ (5°). Окружность $k_1(O_1, O_1B_1)$ есть образ прямой AB относительно окружности инверсии $k(O, R)$. Действительно, обозначим гиперболические длины отрезков $OE = \rho$, $EO_1 = R_1$, $OM = a$, $OD = b$ (рис. 2), тогда из симметричности точек O_1 и D относительно окружности $k(O, R)$ [26, с. 54]

$$th\frac{\rho + R_1}{2r} th\frac{b}{2r} = th^2\frac{R}{2r},$$

или

$$th\frac{\rho + R_1}{2r} = \frac{th\frac{R'}{2r}}{th\frac{b}{2r}}, \tag{1}$$

Так как $th\frac{R'}{2r} = th^2\frac{R}{2r}$ из прямоугольного $\triangle OUO_1$, в котором угол параллельности $\angle UOM = \prod(a)$, имеем: $th\frac{R'}{r} = th\frac{\rho+R_1}{r} th\frac{a}{r}$. Отсюда из равенства (1) получаем:

$$\frac{1}{1 + th^2\frac{R'}{2r}} = \frac{th\frac{b}{2r} th\frac{a}{r}}{th^2\frac{b}{2r} + th^2\frac{R'}{2r}},$$

или

$$th^2\frac{R'}{2r} = th\frac{b}{2r} th\frac{2a - b}{2r}, \tag{2}$$

Где $2a - b > 0$, $a > b$, если бы $a = b$, тогда $R' = a$, что невозможно, ибо $R' < \frac{1}{2}OO'$. Следовательно, $OC = DO' = 2a - b$ (рис. 2).

Из равенства (2) следует, что точки C и D, симметричные как относительно окружности $\chi(O, R')$, так и относительно прямой AB, то есть в точках C и D пересекается пучок окружностей, ортогональных окружности $\chi(O, R')$ с центрами на прямой AB, причем точка D отображается при инверсии окружности $k(O, R)$ в точку O_1 - центр окружности образа прямой AB.

Б. Найти точку пересечения двух данных прямых AB и CD. Строим окружность инверсии $k(O, R)$, окружность $\chi(O, R')$ (4°), где O - произвольная, и окружности $k_1(O_1, R_1)$ и $k_2(O_2, R_2)$, в которые отображаются соответственно прямые AB и CD при инверсии относительно окружности $k(O, R)$ (6). M_1 - точка пересечения окружностей k_1 и k_2. Точка M, симметричная точке M_1 относительно $k(O, R)$ (5°), - точка пересечения данных прямых.

4. Разделить пополам данный отрезок AB. Строим медиатрису MN отрезка AB (1°), окружность инверсии $k(O, R)$ и окружность $\chi(O, R')$ (4°), где O — произвольная точка. Находим точку пересечения прямых AB и MN (Б), она искомая.

7°. Разделить пополам дугу $\widehat{\mathbf{AB}}$ данной окружности $\mathbf{k(O, R)}$. Строим медиатрису MN отрезка AB (1°), на ней - произвольную точку O_1 и окружность инверсии $k_1(O_1, R_1)$ такого произвольного радиуса R_1, чтобы данная окружность $k(O, R)$ лежала внутри $k_1(O_1, R_1)$. Находим точки A_1 и B_1, симметричные соответственно точкам A и B относительно окружности инверсии $k_1(O_1, R_1)$ (5°). Делим точкой F_1 пополам отрезок A_1B_1 (4). Строим точку F, симметричную точке F_1 относительно окружности $k_1(O_1, R_1)$ (5°), и удваиваем отрезок OF, $LF = 2OF$ (1). Точки F и L - искомые.

А. Построить точки пересечения прямой AB с данной окружностью $\mathbf{k(O, R)}$. Случай (A_2), когда прямая AB проходит через центр окружности $k(O, R)$. Построим на окружности точки C и D, симметричные относительно прямой AB (2°). Точки F и L середины дуги $\widehat{CD}$ (7°) — искомые.

5. Разделить пополам данный угол $\angle AOB$. Строим окружность $k(O, R)$, точки C и D пересечения этой окружности со сторонами $\angle AOB$ (A_2). Медиатриса OE отрезка CD (1°) делит пополам $\angle AOB$.

6. Перенести данный отрезок AB на данную прямую MN, отложив его от точки C. Строим точки D и E пересечения прямой MN и окружности $k(C, AB)$ (A_2). Тогда $CE = CD = AB$.

