

ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 4, No. 2, 2011

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

Праці міжнародного
геометричного центру

Том.4, No. 2, 2011

Труды международного
геометрического центра

Том.4, No. 2, 2011

Proceedings of the International
Geometry Center

Vol. 4, No. 2, 2011

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Odessa
"Екологія"
2012

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі математичних наук (перелік № 1-05/3, Бюлетень ВАК України №4, 2010, 14.04.2010, ISSN 2072-9812)

Головний редактор: Володимир Шарко

Заступники головного редактора:

Й. Красильщик,
І. Микитюк.

Відповідальні редактори:

Н. Коновенко,
В. Кузаконь.

Відповідальні секретарі:

О. Мойсеєнок,
Ю. Федченко.

Редакційна колегія:

Алексеевский Д.	Кац І.	Сергєєва О.
Андерсен Я.	Кіріченко В.	Страуме Е.
Балан В.	Кругліков Б.	Толстіхіна А.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Мілка А.	Фоменко А.
Діскант В.	Машков О.	Фоменко В.
Євтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожний В.	Пришляк О.	Шуригін В.
Зарічний М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ібрагимов Н.	Рубцов В.	

**Адреса редакції: Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна**

Главный редактор: Владимир Шарко

Заместители главного редактора:

Иосиф Красильщик,
Игорь Микитюк.

Ответственные редакторы:

Надежда Коновенко,
Виктор Кузаконь.

Ответственные секретари:

Алексей Мойсеенок,
Юлия Федченко.

Редакционная коллегия:

Алексеевский Д.	Кац И.	Сергеева А.
Андерсен Я.	Кириченко В.	Страуме Э.
Балан В.	Кругликов Б.	Толстихина Г.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Милка А.	Фоменко А.
Дискант В.	Машков О.	Фоменко В.
Евтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожный В.	Пришляк А.	Шурыгин В.
Заричный М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ибрагимов Н.	Рубцов В.	

Editor-in-Chief: Vladimir Sharko

Deputies of Editor-in-Chief:

Joseph Krasilshchik,
Igor Mikityuk.

Managing Editors:

Nadezhda Konovenko,
Viktor Kuzakon.

Executive Secretary:

Alexei Moysyeyenok,
Juliya Fedchenko.

Editorial Board:

Dmitry Alekseevsky	Nail Ibragimov	Vladimir Roubtsov
Ian Anderson	Izrail Kats	Alexandra Sergeeva
Vladimir Balan	Vadim Kirichenko	Alexander Shelekhov
Taras Banah	Boris Kruglikov	Vadim Shurygin
Valentin Diskant	Grigory Litvinov	Eldar Straume
Leonid Evtushik	Oleg Mashkov	Galina Tolstikhina
Sergey Fedosov	Anatolii Milka	Bronislav Yakubchik
Anatolii Fomenko	Petr Mormul	Wassily Zadorozhnyi
Valentin Fomenko	Alexander Prishlyak	Mikhail Zarichnyi
Dmitrii Gurevich	Maido Rahula	

Зміст

Кириченко В.Ф., Кузаконь В.М. Обобщенные классы Грея-Хервеллы и голоморфные геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур – II	6
Е.Б. Балакирева Сравнение двух видов конечных переносов векторов риманова пространства	16
О.І. Баран, В.М. Дармосюк Конструктивні задачі, як засіб активізації пізнавальної діяльності при вивченні математики	22
Савченко О.Г. Ітерації гіперпросторів розмитих метричних просторів	36
В.А. Киосак, Е.Е. Чепурная Инвариантные преобразования с сохранением геодезических	43
А.С. Магула, Мячиков А. В. Геометрия многомерных пространств. Правило построения трёхмерных проекций многомерных пространств	50

Обобщенные классы Грея-Хервеллы и голоморфные геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур – II

Кириченко В.Ф. Кузаконь В.М.

Аннотация Эта работа является непосредственным продолжением своей первой части, [1]. Мы будем ссылаться на результаты и библиографию работы [1], не оговаривая это особо. Нумерация результатов и библиографии в настоящей работе продолжает нумерацию ч. 1. В настоящей работе изучены особенности голоморфных геодезических преобразований обобщенных почти эрмитовых структур, в частности, построены некоторые инварианты таких преобразований. Выявлены классы структур, не допускающих голоморфных геодезических преобразований, а также классы, инвариантные относительно таких преобразований.

Ключевые слова Классы Грея-Хервеллы, почти эрмитовы структуры

Пусть $(M, J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — GAH -многообразие, $g \rightarrow \tilde{g}$ — h -геодезическое преобразование его GAH -структуры, f — оператор геодезической деформации, ψ — форма геодезического искажения, ζ — вектор геодезического искажения.

Предложение 1 *Во введенных обозначениях*

$$1) f \circ J = J \circ f; \quad 2) \langle\langle fX, Y \rangle\rangle = \langle\langle X, fY \rangle\rangle; \quad X, Y \in X(M). \quad (1)$$

Доказательство $\tilde{g}(JX, Y) = g(JX, fY) = -g(X, J(fY))$. С другой стороны, $\tilde{g}(JX, Y) = -\tilde{g}(X, JY) = -g(X, f(JY))$. Сравнивая, с учетом невы-

рожденности метрики получаем (1₁). Далее,

$$\begin{aligned}\langle\langle fX, Y \rangle\rangle &= \langle fX, Y \rangle + \iota\langle J^3(fX), Y \rangle = \langle X, fY \rangle + \iota\langle f \circ J^3X, Y \rangle = \\ &= \langle X, fY \rangle + \iota\langle J^3X, fY \rangle = \langle\langle X, fY \rangle\rangle.\end{aligned}$$

Предложение 2 При h -геодезическом преобразовании GAH -структуры ее виртуальный и структурный тензоры преобразуются по закону

$$1)\tilde{B}(X, Y) = B(X, Y) - a\langle\langle \zeta, Y \rangle\rangle X; \quad 2)\tilde{C}(X, Y) = C(X, Y). \quad (2)$$

Доказательство Прежде всего, заметим, что формулу (3) можно переписать в форме

$$\tilde{\nabla}_X(J)Y = \nabla_X(J)Y - \langle\langle J\zeta, Y \rangle\rangle X. \quad (3)$$

С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned}2\tilde{B}(X, Y) &= \tilde{\nabla}_{JX}(J)Y - \tilde{\nabla}_X(J)(JY) = \\ &= \nabla_{JX}(J)Y - \langle\langle J\zeta, Y \rangle\rangle JX - \nabla_X(J)(JY) + \langle\langle J\zeta, JY \rangle\rangle X = \\ &= 2B(X, Y) - 2a\langle\langle \zeta, Y \rangle\rangle X.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе соотношение.

Замечание 1 Из (5₄) легко следует, что условие $C_0 = 0$ равносильно кососимметричности структурного тензора по ковариантным аргументам, в частности, инвариантно при h -геодезических преобразованиях.

Изучим теперь, как меняется при h -геодезическом преобразовании обобщенный вектор Ли. Прежде всего, отметим, что вектор η , дуальный форме $\delta\Omega$, вычисляется по формуле

$$\eta = -\alpha g^{ij} \nabla_{e_j}(J)e_i.$$

В самом деле, как уже отмечалось, $\nabla_X(\Omega)(Y, Z) = \alpha\langle\nabla_X(J)Y, Z\rangle$. С учетом этого обстоятельства, а также формулы (4₂),

$$\delta\Omega(Y) = g^{ij} \nabla_{e_j}(\Omega)(Y, e_i) = \alpha g^{ij} \langle\nabla_{e_j}(J)Y, e_i\rangle = -\alpha g^{ij} \langle\nabla_{e_j}(J)e_i, Y\rangle.$$

Заметим, что при h -геодезическом преобразовании вектору η соответствует вектор $\tilde{\eta} = -\alpha \tilde{g}^{ij} \tilde{\nabla}_{e_j}(J)e_i$, дуальный 1-форме $\tilde{\delta}\tilde{\Omega}$, где $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ — произвольный базис пространства $T_p(M)$, $p \in M$ (все тензорные поля представляются своими значениями в точке p). Согласно определению оператора

геодезической деформации, $\tilde{g}_{ij} = g_{ik}f_j^k$. Поскольку $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, отсюда следует, что $\tilde{g}^{ij} = (f^{-1})_k^i g^{kj}$. С учетом (3) имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta} &= -\alpha(f^{-1})_k^i g^{kj} \tilde{\nabla}_{e_j}(J)e_i = -\alpha(f^{-1})_k^i g^{kj} (\nabla_{e_j}(J)e_i - \langle \langle J\zeta, e_i \rangle \rangle e_j) = \\ &= -\alpha \{ g^{kj} \nabla_{e_j}(J)((f^{-1})e_k) - g^{kj} \langle \langle J\zeta, (f^{-1})e_k \rangle \rangle e_j \} = \\ &= -\alpha \{ g^{kj} \nabla_{e_j}(J)((f^{-1})e_k) - g^{kj} \langle J\zeta, (f^{-1})e_k \rangle e_j - g^{kj} \langle J^4\zeta, (f^{-1})e_k \rangle J e_j \} = \\ &= -\alpha \{ g^{kj} \nabla_{e_j}(J)((f^{-1})e_k) - e^j (f^{-1} \circ J)\zeta e_j - e^j (J \circ f^{-1})\zeta e_j \} = \\ &= -\alpha \{ g^{kj} \nabla_{e_j}(J)((f^{-1})e_k) - 2f^{-1}(J\zeta) \}.\end{aligned}$$

Очевидно, если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис пространства $T_p(M)$ как \mathbf{C} -модуля, это соотношение переписывается в форме

$$\tilde{\eta} = \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{ -\alpha \nabla_{e_a}(J)(f^{-1}e_a) + \nabla_{J e_a}(J)(f^{-1}(J e_a)) \} + 2\alpha f^{-1}(J\zeta).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}J(\tilde{\eta}) &= -\alpha \left(\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{ -\nabla_{e_a}(J)(J \circ f^{-1}e_a) + \nabla_{J e_a}(J)(f^{-1}e_a) \} \right) + \\ &+ 2f^{-1}(\zeta) = -2\alpha \left(\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, f^{-1}e_a) \right) + 2f^{-1}(\zeta).\end{aligned}\quad (4)$$

Лемма 1 *Во введенных обозначениях, $(\tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J)^\# = -J\tilde{\eta}$, где $\#$ — оператор дуальности.*

Доказательство

$\tilde{g}((\tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J)^\#, X) = \tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J(X) = \tilde{g}(\tilde{\eta}, JX) = -\tilde{g}(J\tilde{\eta}, X)$. В силу невырожденности метрики получаем требуемое.

С учетом этой Леммы и (4),

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= -\frac{\alpha}{n-1} (\tilde{\delta}\tilde{\Omega} \circ J)^\# = \frac{\alpha}{n-1} J(\tilde{\eta}) = \\ &= -\frac{2}{n-1} \sum_{a=1}^n (\|e_a\|^2 B(e_a, f^{-1}e_a)) + \frac{2\alpha}{n-1} f^{-1}(\zeta).\end{aligned}\quad (5)$$

Введем в рассмотрение тензор B^* , сопряженный тензору B , формулой

$$\langle \langle B(X, Y), Z \rangle \rangle = \langle \langle X, B^*(Y, Z) \rangle \rangle; \quad X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Предложение 3 *При h -геодезическом преобразовании ГАН-структуры тензор B^* преобразуются по закону*

$$\tilde{B}^*(Y, Z) = f^{-1} \circ B^*(Y, fZ) - \alpha \langle \langle Y, \zeta \rangle \rangle Z; \quad Y, Z \in \mathbf{X}(M).\quad (6)$$

Доказательство С учетом (2₂),

$$\begin{aligned} \tilde{h}(X, \tilde{B}^*(Y, Z)) &= \tilde{h}(\tilde{B}(X, Y), Z) = \tilde{h}(B(X, Y), Z) - \alpha\langle\langle\zeta, Y\rangle\rangle\tilde{h}(X, Z) = \\ &= \langle\langle B(X, Y), fZ\rangle\rangle - \alpha\langle\langle\zeta, Y\rangle\rangle\langle\langle X, fZ\rangle\rangle = \\ &= \langle\langle X, B^*(Y, fZ)\rangle\rangle - \alpha\langle\langle\zeta, Y\rangle\rangle\langle\langle X, fZ\rangle\rangle, \end{aligned}$$

и, поскольку $\tilde{h}(X, \tilde{B}^*(Y, Z)) = h(X, f \circ \tilde{B}^*(Y, Z))$, с учетом невырожденности метрики получаем (6).