7. Построить угол, равный данному $\angle AOB$, при данной прямой MN в заданной на ней точке C. Строим окружность $k(O, OA)$, которая пересекает в точке D сторону OB данного$\angle AOB$ (A_2), окружность $k(C, OA)$ и E - точку пересечения этой окружности с прямой $MN(A_2)$. Находим F и P — точки пересечения окружностей $k(C, OA)$ и $k_2(E, AD)$. Тогда $\angle FCE = \angle ECP = \angle AOB$.

8. Из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC. Строим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой BC, и точку M пересечения прямых AA_1и BC (Б), AM - искомый перпендикуляр.

II. Построить отрезок OM, для которого данный $\angle AOB$ является углом параллельности. Строим окружность инверсии $k(O, R)$ и окружность $\chi(O, R')$ (4°), где O вершина $\angle AOB$, $UO_1 \bot OA$ (2), где U и O_1 - точки пересечения соответственно окружности $\chi(O, R')$ и прямой $OA(A_2)$, прямых UO_1 и OB (Б), и точку M, симметричную точке M_1 пересечения окружности $k_1(O_1, O_1M)$ и прямой $OB(A_2)$ относительно окружности инверсии $k(O, R)$ (5°). Так как окружность $k_1(O_1, O_1M)$ - образ прямой, проходящей через точку M, перпендикулярной к OB и параллельной прямой OA, относительно окружности инверсии, то отрезок OM - искомый.

III. Через данную точку A провести прямую AE, параллельную данной прямой BC. Строим $AD \bot BC$ (8) и угол параллельности $\angle DAE = \prod(AD)$ (I). Следовательно, прямые AE и BC параллельные.

Таким образом, о разрешимости построений задачи Маскерони в плоскости Лобачевского лишь одним циркулем без ограничений его раствора доказано.

Из доказанной теоремы Маскерони и работ [28,29,30] следует, что орициркуль, гиперциркуль и циркуль, как средства построения задач второй степени в плоскости Лобачевского, в конструктивном смысле эквивалентны между собой.

Доказанной теоремой Маскерони завершаются критические исследования теории построения задач второй степени в плоскости неевклидовой геометрии Лобачевского комплексом: линейка — орициркуль — гиперциркуль — циркуль, которые разработали, в основном, советские геометры Д.Д.Мордухай-Болтовской, В.Ф.Каган, Н.М.Несторович, А.С.Смогоржевский, Н.П.Хоменко, Р.И.Демаховская, В.Ф.Рогаченко, К.К.Мокрищев, В.С.Мартыненко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hjelmslev, J. (1928) «Om et af den danske matematiker Georg Mohr udgivet skrift Euclides Danicus, udkommet i Amsterdam i 1672» [Of a memoir Euclides Danicus published by the Danish mathematician Georg Mohr in in1672 in Amsterdam], Matematisk Tidsskrift B, pages 1-7. See also: Hjelmslev, J. Beitrдge zur Lebensbeschreibung von Georg Mohr. Kopenhagen 1931, Matematisk-fysiske Meddelelser af den Danske Videnskabelige Selskab 11,4. (= mathemat.-physische Mitteilungen der dan. wiss. Gesellschaft 11,4).
2. Schogt, J. H. (1938) «Om Georg Mohr's *Euclides Danicus*,» *Matematisk Tidsskrift* A, pages 34-36.
3. Adler A. Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen. *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien*, 99, 1890, s. 910-916.
4. Adler A. Theorie der geometrischen Konstruktionen. Leipzig, 1906. (Adler A., The Theory of Geometric Constructions (179 drawings attached). Translated from German. 1910. 330 pp. See also: Adler A., The Theory of Geometric Constructions, translated from German, 3rd edition. Leningrad. 1940).
5. *Больаи Я.* Аппендикс. В сборнике: Основания геометрии, М., ГИТТЛ, 1956. см. также в интернете по адресу: [http://osnovanija.narod.ru/geometr/071.djvu].
6. P. Barbarin. Etudes de geometrie analitique non euclidienne. Memoires cour. publ. par Acad. Belgique. 1900-1901. See also Internet site [http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ACA8032].
7. M. L. Gerard, These sur la geometrie non-euclidienne. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892. 4to, 110 pp.
8. F. Engel. N.I. Lobatchefskij. Leipzig, 1898-1899. . See also: F. Engel. The Construction of a Parallel Line in Lobachevsky's Geometry. The News of the Kazan Physics and Mathematics Society 2, 7, 1897.
9. H. Liebmann. Die bewegungen der hiperbolischen Ebene. Math. Annalen, 85, 1922. См. также: H. Liebmann. Die Konstruktion des geradelinigen Dreiecks den nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln. Leipzig, Ber. Ges. Wiss., 53,1901.
10. M. Simon. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Leipzig -Berlin, 1925.