Очевидно, $B^*(Y, Z) = -B^*(Z, Y)$, поскольку, в силу (5),

$$\begin{aligned} \langle\langle X, B^*(Y, Z)\rangle\rangle &= \langle\langle B(X, Y), Z\rangle\rangle = -\overline{\langle\langle Y, B(X, Z)\rangle\rangle} = \\ &= -\langle\langle B(X, Z), Y\rangle\rangle = -\langle\langle X, B^*(Z, Y)\rangle\rangle, \end{aligned}$$

а метрика невырождена. Аналогичным свойством обладает тензор \tilde{B}^* , сопряженный относительно формы \tilde{h} виртуальному тензору \tilde{B} преобразованной $GA\mathcal{H}$ -структуры. С учетом этого замечания и (6),

$$B^*(Y, fY) = \alpha\langle\langle Y, \zeta\rangle\rangle fY; \quad Y \in \mathcal{X}(M). \quad (7)$$

Поляризация этого соотношения приводит к тождеству

$$B^*(Y, fZ) + B^*(Z, fY) = \alpha\langle\langle Y, \zeta\rangle\rangle fZ + \langle\langle Z, \zeta\rangle\rangle fY.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle\langle B(X, Y), fZ\rangle\rangle + \langle\langle B(X, Z), fY\rangle\rangle &= \langle\langle X, B^*(Y, fZ)\rangle\rangle + \\ + \langle\langle X, B^*(Z, fY)\rangle\rangle &= \alpha\langle\langle\zeta, Y\rangle\rangle\langle\langle X, fZ\rangle\rangle + \langle\langle\zeta, Z\rangle\rangle\langle\langle X, fY\rangle\rangle. \end{aligned}$$

С учетом (5₃) и невырожденности метрики отсюда находим, что

$$f \circ B(X, Y) - B(X, fY) = \alpha\langle\langle\zeta, Y\rangle\rangle fX + \langle\langle fX, Y\rangle\rangle\zeta. \quad (8)$$

Замечание 2 Аналогично формуле (8) доказываемся, что $f \circ C(X, Y) - C(X, fY) = 0$, и, таким образом, структурный тензор f -линеен по второму аргументу.

Положив в (8) $X = e_a$, $Y = f^{-1}(e_a)$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 f \circ B(e_a, f^{-1}e_a) &= \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, e_a) + \\ + \alpha \left(\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \{ \langle\langle\zeta, f^{-1}e_a\rangle\rangle f e_a + \langle\langle f e_a, f^{-1}e_a\rangle\rangle \zeta \} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что с учетом Леммы 2

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \langle \zeta, f^{-1}e_a \rangle \rangle f e_a &= f \left(\sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \langle \zeta, f^{-1}e_a \rangle \rangle e_a \right) = \zeta, \\ \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 \langle \langle f e_a, f^{-1}e_a \rangle \rangle \zeta &= n\zeta, \end{aligned}$$

в силу чего предыдущее соотношение можно записать в форме

$$-\frac{1}{n-1} \sum_{a=1}^n \|e_a\|^2 B(e_a, f^{-1}e_a) = f^{-1} \left(\operatorname{tr} B - \frac{n+1}{n-1} \alpha \zeta \right).$$

Подставляя это соотношение в (5), получим окончательно:

Предложение 4 При h -геодезическом преобразовании $GA\mathcal{H}$ -структуры обобщенный вектор Ли преобразуется по закону

$$\tilde{\xi} = f^{-1} \left(\xi - \frac{\alpha n}{n-1} \zeta \right). \quad (9)$$

Теперь мы можем ввести несколько важных инвариантов h -геодезического преобразования $GA\mathcal{H}$ -структуры. Прежде всего, согласно (2₂), таким инвариантом является структурный тензор C $GA\mathcal{H}$ -многообразия. Далее, согласно (9), $\zeta = \frac{n-1}{n} \alpha (\xi - f\tilde{\xi})$. Подставляя это в (2₁), получим, что

$$\tilde{B}(X, Y) - \frac{n-1}{n} \langle \langle f\tilde{\xi}, Y \rangle \rangle X = B(X, Y) - \frac{n-1}{n} \langle \langle \xi, Y \rangle \rangle X.$$

Замечая, что

$$\langle \langle f\tilde{\xi}, Y \rangle \rangle = \langle \langle \tilde{\xi}, fY \rangle \rangle = \tilde{h}(\tilde{\xi}, Y),$$

получим окончательно, что

$$\tilde{B}(X, Y) - \frac{n-1}{n} \tilde{h}(\tilde{\xi}, Y)X = B(X, Y) - \frac{n-1}{n} h(\xi, Y)X. \quad (10)$$

Наконец, применяя оператор J^3 к обеим частям (10) и (2₂) и почленно вычитая эти тождества, с учетом Следствия из Теоремы 7 получим:

$$\tilde{\nabla}_X(J)Y - \frac{n-1}{n} \tilde{h}J^3\tilde{\xi}, Y)X = \nabla_X(J)Y - \frac{n-1}{n} h(J^3\xi, Y)X. \quad (11)$$

Соотношения (2₂), (10) и (11) показывают, что тензоры $\beta(X, Y) = B(X, Y) - \frac{n-1}{n} \langle \langle \xi, Y \rangle \rangle X$, $C(X, Y)$ и $\mu(X, Y) = \nabla_X(J)Y - \frac{n-1}{n} \langle \langle J^3\xi, Y \rangle \rangle X$ являются инвариантами h -геодезических преобразований $GA\mathcal{H}$ -структуры.

Пусть M — гладкое многообразие, на котором фиксирована $GA\mathcal{H}$ -структура $\mathcal{S} = \{J, g\}$, и пусть $g \rightarrow \tilde{g}$ — ее h -геодезическое преобразование,

f — оператор геодезической деформации, ζ — вектор геодезического искажения. В силу (9), $\xi = f(\tilde{\xi}) + \frac{\alpha n}{n-1}\zeta$. С другой стороны, ясно, что обратный переход $\tilde{g} \rightarrow g$ также является h -геодезическим преобразованием, которому соответствует оператор геодезической деформации f^{-1} и вектор геодезического искажения $-\zeta$. В силу (9), $\xi = f\left(\tilde{\xi} + \frac{\alpha n}{n-1}\zeta\right)$, и, таким образом, $f^{-1}(\zeta) = \zeta$, т.е. $f(\zeta) = \zeta$. Таким образом, ζ — неподвижный вектор эндоморфизма f . В силу Предложения 1, $\|\zeta\|^2 = \psi(\zeta) = 0$, т.е. ζ — изотропный вектор. Доказано

Предложение 5 *Вектор геодезического искажения GAH-структуры изотропен и является неподвижным вектором оператора геодезической деформации.*

Значение этого утверждения хорошо иллюстрируется тем, что его тривиальным следствием является Теорема 2 о геодезической жесткости AН-структур со знакоопределенной метрикой. Кроме того, с учетом второй части Предложения 7, соотношение (9) можно переписать в форме $\zeta = \frac{n-1}{n}\alpha(f^{-1}\xi - \tilde{\xi})$. Прodelывая те же выкладки, что и выше, получим, что тензор $b(X, Y) = B(X, Y) - \langle\langle f^{-1}\xi, Y \rangle\rangle X$ также является инвариантом h -геодезических преобразований. Но тогда таким же инвариантом будет и тензор $b - \beta$, т.е. тензор $\delta(X, Y) = \langle\langle \frac{n-1}{n}\xi - f^{-1}\xi, Y \rangle\rangle X$. Доказана

Теорема 1 *Тензоры*

$$\begin{aligned} \beta(X, Y) &= B(X, Y) - \frac{n-1}{n}\langle\langle \xi, Y \rangle\rangle X, \\ (X, Y) &= C(X, Y), \\ \delta(X, Y) &= \langle\langle \frac{n-1}{n}\xi - f^{-1}\xi, Y \rangle\rangle X, \\ \mu(X, Y) &= \nabla_X(J)Y - \frac{n-1}{n}\langle\langle J^3\xi, Y \rangle\rangle X \end{aligned}$$

являются инвариантами h -геодезических преобразований GAH-структуры.

Пусть M — гладкое многообразие, на котором фиксирована GAH-структура $\mathcal{S} = \{J, g\}$, и пусть $g \rightarrow \tilde{g}$ — ее h -геодезическое преобразование. Заметим, что из (6) следует, что

$$\begin{aligned} \langle\langle X, B^*(Y, Z) \rangle\rangle &= \langle\langle B(X, Y), Z \rangle\rangle = \\ &= \langle\langle B_0(X, Y), Z \rangle\rangle + \frac{1}{2}(\langle\langle \xi, Y \rangle\rangle\langle\langle X, Z \rangle\rangle - \langle\langle X, Y \rangle\rangle\langle\langle \xi, Z \rangle\rangle), \end{aligned}$$

откуда, в силу невырожденности метрики,

$$B^*(Y, Z) = B_0^*(Y, Z) + \frac{1}{2}(\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle Z - \langle\langle Z, \xi \rangle\rangle Y); \quad Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Положив здесь $Z = fY$, получим:

$$B^*(Y, fY) = B_0^*(Y, fY) + \frac{1}{2}(\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle fY - \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y).$$

Пусть, в частности, $B_0 = 0$. С учетом Таблицы 1 это означает, что структура \mathcal{S} принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ (или любому его подклассу). В этом случае

$$B^*(Y, fY) = \frac{1}{2}(\langle\langle Y, \xi \rangle\rangle fY - \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y), \quad Y \in \mathfrak{X}(M),$$

или, с учетом (7),

$$\langle\langle Y, \xi - 2\alpha\zeta \rangle\rangle fY = \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y, \quad Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (12)$$

Фиксируем точку $p \in M$ и условимся, что все тензорные поля представляются своими значениями в этой точке. Пусть эндоморфизм f в этой точке скалярен. Из (12) следует, что в этой точке

$$\langle Y, \zeta \rangle Y + \langle J^3 Y, \zeta \rangle JY = 0.$$

Выбирая в качестве Y элементы какого-либо базиса пространства $T_p(M)$, не содержащего собственных векторов эндоморфизма J , в силу линейной независимости векторов Y и JY и невырожденности метрики получим, что в этой точке $\zeta = 0$.

Пусть теперь эндоморфизм f не является скалярным в точке p . Рассмотрим два случая.

1) $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Выберем в $T_p(M)$, рассматриваемом как \mathbf{C} -модуль, базис, состоящий из несобственных векторов эндоморфизма f . Если Y — один из векторов такого базиса, то векторы Y и fY будут \mathbf{C} -линейно независимыми, и, в силу (12),

$$\langle\langle fY, \xi \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle Y, \xi - 2\alpha\zeta \rangle\rangle = 0.$$

В силу произвола в выборе элемента базиса и невырожденности метрики из первого соотношения вытекает, что $\xi = 0$, а из второго — что $\zeta = 0$ в каждой точке многообразия, т.е. преобразование структуры тривиально.

2) $\mathbf{K} = \mathbf{D}$. Тогда соотношение (12) в точке $p \in M$ примет вид:

$$\langle\langle Y, \xi - 2\zeta \rangle\rangle fY = \langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y; \quad Y \in T_p(M). \quad (13)$$

Если Y — несобственный вектор эндоморфизма f , соотношение (13) возможно лишь в случае, когда элемент $\langle\langle Y, \xi - \zeta \rangle\rangle$, а значит, и элемент $\langle\langle fY, \xi \rangle\rangle Y$ — необратимые элементы кольца \mathbf{D} , и, таким образом,

$$\langle Y, \xi - 2\zeta \rangle = \pm \langle JY, \xi - 2\zeta \rangle; \quad \langle fY, \xi \rangle = \pm \langle (J \circ f)Y, \xi \rangle.$$

В силу произвола в выборе $Y \in T_p(M)$ отсюда следует, что

$$J\xi = \pm\xi; \quad J(\xi - 2\zeta) = \pm(\mp)(\xi - 2\zeta).$$

В зависимости от сочетания знаков возможны случаи:

1. $J\xi = \pm\xi; \quad J\zeta = \pm\zeta;$
2. $J\xi = \pm\xi; \quad \xi = \zeta \pm J\zeta.$

В первом случае соотношение (13) принимает вид

$$\langle Y, \xi - 2\zeta \rangle f(Y \mp JY) = \langle fY, \xi \rangle (Y \mp JY).$$

Рассмотрим это соотношение для элементов базиса пространства $T_p(M)$, состоящего из векторов, не являющихся собственными для эндоморфизмов $f \circ (\text{id} \pm J)$. В силу линейной независимости векторов $Y \pm JY$ и $f(Y \pm JY)$ и невырожденности метрики получаем как и выше, что $\xi = \zeta = 0$.

Во втором случае соотношение (13) принимает вид

$$\langle Y, -\zeta \pm J\zeta \rangle f(Y \pm JY) = \langle fY, \zeta \pm J\zeta \rangle (Y \pm JY).$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, снова получаем, что $\zeta = 0$. Таким образом, во всех случаях преобразование GAH -структуры рассматриваемого класса тривиально, и мы приходим к следующему результату:

Предложение 6 *GAH -структура класса $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ (а также любого его подкласса) не допускает нетривиальных h -геодезических преобразований.*

Теперь рассмотрим случай, когда $B_1 = 0$. С учетом Таблицы 1 это означает, что структура \mathcal{S} принадлежит классу $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ или любому его подклассу V . В этом случае $\xi = 0$, и, с учетом Предложения 4, $\tilde{\xi} = -\frac{\alpha n}{n-1} f^{-1}(\zeta)$. Используя Предложение 2 и Таблицу 1, мы видим, что преобразованная структура принадлежит классу $V \oplus W_4$. При этом она принадлежит классу V в том и только том случае, когда $\zeta = 0$, т.е. когда h -геодезическое преобразование тривиально. Таким образом, доказано

Предложение 7 *ГАН-структура класса $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, а также любого его подкласса, при h -геодезическом преобразовании переходит в структуру класса $V \oplus W_4$. При этом она переходит в структуру класса V тогда и только тогда, когда h -геодезическое преобразование тривиально.*

Замечание 3 *Из Предложения 2 и Таблицы 1 немедленно следует, что классы $W_3 \oplus W_4$ и $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантны относительно h -геодезических преобразований. Структура класса $V = W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$, вообще говоря, может перейти в структуру любого класса. При этом она переходит в структуру класса V тогда и только тогда, когда ее структурный тензор f -билинеен. В самом деле, структура класса $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ характеризуется тем, что $C_1 = 0$, т.е.*

$$\langle\langle C(X, Y), Z \rangle\rangle + \langle\langle C(Y, Z), X \rangle\rangle + \langle\langle C(Z, X), Y \rangle\rangle = 0.$$

С другой стороны, преобразованная структура будет принадлежать этому классу тогда и только тогда, когда

$$\langle\langle C(X, Y), fZ \rangle\rangle + \langle\langle C(Y, Z), fX \rangle\rangle + \langle\langle C(Z, X), fY \rangle\rangle = 0.$$

Заменяя в первом соотношении Z на fZ и используя во втором соотношении f -линейность структурного тензора по второму аргументу (см. Замечание 3), а также (I_2) , почленно вычтем полученные соотношения:

$$\langle\langle C(fZ, X), Y \rangle\rangle - \langle\langle f \circ C(Z, X), Y \rangle\rangle = 0,$$

откуда следует, что $C(fZ, X) = f \circ C(Z, X)$, $Z, X \in X(M)$.

Объединяя результаты, полученные в Предложениях 6 и 7, с учетом сделанного замечания получаем следующее описание поведения всех обобщенных классов Грея-Хервеллы при h -геодезических преобразованиях ГАН-структур:

Теорема 2 *ГАН-структуры классов $\{0\}$, W_1 , W_2 , W_4 , $W_1 \oplus W_2$, $W_1 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$ не допускают нетривиальных h -геодезических преобразований. ГАН-структуры классов W_3 , $W_1 \oplus W_3$, $W_2 \oplus W_3$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ при h -геодезических отображениях переходят в ГАН-структуры классов $W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$, $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$, соответственно. При этом ГАН-структура каждого из этих четырех классов переходит в структуру того же класса тогда и только тогда, когда h -геодезическое*

преобразование тривиально. Структура класса $W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$ может перейти в структуру любого класса. При этом она переходит в структуру того же класса тогда и только тогда, когда структурный тензор f -билинеен. Классы $W_3 \oplus W_4$ и $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4$ инвариантны относительно h -геодезических преобразований.

Список литературы

1. Кириченко В.Ф., Кузаконь В.М., Тенюх К.М. *Обобщенные классы Грея-Хервеллы и голоморфные геодезические преобразования обобщенных почти эрмитовых структур*, I. Proc. Inter. Geom. Center, v.1, № 1-2, 2008, p.23-39.

Сравнение двух видов конечных переносов векторов риманова пространства

Балакирева Елена Борисовна

Аннотация В статье представлены различные по своей сути конечные переносы векторов, которые соответствуют двум изоморфным группам и приводят к различному представлению тензора кривизны риманова пространства.

Ключевые слова Деформированная группа диффеоморфизмов · Канонический перенос · Параллельный перенос · Тензор кривизны ·

1 Постановка задачи

В римановом пространстве естественным образом задаются конечные переносы векторов вдоль геодезических. Это классические параллельные переносы [1], и так называемые канонические переносы, которые были определены в работе [2], причем в инфинитезимальном случае они совпадают. Будучи дополненные линейными преобразованиями реперов, множества таких переносов замыкаются в изоморфные друг другу группы, которые будем обозначать DP и DT соответственно.

Группа DT является группой автоморфизмов деформированной группы диффеоморфизмов T^{gH} и для неё в работе [3] была доказана теорема, согласно которой требование сохранения длины произвольного вектора при трансляциях группы DT становится условием плоского пространства. Это происходит вследствие выполнения уравнения Маурера-Картана для группы T^{gH} . Поэтому группой DT кривизна, в духе Эрлангенской программы

Ф.Клейна [4], может быть описана с помощью тензора, характеризующего изменение длины векторов при конечных переносах.

Группа DP даёт классическое описание кривизны, а именно, определение тензора кривизны с помощью процедуры параллельного переноса вектора вдоль замкнутой кривой в римановом пространстве.

В связи с этим представляется интересным провести аналогию между конечными переносами двух изоморфных групп и получить сугубо групповое описание кривизны группой DP .

2 Канонические конечные переносы векторов

Деформированная группа диффеоморфизмов T^{gH} пространства M задаёт своим законом умножения перенос вектора θ из точки x' в точку x [5] (далее используются обозначения, принятые в работе [5]):

$$\theta^\mu(x) := \lambda(x, \tilde{t})^\mu_\nu \theta^\nu(x'), \quad (1)$$

где $\tilde{t} = x' - x$ - конечное смещение; $x, x' \in M$. В координатном базисе ∂_ν (для него выбраны индексы из греческого алфавита) функции

$$\lambda(x, \tilde{t})^\mu_\nu := \partial_\nu H^\mu(x, \tilde{t})$$

однозначно определяются через функции деформации H^μ , с помощью которых построена группа T^{gH} (здесь и далее индекс с волной обозначает дифференцирование по параметру \tilde{t}).

Для инфинитезимальных смещений $\tilde{t} = \tau$ перенос (1) совпадает с параллельным переносом вектора θ в пространстве афинной связности с коэффициентами связности

$$\Gamma(x)^\mu_{\nu\rho} = \partial_\nu \lambda(x, \tilde{t})^\mu_\rho|_{\tilde{t}=0} = \partial_{\tilde{t}^\rho}^2 H^\mu(x, \tilde{t}),$$

из определения которых сразу следует условие отсутствия кручения: $\Gamma(x)^\mu_{\nu\rho} = \Gamma(x)^\mu_{\rho\nu}$.

Для канонических групп T^{gH} отображение деформации H^μ , а значит и конечный перенос (1), который в данном случае будем называть **каноническим**, определяется через коэффициенты $\Gamma(x)^\mu_{\nu\rho}$ и для вектора τ , касательного к геодезической, соединяющей точки x и x' , совпадает с параллельным переносом вдоль неё, а для остальных векторов не совпадает, вследствие девиации геодезических [2].

Определим тензор, характеризующий изменение длины векторов при трансляциях группы DT :

$$G_\lambda(x, \tilde{t})_{\mu\nu} := \lambda^{-1}(x, \tilde{t})^\rho_\mu g(x')_{\rho\sigma} \lambda^{-1}(x, \tilde{t})^\sigma_\nu. \quad (2)$$

В римановом пространстве с метрикой $g(x)_{\mu\nu}$ условие сохранения длины произвольного вектор при конечном переносе

$$G_\lambda(x, \tilde{t})_{\mu\nu} = g(x)_{\mu\nu}, \quad (3)$$

вследствие соотношения

$$P_\lambda(x, \tilde{t})_{\rho\nu}^\mu := \partial_{\tilde{\rho}} \lambda(x, \tilde{t})_\nu^\mu - \partial_{\tilde{\nu}} \lambda(x, \tilde{t})_\rho^\mu = 0, \quad (4)$$

является условием равенства нулю тензора кривизны

$$R(x)_{\sigma\delta\rho}^\eta = 0.$$

Причём, следует отметить, что уравнение (4) является структурным уравнением группы T^{gH} и его выполнение является необходимым условием существования данной группы.

Действительно, из соотношения (3) сразу следует условие согласованности связности с метрикой

$$\partial_{\tilde{\delta}} G_\lambda(x, \tilde{t})_{\mu\nu} |_{\tilde{t}=0} = 0. \quad (5)$$

Дифференцируя непосредственно уравнения (2), условие (5) можно записать в виде:

$$\Gamma(x)_{\mu\nu\delta}^{\cdot} + \Gamma(x)_{\nu\mu\delta}^{\cdot} = \partial_{\tilde{\delta}} g(x')_{\mu\nu} \quad (6)$$

(точками здесь и далее обозначена операция опускания индекса, которая осуществляется с помощью тензора $g(x)_{\mu\nu}$). Функции $\Gamma(x)_{\nu\rho}^\mu$, из-за отсутствия кручения и с учётом соотношения (6), приобретают значение символов Кристоффеля:

$$\Gamma(x)_{\rho\sigma}^\eta = \frac{1}{2} g(x)^{\eta\nu} (\partial_\rho g(x)_{\sigma\nu} + \partial_\sigma g(x)_{\rho\nu} - \partial_\nu g(x)_{\rho\sigma}).$$

Тогда, вследствие выполнения соотношения (4) для группы T^{gH} , выражение символа Кристоффеля через метрический тензор

$$g(x')_{\rho\sigma} = \lambda(x, \tilde{t})_\rho^\mu \lambda(x, \tilde{t})_\sigma^\nu g(x)_{\mu\nu} \quad (7)$$

и его производные $\partial_{\tilde{\delta}} g(x')_{\rho\sigma} = g(x)_{\mu\nu} (\lambda_\sigma^\nu \partial_{\tilde{\delta}} \lambda_\rho^\mu + \lambda_\rho^\mu \partial_{\tilde{\delta}} \lambda_\sigma^\nu)$, а значит вычисление символа Кристоффеля в точке x'

$$\Gamma(x')_{\rho\sigma}^\eta = \frac{1}{2} g(x')^{\eta\nu} [2\lambda(x, \tilde{t})_\nu^\delta \partial_{\tilde{\rho}} \lambda(x, \tilde{t})_\sigma^\mu] g(x)_{\mu\delta},$$

даст нам следующее выражение:

$$\partial_{\tilde{\rho}} \lambda(x, \tilde{t})_{\sigma}^{\mu} = \lambda(x, \tilde{t})_{\nu}^{\mu} \Gamma(x')_{\rho\sigma}^{\nu}. \quad (8)$$

Условие его интегрируемости

$$\lambda(x, \tilde{t})_{\eta}^{\mu} (\partial_{\delta} \Gamma(x')_{\rho\sigma}^{\eta} - \partial_{\rho} \Gamma(x')_{\delta\sigma}^{\eta} + \Gamma(x')_{\delta\nu}^{\eta} \Gamma(x')_{\rho\sigma}^{\nu} - \Gamma(x')_{\rho\nu}^{\eta} \Gamma(x')_{\delta\sigma}^{\nu}) = 0 \quad (9)$$

и дает равенство нулю тензора кривизны.

Из этого следует, что условие сохранения длины произвольного вектора при канонических переносах, вследствие равенства нулю тензора P_{λ} , является условием плоского пространства. Значит, вся информация о кривизне содержится в симметричном тензоре G_{λ} . В работе [2] было получено следующее выражение:

$$\partial_{\tilde{\rho}} G_{\lambda}(x, \tilde{t})_{\mu\nu} |_{\tilde{t}=0} = -\frac{2}{3} R(x)_{\mu\sigma\nu\rho}. \quad (10)$$

3 Параллельные конечные переносы векторов

Рассмотрим конечный **параллельный** перенос

$$\theta^{\mu}(x) := \pi(x, \tilde{t})_{\nu}^{\mu} \theta^{\nu}(x') \quad (11)$$

вектора θ вдоль геодезической. По определению, длина векторов при переносе (11) сохраняется:

$$G_{\pi}(x, \tilde{t})_{\mu\nu} = g(x)_{\mu\nu},$$

Здесь, по аналогии с группой DT , определим тензор

$$G_{\pi}(x, \tilde{t})_{\mu\nu} := \pi^{-1}(x, \tilde{t})_{\mu}^{\rho} g(x')_{\rho\sigma} \pi^{-1}(x, \tilde{t})_{\nu}^{\sigma}. \quad (12)$$

Тогда для искривлённого пространства является необходимым отличие от нуля тензора

$$P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\rho\nu}^{\mu} := \partial_{\tilde{\rho}} \pi(x, \tilde{t})_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \pi(x, \tilde{t})_{\rho}^{\mu} \neq 0. \quad (13)$$

Условие отсутствия кручения при этом уже не выполняется автоматически, а его в римановом пространстве нужно дополнительно налагать:

$$P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\rho\nu}^{\mu} |_{\tilde{t}=0} = 0.$$

Покажем, что в данном случае именно тензор (13) будет содержать информация о кривизне. Для этого проведём рассуждения, аналогичные предыдущим.