11. M. Grossman. Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidische Geometrie. Freuenfeld, 1904.
12. Р. Бальдус. Неевклидова геометрия. ГТТИ, М.-Л., 1933.
13. Д. Гильберт. Основания геометрии. Госттехиздат, М.-Л., 1948.
14. Букреев Б. Я. Планиметрия Лобачевского в аналитическом изложении. - М.-Л., 1952.
15. Андриевская М. Г. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского. -Киев: КГУ, 1963. 111с.
16. J. Strommer. Konstruktionen mit Hilfe eines Zirkels von beschrдnkter Oftnung in der hiperbolischen Geometrie. Journal fur die reine und angewandte Mathematik, Band 278/279, S. 22-33,1975.
17. *Несторович Н. М.* Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 304 с.
18. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Сборник «In memoriam Lobatschevskii», Казань, 1927, 2, с. 67-82.
19. *Несторович Н. М.* Об эквивалентности в конструктивном отношении комплекса М-Б и комплекса Е. - Докл. АН СССР, 1939, 22, № 5, с. 233-235.
20. *Каган В. Ф.* Основания геометрии, ч. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 492 с.
21. *Смогоржевский А. С.* Геометрические построения в пространстве Лобачевского. - В кн.: 50 лет Киевского политехнического института. Киев, 1948. с. 621-642.
22. *Хоменко Н. П.* О разрешимости конструктивных задач второй степени в гиперболической плоскости с помощью линейки и гиперциркуля. - Сообщения о н.-и. работе Киев. политех. ин-та. 1948, № 7, с. 109-110.
23. *Смогоржевский А. С.* Геометрические построения в пространстве Лобачевского. -В кн.: 50 лет Киевского политехнического института. Киев, 1948. с. 621-642.
24. *Хоменко Н. П.* О решении конструктивных задач второй степени минимальными средствами в гиперболической геометрии. - Изв. Киев. политех. ин-та, 1950, № 10, с. 141-145.
25. *Демаховская Р. И.* О некоторых построениях в пространстве Лобачевского с помощью одной только линейки. - Изв. Киев. политех. ин-та, 1953, № 12, с. 229-242.
26. *Смогоржевский А. С.* Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 191 с.

27. *Смогоржевський О. С.* Про розв'язування конструктивних задач другого ступеня в просторі Лобачевського з допомогою циркуля, гороциркуля і гіперциркуля. -Мат. збірник Київ. ун-та. 1948, № 2, с. 151-156.
28. *Рогаченко В. Ф.* О разрешимости задач на построение в плоскости Лобачевского с помощью циркуля и гиперциркуля или орициркуля и гиперциркуля. -Докл. АН СССР, 1953, 88, № 4, с. 615-618.
29. *Мокрищев К. К.* О разрешимости конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского с помощью гиперциркуля или циркуля и орициркуля. - Докл. АН СССР, 1953, 91, № 3, с. 453-456.
30. *Мокрищев К. К.* Про розв'язність конструктивних задач другого степеня в площині Лобачевського за допомогою орициркуля. - Доп. АН УССР, 1955, № 6, с. 515-519.
31. *Мартиненко В. С.* Розв'язність задач на побудову другого степеня у площині Лобачевського з допомогою циркуля при умові, що у площині побудов накреслена пряма. - Доп. АН УССР, 1965, № 12, с. 1547-1550.
32. *Мартиненко В. С.* Теорема Маскерони в геометрии Лобачевского. - Доп. АН УССР, 1982, серія А, №1, с. 22-27.

Vladimir Martynenko

National Technic University "KPI Kiev , Ukraine

On the solvability of square-radical problems assigned to construct the non-euclidian geometry in lobachevsky's plane by means of a compass.

(similar to mascheroni's constructions in the plane of the euclidian geometry) .

The Masceroni theorem is proved for Lobachevsky's geometry: if in Lobachevsky's geometry any construction problem is solvable by means of a compasses and a rule, it is solvable by means of a compasses only as well. The method of inversion relative to the circle in a plane of the non-Euclidean geometry is used as a proof.