Запишем значение символов Кристоффеля в точке x' с учётом требования (13):

$$\Gamma(x')_{\sigma\rho}^{\kappa} = \frac{1}{2}g(x')^{\kappa\delta}[\pi_{\rho}^{\nu}P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\sigma\delta}^{\mu} + \pi_{\sigma}^{\nu}P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\rho\delta}^{\mu} + \frac{1}{2}\pi_{\delta}^{\nu}(P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\sigma\rho}^{\mu} + 2\partial_{\tilde{t}}\pi_{\sigma}^{\mu})]g(x)_{\mu\nu}$$

Аналог уравнения (8) здесь будет иметь более сложный вид:

$$\partial_{\tilde{t}}\pi_{\sigma}^{\xi} = \pi_{\kappa}^{\xi}\Gamma(x')_{\rho\sigma}^{\kappa} + \frac{1}{2}P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\rho\sigma}^{\xi} - \frac{1}{2}g^{\xi\eta}\pi_{\eta}^{-1\delta}(\pi_{\rho}^{\nu}P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\nu\sigma\delta} + \pi_{\sigma}^{\nu}P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\nu\rho\delta}).$$

Условием его интегрируемости является уравнение, выражающее тензор кривизны через набор производных по \tilde{t} в нуле от антисимметричного тензора $P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\rho\nu}^{\mu}$:

$$R(x)_{\sigma\delta\rho}^{\eta} = -\sigma(x)_{\sigma[\delta\rho]}^{\eta} + \sigma(x)_{\sigma}^{\eta}{}_{[\delta\rho]} + \sigma(x)_{[\delta}^{\eta}{}_{\sigma]|\rho]}, \quad (14)$$

где $\sigma(x)_{\sigma\delta\rho}^{\eta} := \partial_{\tilde{t}}P_{\pi}(x, \tilde{t})_{\sigma\delta}^{\eta}|_{\tilde{t}=0}$.

Предложение 1 *Тензор кривизны риманова пространства однозначно определяется коэффициентами при втором порядке разложения симметричного тензора G_{λ} для канонических переносов, или коэффициентами при первом порядке разложения антисимметричного тензора P_{π} для параллельных переносов.*

Канонический перенос, представленный в данной работе, соответствует группе DT и имеет важное физическое значение, в частности, для теории гравитации [3]. В гравитационном поле движение частиц происходит по геодезическим, а условие каноничности деформаций однозначно определяет геодезическую линию между двумя точками. Параллельный перенос, сохраняющий длину векторов, соответствует группе DP и имеет важное геометрическое значение. Изоморфизм данных групп представляется объектом дальнейшего изучения.

4 Выводы

Рассмотрены конечные канонический и параллельный переносы векторов в римановом пространстве. В качестве их основных характеристик введены антисимметричный и симметричный тензоры. Для случая параллельных переносов получено выражение тензора кривизны через набор производных от антисимметричного тензора. Показано, что кривизна риманова пространства однозначно, хотя и с различных точек зрения, определяется данными тензорами.

Список литературы

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. // М.:Наука, (1967).

2. Самохвалов С.Е. Канонічні деформовані групи дифеоморфізмів та скінченні паралельні перенесення в ріманових просторах // *Мат. Мод.*, **16** (2007) 22–27.
3. Самохвалов С.Е. Фундаментальна група простору Ейнштейна // *Мат. Мод.*, **19** (2008) 15–19.
4. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") // М.: Гостехтеоретиздат, (1956) 399–434.
5. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповий опис ріманових просторів // *Укр. мат. журн.*, **55** (2003) 1238–1248, [arXiv:math.DG/0704.2967](https://arxiv.org/abs/math/0704.2967).

Балакирева Елена Борисовна

Днепродзержинский государственный технический университет, Днепро-
дзержинск, Украина

E-mail: elanagutta@gmail.com

Balakireva Elena Borisovna

Dneprodzerzhinsk State Technical University, Dneprodzerzhinsk, Ukraine

A comparison of two types of end carries of the Riemannian space vectors.

This paper gives a description of the curvature by the group, which corresponds to parallel end carries of the Riemannian space vectors.

Конструктивні задачі, як засіб активізації пізнавальної діяльності при вивченні математики

О.І. Баран В.М. Дармосюк

Анотація В роботі досліджується роль і місце конструктивної геометрії в сучасній математичній освіті, обґрунтовується необхідність подальшого удосконалення методики викладання цього розділу для учнів і студентів, а також для майбутніх викладачів математики. Для активізації пізнавальної і навчальної діяльності під час вивчення геометрії пропонуються задачі прикладного спрямування.

Ключові слова Методика викладання геометрії, методи розв'язання геометричних задач, геометричні перетворення, теорія геометричних побудов, конструктивна геометрія, циркуль і лінійка, прикладні задачі.

УДК 514.115

1 Вступ

Зростаюча роль математики в розв'язанні задач науково-технічного прогресу ставить перед сучасною освітою завдання ефективної допомоги всім, хто навчається, в оволодінні теоретичними і практичними знаннями і властивим цьому предмету стилем мислення, який є важливим компонентом загальної культури сучасної людини. Особливої уваги в цьому аспекті вимагає підготовка до вивчення нових розділів, коли новий зміст математичної освіти пред'являє підвищені вимоги до рівня навчально - пізнавальної діяльності. Разом з тим, підвищення якості і продуктивності розумової діяльності учнів

і студентів пов'язане з нарощуванням інтелектуального потенціалу всього навчально-пізнавального процесу, залежить від рівня самоосвіти, стимулювання і розвитку пізнавальних і творчих інтересів. Процес навчання учнів або студентів передбачає досягнення двох самостійних, але взаємозв'язаних завдань: оволодіння, тими хто навчається, змістом конкретного розділу або предмету та цілеспрямоване формування у них прийомів розумової діяльності. Формування прийомів розумової діяльності, уміння вчитися - завдання, яке необхідно розв'язувати на всіх етапах навчання. Особливої уваги в цьому плані вимагають старшокласники і студенти, у яких мислення з переважно емпіричного рівня переходить на переважно теоретичний, і тому сильніше відчуваються не тільки прогалини в знаннях, але і відсутність сформованих раціональних прийомів навчання.

У статті представлено один з варіантів методики цілеспрямованого формування і систематизації прийомів розумової діяльності засобами конструктивної геометрії. При цьому активізація пізнавальної діяльності досягається засобами проблемного навчання. Теоретичні основи і проблеми методики викладання конструктивної геометрії ґрунтовно розглядалися в навчально-методичних посібниках [2], [3], [7] тощо, а збірники [1], [4], [5], [9], [10], [11], які структуровані за типами і методами розв'язання задач, можна вважати найбільш повними і такими, які відповідають усім вимогам до задачників такого типу. Але питання подальшого удосконалення і підвищення ефективності вивчення методів геометричних побудов залишається актуальним.

2 Нариси з історії конструктивної геометрії

У багатьох практичних застосуваннях геометрії (в кресленні, живописі, архітектурі тощо) необхідно виконувати побудови деяких шуканих фігур: накреслити їх на папері, намалювати на полотні картини, скласти план місцевості і т.п. Ці побудови виконуються за допомогою креслярських інструментів і знарядь, зокрема таких як олівець і лінійка, циркуль, рейсфедер, косинець тощо. Такі задачі математикам відомі з давніх часів. А нариси з історії конструктивної геометрії можна ефективно використовувати для активізації навчально-пізнавального процесу.

Першим знаряддям для виконання геометричних побудов була мотузка. Про це свідчать наступні факти. Найстаріший індійський геометричний трактат, присвячений правилам побудови вівтарів, називався *Sulva-Sutra* - "Правила мотузки що свідчить про широке застосування в початкових геометричних побудовах саме цього найпростішого знаряддя. Про єгипетських

землемірів, як про своїх вчителів, з найвищою повагою писав Демокріт, який називав їх гарпедонаптами, тобто "натягувачами мотузки". Єгиптяни, які не без підстав вважаються також вчителями Піфагора, для побудови прямих кутів використовували мотузку, поділену на дванадцять рівних частин, за допомогою якої вони будували "єгипетський" прямокутний трикутник з сторонами 3, 4 і 5.

Стародавні греки приписують винайдення циркуля і лінійки, тобто двох основних традиційних інструментів для виконання геометричних побудов, Фалесу Мілетському (VI ст. до н.е.). У всякому разі є підстави вважати, що єгипетські "натягувачі мотузки у яких навчався Фалес, не користувалися цими інструментами. Незалежно циркуль і лінійку винайшли також у Китаї: спеціальні ієрогліфи для позначення цих інструментів виникли у китайській письменності в середині II ст. до н.е.

Стародавні греки циркуль разом з лінійкою вважали основними інструментами для геометричних побудов. Задача вважалася розв'язаною, якщо її вдавалося звести до певної послідовності побудов за допомогою циркуля і лінійки. Про практичне походження основних геометричних фігур і про ті знаряддя, які використовувались для побудови цих фігур на площині свідчать їх назви. Слово "точка" - основне поняття геометрії - є перекладом латинського слова "puncto" що означає "тикаю" "доторкаюся звідси, до речі, походить і медичний термін "пункція". Слово "лінія" походить від латинського слова "linea" що значить "льон" "льняна нитка"; іноді це слово розуміють як "пряма лінія і звідси походить назва пристрою для креслення прямих ліній - "лінійка". Слово "цираль" - латинського походження. Латинське "circulus" означає коло, круг, обвід. Можна вказати ще цілий ряд інших геометричних термінів явно практичного походження, які збереглися до нашого часу, або знаходились у користуванні раніше.

Конструктивні задачі мають важливе практичне значення для вимірювань на земній поверхні. У XVII ст. голландський вчений В.Снелліус (1581-1626) запропонував для вимірювання великих відстаней користуватися ланцюжком трикутників. Цей метод, який було названо методом тріангуляції, виявився надзвичайно цінним для практичного застосування, оскільки не вимагає безпосередньо вимірювати великі відстані на місцевості. Особливо цей метод стає корисним, коли, через наявність перешкод, безпосередньо певну відстань виміряти неможливо. У цьому випадку побудова ланцюжка трикутників вирішує справу. При цьому методі основна робота зводиться до кутових вимірювань і подальших обчислень, що набагато простіше і дешев-

ше у порівнянні з лінійними: досить ретельно виміряти лише одну з сторін базисного трикутника.

Вперше тріангуляцію у величезних масштабах було здійснено для визначення дуги Паризького меридіану між паралелями Дюнкерка і Барселони. Всі вимірювання і обчислення були розпочаті у 1780 році уславленими математиками Паризької академії наук і продовжувалися близько двадцяти років. Одна сорокамільйонна частина довжини Паризького меридіану спочатку і одержала назву "метр" і була покладена у основу метричної десятикової системи мір. У Росії ще більш грандіозні вимірювання здійснив відомий астроном В.Я.Струве (1793-1864) у Фінляндії та Прибалтійських губерніях. Дуга, яку при цьому вимірювали, складала $25^{\circ} 20'$. Тріангуляційна мережа складалася з 258 трикутників, для яких у різних пунктах було визначено 10 базисів ("зайві" базисні відрізки використовувалися для контролю обчислень). При обчисленнях були зроблені поправки на кривизну поверхні земної кулі.

3 Приклади конструктивних задач з практичним змістом

Задачі на побудову геометричних фігур, які мають наперед визначені властивості, та методи розв'язання таких задач складають розділ геометрії, який називається конструктивною геометрією. Питання цього розділу становлять також важливу частину шкільного курсу планіметрії і являють собою важливий засіб для глибокого ознайомлення з властивостями геометричних фігур. Даний розділ геометрії є також важливою складовою частиною професійної підготовки майбутніх вчителів математики, конструкторів, архітекторів, художників. Розглянемо приклади конструктивних задач з практичним змістом і проілюструємо методи їх розв'язання. Такі задачі мають практичну спрямованість і носять творчий характер, і тому вони найкраще підходять для розвитку логічного мислення учнів.

Пример 1 (Перша задача Льюїса Керрола [7]). *Земельна ділянка має форму кута. Всередині кута задано точку. Провести через цю точку пряму так, щоб площа утвореного трикутника була найменшою.*

Історична довідка. Керрол (Carroll) Льюїс, дійсне ім'я Чарлз Лютвідґ (Латувідґ) Доджсон (Dodgson), (1832-1898), англійський письменник, математик і логік. Автор популярних повістей для дітей "Аліса в країні чудес" (1865) і "Аліса в Задзеркаллі" (1871). Наукові роботи Керрола передбачили деякі ідеї математичної логіки.

Дослідження проведемо наступним чином. Розглянемо деякий кут і всередині нього точку Р, через яку проходить деяка січна. При цьому січна ВС може повертатися навколо заданої точки Р, але не може бути паралельною до сторін АВ і ВС даного кута. Тобто, паралелограм АМРN буде завжди належати шуканому трикутнику АВС і його площа буде залишатися незмінною. Нехай задача розв'язана і шуканий трикутник АВС побудовано. Тепер зрозуміло, що січна буде займати шукане положення тоді, коли сума площ подібних трикутників МВР і NРC буде найменшою.

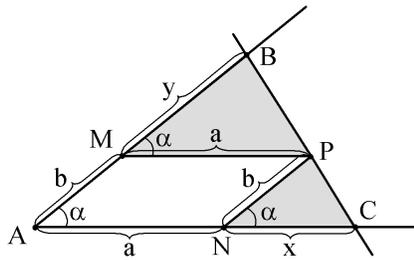


Рис. 1

Таку суму площ S знайдемо за такою формулою: $S = \frac{1}{2}bx \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}ay \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(bx + ay)\sin\alpha$

З іншого боку, з подібності трикутників МВР і NРC маємо: $\frac{y}{a} = \frac{b}{x} \implies y = \frac{ab}{x}$.

Підставляємо це співвідношення в попередню формулу і одержуємо:

$S = \frac{1}{2}b(x + \frac{a^2}{x})\sin\alpha$. Отже, для того щоб площа трикутника АВС була найменшою, необхідно знайти таке значення змінної x , щоб вираз $z = x + \frac{a^2}{x}$ був мінімальним з усіх можливих.

Перший спосіб. Скористаємось відомою нерівністю для додатних чисел: $m^2 + n^2 \geq 2mn$. Тобто, в нашому випадку одержуємо: $z = x + \frac{a^2}{x} = (\sqrt{x})^2 + (\frac{a}{\sqrt{x}})^2 \geq 2\sqrt{x} \frac{a}{\sqrt{x}} = 2a$. Причому вираз в правій частині буде набувати мінімального значення при $\sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x}} \implies x = a$.

Другий спосіб. Знайдемо екстремуми функції $z = x + \frac{a^2}{x}$ за допомогою похідної: $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{a^2}{x^2} = 0 \implies x = a$. Похідна цієї функції в точці $x = a$ змінює знак з мінуса на плюс (друга похідна більша нуля). Отже, в цій точці досягається мінімум.

Побудова. З аналізу задачі випливає, що МР і NР - середні лінії шуканого трикутника. Тому спочатку через точку Р проводимо пряму, паралельну

одній з сторін кута і одержимо, наприклад, точку М. Тепер, подвоївши відрізок АМ одержимо точку В. Точку С визначаємо як точку перетину прямої ВР з іншою стороною даного кута. Очевидно, що задача має розв'язки для всіх кутів, які менші розгорнутого кута.

Пример 2 Дано дві прямі, які перетинаються в недоступній точці (за межами креслення). Побудувати бісектрису кута, який утворюють ці прямі (Задача Евкліда). (Задачі такого типу зустрічаються в проектуванні реальних споруд).

Історична довідка. Евклід (бл. 330-275 до н.е.) - ушавлений грецький математик. Народився у фінікійському місті Тір, навчався в Афінах у Платона. Під час правління Птолемея I Сотера (Спасителя) Евкліда запросили до Александрії, де він викладав математику в школі при храмі муз (цей храм мав назву "Мусейон звідси походить сучасне слово "музей"). Александрійська математична школа Евкліда швидко стає головним культурним центром всього елліністичного світу. Перші наукові трактати з математики, які дійшли до нашого часу, написані Евклідом. Його головний твір "Начала"вміщує відомості з планіметрії, стереометрії, теорії чисел, основи методу обчислення площ і об'ємів з застосуванням елементів границь (метод вичерпування). Спираючись на свої аксіоми і постулати, Евклід доводить 465 тверджень, більшість з цих доведень до нашого часу вважаються класичними. "Начала"Евкліда підсумовують попередні досягнення грецьких математиків і створюють міцний аксіоматичний фундамент для подальшої роботи. Ця книга на протязі багатьох століть служила вченим взірцем для наслідування. Наприклад, за цим взірцем створював свої "Начала натурфілософії"І.Ньютон, а Б.Спіноза писав свою "Етику". Починаючи з 1482 року "Начала"Евкліда витримали понад 500 видань - жодне з наукових видань не користувалось таким великим і тривалим попитом. За своєю популярністю "Начала"Евкліда займали друге місце після Біблії. Перше друковане видання "Начал"Евкліда з'явилося у Венеції в 1482 році на латинській мові у перекладі з арабської. В "Історії математики"(1883) відомого професора Київського університету М.Є.Ващенко-Захарченка (1825-1912) вміщено список 460 різних видань евклідових "Начал які розташовані у хронологічному порядку. Евкліду належали і інші наукові твори, більшість з яких втрачено. Наприклад, книга "Данні на думку вчених, була продовженням "Начал"і вміщувала елементи вищої геометрії. Нагадаємо, що до Евкліда було написано декілька фундаментальних творів з елементарної геометрії. Їх авторами були Анаксимандр, Герак-

літ з Понту, Гіппократ Хіоський, Леон, Ксенократ і Февдій із Магнезії. Але геометричні твори Евкліда вважалися найкращими: коли греки згадували великого Гомера, вони вважали зайвим пригадувати його ім'я і казали просто - "Поет а Евкліда вони називали так само просто - "Творець геометрії".

Перший спосіб. Аналіз і побудова. Нехай дані прямі a і b перетинаються в недоступній точці A . Для розв'язання задачі скористаємось умовою, що бісектриси трьох внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці.

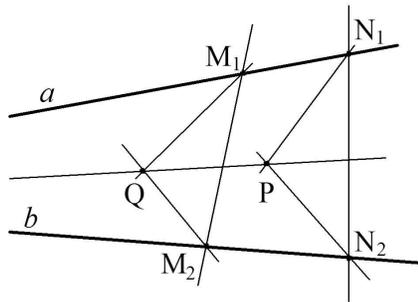


Рис. 2

Це дає можливість легко виконати шукану побудову. Для цього перетинаємо дані прямі a і b двома січними: одержимо трикутники AM_1M_2 і AN_1N_2 (вершина A залишається за межами малюнка). Далі знаходимо точку Q , в якій перетинаються бісектриси першого трикутника при вершинах M_1 і M_2 , і точку P , в якій перетинаються бісектриси другого трикутника при вершинах N_1 і N_2 . Залишається побудувати частину шуканої бісектриси кута A : це буде пряма QP .

Другий спосіб. Скористаємось методом подібності. Для цього спочатку використовуємо гомотетію з центром у довільній доступній точці так, щоб образом даних прямих були дві прямі, які перетинаються у доступній точці. Тепер будемо бісектрису нового кута, а потім шукаємо прообраз тієї її частини, яка лежить в межах креслення.

Приклад 3 Земельна ділянка має форму трикутника. З даної точки на стороні цього трикутника треба провести відрізок, який ділить площу цієї ділянки на дві рівновеликі частини.

Аналіз. Нехай дано трикутник ABC і на стороні BC дано точку M . Треба провести відрізок MN , такий, щоб він розбивав площу трикутника на дві

рівновеликі частини. Проведемо медіану AD і відрізок AM . AM розбиває трикутник на дві нерівні частини. Нехай площа трикутника ABM менша половини площі даного трикутника (якщо це не так, то розглянемо трикутник AMC). Нехай MN шуканий відрізок. Тоді зрозуміло, що трикутники ADM і ANM повинні бути рівновеликими. Оскільки ці два трикутника мають також і спільну сторону AM , то їхні вершини N і D повинні лежати на прямій, яка паралельна цій стороні. Це і є ключ до шуканої побудови.

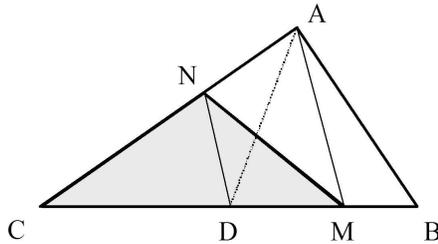


Рис. 3

Побудова. В даному трикутнику ABC з'єднуємо дану точку M з протилежною вершиною трикутника. Одержимо відрізок AM . Потім проводимо медіану AD . Через точку D проводимо пряму, паралельну AM до перетину з стороною AC в шуканій точці N . Доведення легко провести на основі попереднього аналізу.

Приклад 4 Земельну ділянку, яка має форму опуклого чотирикутника, поділити на дві рівновеликі частини відрізком, який проходить через задану точку P на його стороні.

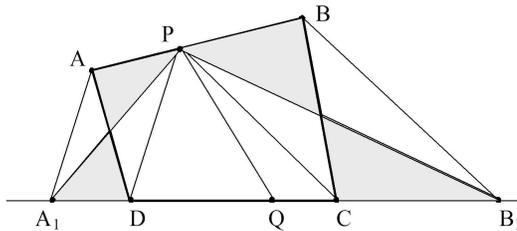


Рис. 4

Аналіз і побудова. Нехай дано деякий опуклий чотирикутник $ABCD$ і точка P на одній з його сторін. Пригадаємо, що трикутник завжди легко

поділити на два рівновеликі трикутники за допомогою медіани, яка виходить з його вершини. Крім того, ми знаємо, що трикутники з рівними основами і з відповідними рівними висотами рівновеликі. Ці дві ідеї дозволяють намітити план відповідної побудови.

Нехай точка P лежить на стороні AB . Спочатку перетворимо даний чотирикутник $ABCD$ у рівновеликий з ним трикутник, вершина якого знаходиться у даній точці P . Для цього з'єднаємо точку P відрізками PC і PD з несуміжними вершинами C і D даного чотирикутника. Тепер через вершини A і B проведемо прямі AA_1 паралельно PD і BB_1 паралельно PC до перетину з стороною CD в точках A_1 і B_1 . Тоді трикутник A_1PB_1 буде рівновеликим з даним чотирикутником і медіана PQ ділить цей трикутник на два рівновеликі трикутники. Тепер легко довести, що відрізок PQ шуканий і він задовольняє умові задачі.

Зауваження. У випадку, коли точка Q не належить відрізку CD , даний чотирикутник $ABCD$ необхідно перетворити у рівновеликий трикутник, у якого одна сторона лежить на прямій AD або BC . Це легко зробити за допомогою аналогічних побудов. Подальша побудова очевидна.

Приклад 5 *Границі двох фермерських полів утворені двома паралельними прямими, а їх спільна границя є ламана лінія. Фермери домовилися, для зручності, не змінюючи площу кожного поля, перетворити спільну границю у відрізок перпендикулярний до даних паралельних прямих так, щоб площа кожного поля залишилася без зміни [8]. Як це зробити?*

Аналіз ґрунтується на міркуваннях, аналогічних тим, які використані в двох попередніх задачах. Нехай два поля мають спільну границю у вигляді ламаної $ABCD$ так, як це показано на малюнку.

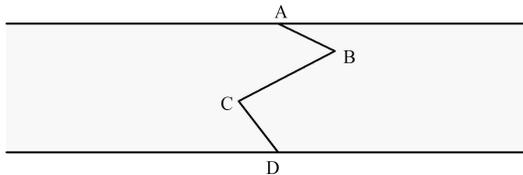


Рис. 5

Спочатку зменшимо кількість ланок на одну. Нехай ланку ABC замінено відрізком AF так, щоб площі двох полів не змінилися. Тоді трикутники ABC і AFC рівновеликі і мають спільну сторону AC , тому пряма BF повинна бути паралельною прямій AC .

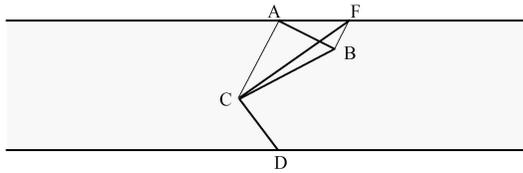


Рис. 6

Побудова. Спочатку перетворюємо ланку ABC у відрізок CF. Для цього через точку B проводимо пряму, паралельну AC, в результаті одержимо шукану точку F. При цьому площа кожного поля залишається незмінною, бо трикутники ABF і CBF рівновеликі. Тепер аналогічно перетворюємо ланку FCD у відповідний відрізок з кінцями на заданих граничних паралельних прямих. Таким чином поетапно ми можемо перетворити довільну ламану у деякий відрізок. Тепер досить через середину останнього відрізка провести відрізок, перпендикулярний граничним горизонтальним прямим.

Приклад 6 Прямокутник, розміри якого дорівнюють 10 і 2, розрізати на п'ять частин, з яких можна скласти квадрат. (Миколаївська міська олімпіада)[6].

Розв'язання. Відповідне розрізання заданого прямокутника і побудова квадрата з одержаних частинок не буде викликати значних труднощів, якщо спочатку визначити довжину сторони цього квадрата: $x = \sqrt{2 \cdot 10} = \sqrt{20}$. Тому спочатку треба побудувати такий відрізок, щоб його довжина дорівнювала $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, або представити такий відрізок як суму (чи різницю) деяких інших відрізків. Тепер залишається здогадатися, що $\sqrt{20}$ це довжина гіпотенузи прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 2 і 4. Далі вже легко визначити і відповідні частини майбутньої фігури (дивись малюнок 7):

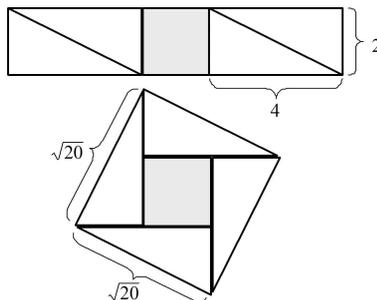


Рис. 7

Але більш цікавою і складною є наступна задача, яка є підсиленням попередньої (її запропонували студенти механіко-математичного факультету МНУ) [6].

Пример 7 *Прямокутник, розміри якого дорівнюють 10 і 2, розрізати на чотири частини, з яких можна скласти квадрат.*

Розв'язок задачі в цьому випадку можна знайти, скориставшись аналізом попередньої задачі, і враховуючи, що гіпотенуза прямокутного трикутника, у якого катети рівні 1 і 2, дорівнює $\sqrt{5}$. А на стороні шуканого квадрата такий відрізок вміщується двічі.

Тепер, відрізавши такий прямокутний трикутник від лівої частини даної смужки, помічаємо, що одержаний короткий "косий" зріз буде вміщуватися двічі на шуканій стороні квадрата. Далі добудовуємо до цього зрізу прямий кут, і тут виявляється, що одержаний великий прямокутний трикутник має гіпотенузу довжиною $\sqrt{20}$, що дуже спрощує нашу задачу. Виконуємо ще два розрізи, внаслідок чого смужка виявляється розрізаною на п'ять частин, з яких можна скласти квадрат. Але дві частинки, які мають спільну гра-

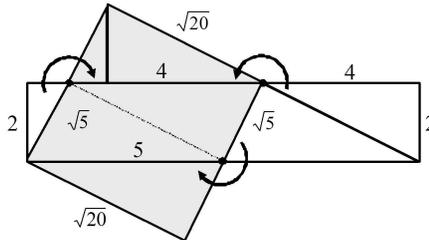


Рис. 8

ницю, позначену на малюнку пунктиром, розрізати не обов'язково. Тобто, квадрат можна скласти лише з чотирьох частинок. Цікавим виявляється і те, що всі чотири частини можна з'єднати шарнірно в точках, які виділені на малюнку. Тоді обертанням цих частин навколо виділених точок в площині малюнка ми можемо легко виконувати пряме і обернене перетворення однієї фігури в іншу. Таку цікаву іграшку легко зробити з цупкого картону, з тонкої дерев'яної дощечки, або пластику. Такі іграшки розвивають кмітливість і уяву.

Пример 8 *((Друга задача Льюїса Керрола [7])). На площині розташовані три циліндричні башти. Знайти точку площини, з якої ширина кожної з башт буде здаватися однаковою.*

Аналіз і побудова. Нехай точки A, B, C - центри кругових основ заданих башт, a, b, c - їх радіуси, а P - шукана точка, з якої ширина кожної башти здається однаковою. Тобто це означає, що всі башти з цієї точки видно під одним і тим же кутом 2α . Тоді маємо три пари подібних прямокутних трикутників, звідки одержуємо співвідношення: $AP : BP : CP = a : b : c$.

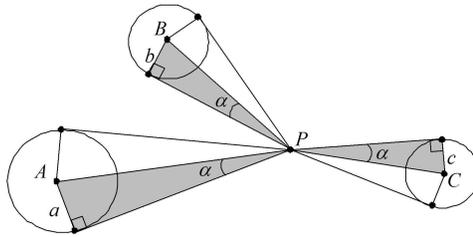


Рис. 9

Отже, шукана точка P належить першому геометричному місцю точок, відстані яких до заданих точок A і B знаходяться у даному відношенні $a:b$. Це перше коло Аполлонія, алгоритм побудови якого будемо вважати вже відомим. Точка P належить також і другому геометричному місцю точок, відстані яких до заданих точок B і C знаходяться у даному відношенні $b:c$. Це друге коло Аполлонія. Тепер шукану точку P ми знайдемо як перетин цих двох кіл.

Приклад 9 Даний прямокутник розбити на два нерівні подібні прямокутники.

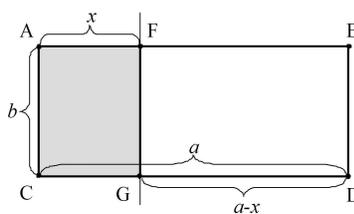


Рис. 10

Аналіз. Нехай сторони даного прямокутника $ABCD$ мають довжини a і b ($a > b$).

Легко довести, що шуканий поділ можна провести тільки через більшу сторону даного прямокутника. Одержимо два подібні прямокутники $ACFG$

і FBDG. Умова подібності цих прямокутників через відношення відповідних сторін має такий вид: $\frac{x}{b} = \frac{b}{a-x}$, або $x^2 - ax + b^2 = 0$. Тепер з останнього рівняння визначаємо довжину шуканого відрізка x : $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$.

Побудова. Спочатку будуємо відрізок $z = \sqrt{a^2 - 4b^2}$, а потім шуканий відрізок x за формулою $x = \frac{a-z}{2}$, або $x = \frac{a+z}{2}$.

4 Висновки

Рівень математичної культури значною мірою залежить від уміння розв'язувати задачі. Здобути таке уміння допомагає знання прийомів і методів розв'язання задач, засвоєння яких є найважливішою частиною математичної підготовки учнів, абітурієнтів, а також усіх, хто цікавиться математикою. Специфіка і структура шкільного курсу математики відкривають широкі можливості для розвитку творчих здібностей учнів, формування прийомів розумової діяльності, інтелекту. Вивчення геометрії нерозривно пов'язане з розвитком інтуїції (зокрема геометричної), логічного, образного мислення, з формуванням у школярів конструктивно-геометричних умінь і навичок. Перед геометрією ставляться важливі завдання щодо формування мислення і практичних навичок та умінь, необхідних для здобуття середньої і вищої освіти, формування професійних навичок в різних галузях діяльності і розвитку особистості взагалі. Одним із шляхів реалізації цих завдань є певний перерозподіл матеріалу в шкільному курсі математики, зокрема, більш ґрунтовне вивчення ідей і методів конструктивної геометрії в курсі математики основної школи на наочно-оперативному рівні з практичною спрямованістю. Разом з тим необхідно відзначити, що сучасна школа не приділяє належної уваги конструктивним задачам. Таких задач дуже мало в діючих підручниках. А вчителі, учні і студенти погано розуміють що таке конструктивна задача, що є її розв'язком і як такі задачі розв'язуються. Очевидно, що значення і роль конструктивних задач в сучасній школі недооцінюється. Конструктивні задачі звичайно цікаві за зміст, передбачають творчі підходи до їх розв'язання і найкраще сприяють актуалізації набутих раніше знань і підвищенню інтересу до вивчення геометрії і математики в цілому.

Література

1. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. М., "Учпедгиз 1950. - 174 с.
2. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Элементарная геометрия. М., "Просвещение 1966. - 366 с.

3. Астряб О.М., Смогоржевський О.С. та інші., Методика розв'язування задач на побудову. К., "Радянська школа 1960, с. - 387.
4. Атанасян Л.С., Атанасян В.А. Сборник задач по геометрии, ч. I. М., "Просвещение 1973.
5. Базылев В.Т. и др. Сборник задач по геометрии (под редакцией Базылева В.Т.). М., "Просвещение 1980. - 238 с.
6. Баран О.І., Калініченко Г.Л. Практична спрямованість конструктивної геометрії. Збірник "Питання удосконалення змісту і методики викладання фізики у середній і вищій школі Вип. 12, Миколаїв, 2006, с. 99-107.
7. Кэрролл Льюис. История с узелками. М., "Мир 1973. с - 408.
8. Лоповок Л.М. Сборник задач по геометрии для 6-8 кл. К., "Радянська школа 1985. - 104 с.
9. Моденов П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. "Советская наука М., 1957. - 666 с.
10. Назаретский В.Е., Федин Н.Г. Задачник-практикум по элементарной геометрии. М., "Просвещение 1965. - 163 с.
11. Тесленко І.Ф. та інші. Практикум з розв'язування задач. Геометрія. "Вища школа К., 1978. - 208 с.
12. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. М., "Физматгиз 1963. - 567 с.

Oleg I. Baran

V.O. Sukhomlynsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, Ukraine.

E-mail: Oleg_Barane@mail.ru

Valentina M. Darmosiuk

V.O. Sukhomlynsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, Ukraine.

E-mail: darmosiuk@gmail.com

Constructive Tasks as a Tool for Enhancing Cognitive Activity in the Study of Mathematics

This paper investigates the role and place of constructive geometry in contemporary mathematics education, justifies the need for the further improvement of constructive geometry teaching methodology for pupils and students, as well as for future teachers of mathematics. To enhance cognitive and learning activities during the study of the geometry applied problems are proposed.

Ітерації гіперпросторів розмитих метричних просторів

Олександр Григорович Савченко

Анотація Конструкція нескінченного ітерованого гіперпростору, яку Г. Торуньчик та Дж. Вест розглянули для метричних просторів, перенесена на випадок розмитих метричних просторів. Доведено, що нескінченна ітерація (відповідно поповнена нескінченна ітерація) функтора гіперпростору, застосована до континуума Пеано, дає передгільбертовий простір Σ (відповідно сепарабельний гільбертовий простір ℓ^2).

Ключові слова Розмитий метричний простір, гіперпростір, гільбертів простір

УДК 515.12

1 Вступ

Г. Торуньчик і Дж. Вест [5] розглянули конструкцію поповненого ітерованого гіперпростору і показали, що для континуумів Пеано вона дає сепарабельний гільбертовий простір. Метою цієї статті є перенесення цього результату на випадок розмитих метричних просторів. Нагадаємо, що розмиті метричні простори виникають як природний розвиток ідеї ймовірного метричного простору, тобто простору, у якому відстані набувають значення не у множині дійсних чисел, а у множині розподілів.

Доведено, що нескінченна ітерація (відповідно поповнена нескінченна ітерація) функтора гіперпростору, застосована до континуума Пеано, дає передгільбертовий простір Σ (відповідно сепарабельний гільбертовий простір ℓ^2). Іншими словами, у випадку розмитих метричних просторів мають

місце результати, що є аналогами відповідних результатів для метричного випадку.

2 Розмиті метричні простори

Пригадаємо означення розмитого метричного простору. Воно існує двох формах і для наших цілей знадобиться означення в сенсі статті [6].

Спочатку нам потрібно навести поняття t -норми. Так називається неперервне відображення $(x, y) \mapsto x * y: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, що задовольняє умови:

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$;
2. $x * y = y * x$;
3. $x * 1 = x$;
4. якщо $x \leq x'$ і $y \leq y'$, то $x * y \leq x' * y'$.

Прикладами t -є такі функції:

1. $x * y = \min\{x, y\}$;
2. $x * y = \max\{0, x + y - 1\}$;
3. $x * y = xy$.

Надалі ми фіксуємо t -норму \min .

Определение 1 Розмитим метричним простором називається трійка $(X, M, *)$, де X — непорожня множина, $*$ — непервна t -норма і M — розмита множина на $X \times X \times (0, \infty)$ (тобто M — відображення з $X \times X \times (0, \infty)$ в $[0, 1]$), що задовольняє такі властивості:

- (i) $M(x, y, t) > 0$;
- (ii) $M(x, y, t) = 1$, якщо і тільки якщо $x = y$;
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
- (iv) $M(x, y, s) * M(y, z, t) \leq M(x, z, s + t)$;
- (v) функція $M(x, y, -): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ неперервна.

Кожна розмита метрика M породжує топологію τ_M на X . Базою топології τ_M є відкриті кулі $B(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - r\}$. Надалі на розмитих метричних просторах розглядаємо лише топологію, породжену розмитою метрикою. Через \bar{A} позначаємо замикання множини A у цій топології.

Для кожного метризовного простору X позначимо через $\text{exp } X$ множину всіх непорожніх компактних підмножин простору X . Множину $\text{exp } X$ наділяють топологією Вієторіса; базу цієї топології утворюють множини вигляду

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in \text{exp } X \mid A \subset \cup_{i=1}^n U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для кожного } i\},$$

де U_1, \dots, U_n пробігають сім'ю відкритих підмножин в X .

Для кожного $x \in X$ і кожного $A \in \text{exp } X$ нехай $M(x, A, t) = \sup\{M(x, a, t) \mid a \in A\}$. Для кожних $A, B \in \text{exp } X$ приймемо

$$M_H(A, B, t) = \min\{\inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t)\}.$$

Функція M_H називається розмитою метрикою Гаусдорфа на $\text{exp } X$ (див. [3]). Розмита метрика M_H індукує топологію Вієторіса на $\text{exp } X$.

Розмита метрика M на компактї X називається опуклою, якщо відображення

$$(x, r, t) \mapsto N(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) \geq 1 - r\}$$

неперервне як відображення в $\text{exp } X$.

Нагадаємо, що континуумом Пеано називається зв'язний локально зв'язний компакт. Еквівалентно, континууми Пеано - це компакти, що є неперервними образами відрізка. На кожному континуумі Пеано існує опукла метрика, що породжує його топологію. При цьому метрика d на компактї X називається опуклою, якщо відображення $(x, r) \mapsto N'(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ неперервне, як відображення з $X \times [0, \infty)$ в $\text{exp } X$.

Предложение 1 *На кожному континуумі Пеано існує опукла розмита метрика.*

Доведення Нехай d — опукла метрика на X . Приймемо $M(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x, y)}$, тоді відомо, що M — розмита метрика на X (див., наприклад, [6]). Опуклість розмитої метрики M впливає з того, що $N(x, r, t) = N'(x, \frac{rt}{1-r})$.

Нехай M — розмита метрика на множині X . Множини вигляду

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X \mid M(x, y, 1/n) > 1 - 1/n\},$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, утворюють рівномірну структуру на X (див. [3]).

3 Ітерований гіперпростір

Приймемо $\exp^0 X = X$. Для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ отожднимо простір $\exp^n X$ з підпростором в $\exp^{n+1} X$ за допомогою відображення $A \mapsto \{A\}$. Розмиту метрику Гаусдорфа на $\exp^n X$, породжену розмитою метрикою M на X , позначимо M_{H^n} . Одержуємо пряму послідовність розмитих метричних просторів і вкладень:

$$\exp^0 X \hookrightarrow \exp X \hookrightarrow \exp^2 X \hookrightarrow \dots$$

Приймемо $\exp^+ X = \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \exp^n X$.

Оскільки

$$M_{N^{n+1}}((\exp^n X \times \exp^n X \times (0, \infty))) = M_{N^n},$$

одержуємо, що розмиті метрики на $\exp^n X$ породжують розмиту метрику M^+ на $\exp^+ X$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$, нехай

$$U_n^+ = \{(x, y) \in \exp^+ X \times \exp^+ X \mid M^+(x, y, 1/n) > 1 - 1/n\}.$$

Множини U_n^+ , $n \in \mathbb{N}$, утворюють рівномірну структуру на просторі $\exp^+ X$. Позначимо через $\exp^{++} X$ поповнення простору $\exp^+ X$ відносно цієї структури. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай U_n^{++} — найбільша відкрита множина в $\exp^{++} X \times \exp^{++} X$ така, що

$$U_n^{++} \cap (\exp^+ X \times \exp^+ X) = U_n^+.$$

Множини вигляду U_n^{++} утворюють рівномірну структуру на просторі $\exp^{++} X$.

Означимо відображення $u_n: \exp^+ X \rightarrow \exp^n X$ формулою:

$$u_n(x) = \cup \{A \in \exp^n X \mid A \in A_1 \in A_2 \in \dots \in A_i = B \in x \\ \text{для деякої послідовності } (A_i \in \exp^{n+i} X)_{i=1}^\infty \text{ і } A \in x\}.$$

Предложение 2 Відображення u_n рівномірно неперервне.

Зауважимо, що конструкції \exp^+ і \exp^{++} функторіальні.

З твердження 2 випливає, що відображення u_n можна продовжити до рівномірно неперервного відображення $u_n: \exp^{++} X \rightarrow \exp^n X$.

Предложение 3 Послідовність відображень

$$u_n: \exp^{++} X \rightarrow \exp^n X \hookrightarrow \exp^{++} X$$

збігається на компактах до тотожного відображення $1_{\exp^{++} X}$.

Доведення Спершу зауважимо, що якщо $x \in \exp^{++} X$ і $x' \in \exp^n X$, то $u_n(x) = x'$ і ми одержуємо, оскільки відображення u_n нерозтягуюче, що

$$M(u_n(x), x, t) \geq \min\{M(u_n(x), u_n(x'), t/2), M(x, x', t/2)\} \geq M(x, \exp^n X, t/2).$$

Нехай тепер $K \subset \exp^{++} X$ — компакт. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що множина $K \cap \exp^+ X$ всюди щільна в K . Зафіксуємо $r \in (0, 1)$. Існує скінченна множина $L \subset K \cap \exp^+ X$, що задовольняє умову: для кожного $y \in K$ існує $l \in L$ таке, що $M(y, l, t/4) > 1 - r$.

Оскільки множина $\exp^+ X$ всюди щільна в $\exp^{++} X$, існує $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $j \geq j_0$ і кожного $l \in L$ маємо $M(l, \exp^j X, t/4) > 1 - r$.

Непер нехай $x \in K \cap \exp^+ X$ і $j \geq j_0$. Тоді

$$\begin{aligned} M(x, u_j(x), t) &\geq \min\{M(u_j(x), u_j(l), t/2), M(u_j(l), l, t/4), M(l, x, t/4)\} \\ &\geq \min\{M(x, t/4), M(u_j(l), l, t/4), M(l, x, t/4)\} \\ &\geq 1 - r. \end{aligned}$$

Тепер для того, щоби було $(x, u_j(x)) \in U_m^{++}$ для кожного $x \in K$, знайдемо $p \in \mathbb{N}$ таке, що $\overline{U_p^{++}} \subset U_n^{++}$. Тоді якщо $t < 1/p$ і $r > 1/p$, ми одержуємо потрібне. Справді, з неперервності відображення u_j одержуємо, що

$$\{(x, u_j(x)) \mid x \in K\} = \overline{\{(x, u_j(x)) \mid x \in K \cap \exp^+ X\}} \subset \overline{U_p^{++}} \subset U_n^{++}.$$

Це завершує доведення твердження.

4 Радіальна псевдовнутрішність гільбертового куба

Нехай $Q = [-1, 1]^\omega$ — гільбертів куб. Псевдовнутрішністю в Q називаємо множину $s = (-1, 1)^\omega \subset Q$. Радіальною псевдовнутрішністю в Q називаємо множину

$$\Sigma = \bigcup_{i \geq 2} \left[1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}\right] \subset s \subset Q.$$

Топологічна характеристика пар (Q, Σ) і (s, Σ) наведена в [2].

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1 *Нехай X — невідроджений континуум Пеано. Тоді пара $(\exp^{++} X, \exp^+ X)$ гомеоморфна парі (Q, Σ) .*

Доведення Доведення відбувається за схемою доведення теореми 1 і наслідку 1 статті [5]. Насамперед зауважимо, що необхідна для доведення рівномірна збіжність на компактах відображень u_n встановлена у твердженні 3.

Далі, з функторіальності конструкції $\text{exp}^{++} X$ випливає, що вона не залежить від конкретної розмитої метрики на просторі X , яка породжує його топологію. Звідси випливає, що розмиту метрику на X можна вважати опуклою і це дає змогу проводити доведення аналогічно, як і у статті [5].

5 Зауваження

У статті [1] розглянуто природну компактифікацію функтора поповненого ітерованого гіперпростору, а саме, показано, що така компактифікація задається вкладенням в обернену границю $\text{exp}^\omega X$ послідовності

$$\text{exp} X \leftarrow \text{exp}^2 X \leftarrow \text{exp}^3 X \leftarrow \dots$$

Виникає природне запитання: чи така компактифікація одночасно може служити і для конструкції $\text{exp}^{++} X$ у випадку прямої границі розмитих метрик Гаусдорфа?

Результати цієї статті можна перенести також на випадок ітерованих гіперпросторів опуклих компактних множин у розмитих нормованих просторах; метричний випадок розглянуто в [4].

В.В. Федорчук [7] розглянув трійки, породжені нескінченними ітераціями досконало метризованих функторів. Виникає природна проблема знаходження розмитого аналога цілком метризованого та досконало метризованого функтора.

Література

1. Банах Т.О., Заричный М.М. О компактификациях функтора итерированного гиперпространства, Изв. вузов. Матем., 1987, номер 10, с. 3–6.
2. Bessaga C., Pelczynski A. Selected topics in infinite-dimensional topology.- PWN: Warsaw, 1975. 353 p.
3. J. Rodríguez-López, S. Romaguera, *The Hausdorff fuzzy metric on compact sets*, Fuzzy Sets and Systems, 147(2)(2004), 273–283.
4. Та Кхас Су. Direct limits which are Hilbert spaces // Acta Math. viet. V 14 (1989), n 2, P. 67–73.
5. Toruńczyk H., West J. A Hilbert space limit for the iterated hyperspace functor // Proc. Amer. Math. Soc. V. 89, Number 2, . 1983, 329–335.
6. A. George and P. Veeramani, *On some results of analysis for fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997), 365–368.
7. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, том 54, вып / 2, С. 396–417

Aleksandr Savchenko

Kherson State Agrarian University,
Kherson, Rozy Lyuksemburg Str 23
E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Iterations of hyperspaces of fuzzy metric spaces

The construction of infinite iterated hyperspace considered by H. Toruńczyk and J. West for metric spaces is extended over the class of fuzzy metric spaces. It is proved that the infinite iteration (respectively completed infinite iteration) of the hyperspace functor applied to Peano continuum gives pre-Hilbert space Σ (respectively separable Hilbert space ℓ^2).

Инвариантные преобразования с сохранением геодезических

В. А. Киосак Е. Е. Чепурная

Аннотация Исследованы преобразования псевдоримановых пространств, сохраняющие свойство допускать нетривиальные геодезические отображения при условии, что первая пара геодезических соответствующих пространств допускает нетривиальные геодезические отображения с сохранением тензора Эйнштейна. Получен тензорный признак пространств, являющихся результатом указанных преобразований.

Ключевые слова Псевдоримановые пространства, тензор Эйнштейна, геодезические отображения

УДК 514.765.1+512.813.4

В свое время перед исследователями, работавшими в теории геодезических отображений, стал вопрос о количестве пространств, допускающих нетривиальные геодезические отображения [1], [3]. Ответ на этот вопрос своими исследованиями дал Н.С. Синюков, построив бесконечную непересекающуюся последовательность пространств, находящихся в нетривиальном геодезическом соответствии [3].

Определение 1. *Взаимно однозначное соответствие между точками псевдоримановых пространств V_n с метрическим тензором g_{ij} и \bar{V}_n с метрическим тензором \bar{g}_{ij} называют геодезическим отображением, если*

при нем каждая геодезическая линия V_n переходит в геодезическую линию \bar{V}_n .

Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы заданные псевдоримановы пространства V_n и \bar{V}_n находились в геодезическом соответствии является выполнение в них условий:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h, \quad (1)$$

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\varphi_k \bar{g}_{ij} + \varphi_i \bar{g}_{jk} + \varphi_j \bar{g}_{ik}, \quad (2)$$

где Γ_{ij}^h ($\bar{\Gamma}_{ij}^h$) — объекты связности V_n и \bar{V}_n соответственно (объекты \bar{V}_n геодезически соответствующего данному будем обозначать чертой), δ_i^h — символы Кронекера, запятая “,” — знак ковариантной производной по связности V_n , φ_i — некоторый, градиентный по необходимости вектор.

С другой стороны, необходимым и достаточным условием того, чтобы псевдориманово пространство V_n допускало нетривиальные геодезические отображения, является существование в нем решений системы уравнений —

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}, \quad (3)$$

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i} R_j^\alpha - a_{\alpha\beta} R_{.ij}^{\alpha\beta}, \quad (4)$$

$$(n-1)\mu_{,k} = 2(n+1)\lambda_\alpha R_k^\alpha + a_{\alpha\beta}(2R_{.k}^{\alpha\beta} - R_{.k}^{\alpha\beta}), \quad (5)$$

относительно тензора $a_{ij} = a_{ji} \neq cg_{ij}$, вектора $\lambda_i \neq 0$ и инварианта μ , где

$$\begin{aligned} R_j^i &= R_{\alpha j} g^{\alpha i}; & R_{.ij}^{k h} &= R_{\alpha i j \beta} g^{\alpha k} g^{\beta h}; \\ R_{.i,j}^k &= R_{\alpha\beta,k} g^{\alpha i} g^{\beta j}; & R_{j,}^i{}^k &= R_{\alpha j, \beta} g^{\alpha i} g^{\beta k}; \end{aligned}$$

g^{ij} — элементы обратной матрицы к g_{ij} , $R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha$ — тензор Риччи V_n , R_{ijh}^h — тензор Римана, а $R_{hijk} = g_{\alpha h} R_{ijk}^\alpha$.

По известным решениям приведенной выше системы дифференциальных уравнений метрики геодезически соответствующих пространств могут быть определены из уравнений:

$$a_{ij} = e^{2\varphi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}; \quad (6)$$

$$\lambda_i = -e^{2\varphi} \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i}. \quad (7)$$

Здесь $\varphi = \frac{1}{2(n+1)} \ln \left| \frac{\bar{g}}{g} \right|$, где $g \stackrel{def}{=} \det \|g_{ij}\|$.

Пусть псевдориманово пространство V_n допускает нетривиальное геодезическое отображение, соответствующее вектору φ_i , на пространство \bar{V}_n . Тогда в V_n существует решение системы (3), удовлетворяющее (6).

Будем рассматривать a_{ij} как метрический тензор псевдориманова пространства \bar{V}_n^1 :

$$a_{ij} \stackrel{def}{=} \bar{g}_{ij}^1. \quad (8)$$

Метрический тензор \bar{V}_n^1 построим следующим образом

$$\bar{g}_{ij}^1 = e^{2\varphi} g_{ij}. \quad (9)$$

Определение 2. Если V_n псевдориманово пространство с метрическим тензором g_{ij} , а \bar{V}_n^1 также псевдориманово пространство с метрическим тензором \bar{g}_{ij}^1 , то взаимнооднозначное соответствие между их точками, при котором имеют место условия (9), называют конформным отображением [2].

Таким образом, формулой (9) установлено конформное соответствие между пространствами V_n и \bar{V}_n^1 , соответствующее тому же векторному полю φ_i .

При конформном отображении:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \delta_i^h \varphi_j + \delta_j^h \varphi_i - \varphi^h g_{ij}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h &= R_{ijk}^h + \delta_k^h \varphi_{ij} - \delta_j^h \varphi_{ik} + g^{h\alpha} (\varphi_{\alpha h} g_{ij} - \\ &- \varphi_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \varphi (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\varphi_{ij} + (\Delta_2 \varphi + (n-2)\Delta_1 \varphi) g_{ij}; \quad (12)$$

$$\bar{R} = e^{-2\varphi} (R + 2(n-1)\Delta_2 \varphi + (n-1)(n-2)\Delta_1 \varphi). \quad (13)$$

Тогда, как доказано Н.С. Синюковым [3], если псевдориманово пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} допускает нетривиальное геодезическое отображение, соответствующее вектору φ_i , на пространство \bar{V}_n с метрическим тензором \bar{g}_{ij} , то псевдориманово пространство \bar{V}_n с метрическим тензором \bar{g}_{ij} , удовлетворяющее (8), допускает геодезическое отображение, соответствующее тому же вектору, на риманово пространство $\overset{1}{V}_n$ с метрическим тензором $\overset{1}{g}_{ij}$, определяемым формулой (9).

Определение 3. Закон, представленный формулами (6), (8), (9), переводящий пару псевдоримановых пространств V_n и \bar{V}_n , для которых существует связывающее их нетривиальное отображение, в другую пару пространств $\overset{1}{V}_n$ и $\overset{1}{V}_n$, связанных тем же отображением, называют инвариантным преобразованием псевдоримановых пространств с сохранением геодезических.

$$\begin{array}{ccc}
 V_n & \xrightarrow{\Gamma_0(\varphi)} & \bar{V}_n \\
 \downarrow & \searrow \text{ко}(\varphi) & \\
 \overset{1}{V}_n & \xrightarrow{\Gamma_0(\varphi)} & \overset{1}{V}_n
 \end{array}$$

Эта схема описывает введенное преобразование с сохранением геодезических. Учитывая формулы (6) и (7), она может быть записана в следующем виде [4] —

$$\begin{array}{ccc}
 V_n & \xrightarrow{\Gamma_0} & \bar{V}_n \\
 a_j^i \downarrow & & \downarrow a_j^i \\
 \overset{1}{V}_n & \xrightarrow{\Gamma_0} & \overset{1}{V}_n
 \end{array}$$

здесь $a_j^i = a_{\alpha j} g^{\alpha i}$, а

$$\overset{1}{g}_{ij} = g_{\alpha i} a_j^\alpha \tag{14}$$

$$\overset{1}{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{\alpha i} a_j^\alpha \tag{15}$$

Приведенные две схемы эквивалентны. Используя первую из них, проведем исследование случая, когда псевдоримановы пространства V_n и \bar{V}_n находятся в нетривиальном геодезическом отображении, при котором сохраняется тензор Эйнштейна.

Тензором Эйнштейна называют тензор

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij},$$

а геодезическим отображением с сохранением тензора Эйнштейна нетривиальное геодезическое отображение, при котором

$$E_{ij} = \bar{E}_{ij}.$$

Тогда, как доказано в работах [5], [6], в V_n выполняются условия

$$\varphi_{ij} = \frac{\bar{R}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} - \frac{R}{n(n-1)}g_{ij}. \quad (16)$$

Дифференцируя и учитывая (2), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{ij, k} = & \frac{\bar{R}_{, k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + \frac{\bar{R}}{n(n-1)}(2\varphi_k\bar{g}_{ij} + \\ & + \varphi_i\bar{g}_{jk} + \varphi_j\bar{g}_{ik}) - \frac{R_{, k}}{n(n-1)}g_{ij} \end{aligned} \quad (17)$$

Так как V_n и \bar{V}_n связаны конформным отображением (9), то для них выполняются условия (12):

$$\varphi_{ij} = P_{ij} + \rho g_{ij}, \quad (18)$$

где

$$P_{ij} \stackrel{def}{=} \frac{1}{n-2}(\bar{R}_{ij} - R_{ij}),$$

$$\rho = \frac{\Delta_2\varphi}{n-2} + \Delta_1\varphi.$$

Продифференцируем (18) —

$$\varphi_{ij, k} = P_{ij, k} + \rho_k g_{ij}. \quad (19)$$

Вычтем (19) из уравнений (17):

$$\begin{aligned} P_{ij, k} = & \frac{\bar{R}_{, k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + \frac{\bar{R}}{n(n-1)}(2\varphi_k\bar{g}_{ij} + \\ & + \varphi_i\bar{g}_{jk} + \varphi_j\bar{g}_{ik}) - \left(\frac{R_{, k}}{n(n-1)} - \rho_k\right)g_{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

Исключим из последнего $\frac{\bar{R}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij}$ с помощью формулы (16)

$$\begin{aligned}
 P_{ij,k} &= \frac{\bar{R}_{,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + 2\varphi_k\varphi_{ij} + \varphi_i\varphi_{jk} + \\
 &+ \varphi_j\varphi_{ik} + \frac{R}{n(n-1)}(2\varphi_k g_{ij} + \\
 &+ \varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ik}) - \left(\frac{R_{,k}}{n(n-1)} - \rho_k\right)g_{ij}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Перейдем к производной по связности пространства $\bar{V}_n^{\frac{1}{2}}$, обозначив ее $\frac{1}{2}$, тогда, используя формулы (10), будем иметь

$$\begin{aligned}
 P_{ij,\frac{1}{2}k} &+ 2\varphi_k P_{ij} + \varphi_i P_{jk} + \varphi_j P_{ik} - 2P_{\alpha k}\varphi^\alpha g_{ij} = \\
 &= \frac{\bar{R}_{,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + 2\varphi_k\varphi_{ij} + \varphi_i\varphi_{jk} + \\
 &+ \varphi_j\varphi_{ik} + \frac{R}{n(n-1)}(2\varphi_k g_{ij} + \\
 &+ \varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ik}) - \left(\frac{R_{,k}}{n(n-1)} - \rho_k\right)g_{ij}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая (18), получим

$$\begin{aligned}
 P_{ij,\frac{1}{2}k} &= \frac{\bar{R}_{,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + \left(\frac{R}{n(n-1)} - \rho\right)(2\varphi_k g_{ij} + \\
 &+ \varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ik}) - \left(\frac{R_{,k}}{n(n-1)} - \rho_k - 2P_{\alpha k}\varphi^\alpha\right)g_{ij}
 \end{aligned} \tag{23}$$

И, наконец, используя (9), будем иметь

$$\begin{aligned}
 P_{ij,\frac{1}{2}k} &= \frac{\bar{R}_{,k}}{n(n-1)}\bar{g}_{ij} + \left(\frac{R}{n(n-1)} - \rho\right)e^{-2\varphi}(2\varphi_k \bar{g}_{ij}^{\frac{1}{2}} + \\
 &+ \varphi_i \bar{g}_{jk}^{\frac{1}{2}} + \varphi_j \bar{g}_{ik}^{\frac{1}{2}}) - e^{-2\varphi}(R_{,k} - \rho_k - 2P_{\alpha k}\varphi^\alpha) \bar{g}_{ij}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. Если псевдоримановы пространства V_n и \bar{V}_n находятся в нетривиальном геодезическом соответствии с сохранением тензора Эйнштейна, то в пространстве \bar{V}_n полученном инвариантным преобразованием с сохранением геодезических существует тензор P_{ij} , удовлетворяющий условиям (24).

Если скалярная кривизна псевдориманова пространства \bar{V}_n постоянна, то уравнения (24) принимают вид

$$P_{ij} \frac{1}{k} = u_k \frac{1}{g_{ij}} + v_i \frac{1}{g_{jk}} + v_j \frac{1}{g_{ik}} \quad (25)$$

здесь u_i и v_i — некоторые векторы.

Имеет место:

Следствие. Если псевдоримановы пространства V_n и \bar{V}_n находятся в нетривиальном геодезическом соответствии с сохранением тензора Эйнштейна и \bar{V}_n пространство постоянной скалярной кривизны, то в пространстве \bar{V}_n полученном инвариантным преобразованием с сохранением геодезических существует тензор P_{ij} , удовлетворяющий условиям (25).

Доказанная теорема и следствие из нее усиливают и обобщают результаты Н.С. Синюкова и С. Формеллы [7], [8] об инвариантных преобразованиях с сохранением геодезических для пространств постоянной кривизны и пространств Эйнштейна.

Список литературы

1. Аминова А. В. Псевдоримановы множества с общими геодезическими // Успехи математических наук. — 48, 2. — 1993. — С. 107–164
2. Петров А. 3. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука. — 1966. — 495 с.
3. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука. — 1979. — 255 с.
4. Matveev V. S. The eigenvalues of Sinjukov's operator are globally ordered, Mathematical Notes. — 77, №3-4, 2005. — P. 380–390.
5. Kiosak V., Mikes J., Chepurna O. Conformal mappings of riemannian spaces which preserve the Einstein tensor // Journal of Applied Math. — vol.III, №1, 2010. — P. 253–258
6. Kiosak V., Mikes J., Chepurna O. On Geodesic Mappings Preserving the Einstein tensor // Acta Univ. Palacki. Olomouc., fac. rer. nat., Mathematika 49. — №2, 2010. — P. 49–52
7. Formella S. On gedestic mappings in some riemannian and pseudoriemannian manifolds // Tensor. — 1987. — 46. — P. 311–315
8. Formella S. Generalized Einstein manifolds // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1990. — 22. — С. 49–58

Геометрия многомерных пространств. Правило построения трёхмерных проекций многомерных пространств

Магула А. С. Мячиков А. В.

Аннотация В настоящей работе представлен способ визуализации многомерных пространств с измерениями 4, 5, 6, 7 и т. д., в трехмерном пространстве. На основе свойств степенного ряда 2^n , предложена закономерность определения числа секторов многомерных пространств. На основе свойств числового треугольника Паскаля предложено правило построения трехмерных проекций многомерных пространств. Проведен анализ графических и алгебраических форм представления многомерных пространств, существующих на современном этапе. Представлена геометрическая и физическая интерпретация $\sqrt{-1}$ - основного компонента комплексных чисел, как алгебраической формы моделирования многомерных пространств. Выведены формулы для: длины окружности пространства с мерностью n , площади поверхности четырехмерной сферы и трехмерного объема четырехмерного шара. Определен алгоритм вывода формул площади поверхности и объема для пяти и шести мерных сфер.

Ключевые слова многомерное пространство, проекция многомерного пространства, площадь поверхности четырехмерной сферы, объем четырехмерного шара.

Введение

В результате анализа установлено, что во многих формулах современной физики, квантовой механики, астрономии и информатики существует

ряд случаев, когда можно встретить признаки моделей многомерных пространств. Такие признаки применяются прямо или косвенно, - через введение дополнительных координат, степеней свободы или просто коэффициентов в виде числа 2 или 2^n . Такие привнесения, часто открывают новые интересные возможности теорий, расчетов или оценки результатов, однако являются скорее эмпирическим или интуитивным актом расширения пространства, исследуемых процессов до 4, 5, 6 и более пространственных измерений и не достаточно описаны и осознаны. (Опережая изложение, необходимо сказать, что элементы степенного ряда 2^n является коэффициентом пропорциональности при определении количества секторов многомерных пространств). В качестве подтверждения актуальности данной темы приведены следующие примеры:

В 1921 году немецкий физик Альфред Ланде, при исследовании спектра испускания электронов атомов, помещённых в магнитное поле, обнаружил, что полученные результаты отличаются от расчетных в 2 раза. Для устранения несоответствий в расчетах Ланде искусственно ввел множитель 2, который получил название множитель Ланде или g-фактор. g-фактор (фактор магнитного расщепления), множитель в формуле для расщепления уровней энергии в магнитном поле, определяющий масштаб расщепления [1, с. 344]. Позднее для него была выведена формула. Для чисто орбитального момента электрона g-фактор равен 1, для чисто спинового момента он равен 2. Позднее численное значение g было уточнено на основании данных экспериментов $g = 2.0023$.

В 1925 году, дополнительная четвертая степень свободы частицы, введенная немецким физиком Волфгангом Паули (позднее названная спином), позволила объяснить целый ряд явлений: явление магнетизма, расщепление спектральных линий тонкой структуры в магнитном поле (эффект Зеемана), закономерности периодической системы и много других явлений [1, с. 733]. Однако четырёхмерность пространства внутри атома признается только косвенно, так как в расчетах, как правило, применяются операторы, включающие в себя 3 координаты пространства (Гамильтона, Лапласа и др.).

В концепции строения протонов и нейтронов атомного ядра из гипотетических материальных частиц - кварков, применяется коэффициент пропорциональности - 2^n . Кварки связаны между собой глюонами, также гипотетическими частицами, являющимися переносчиками сильного взаимодействия. Так для кварков существует три значения квантовых чисел (цвет),

для глюонов - 8, в соответствии с количеством секторов трехмерного пространства - $2^3 = 8$. Также в теории кварков существует понятие гиперзаряд как сумма квантовых чисел частицы, характеризующих её кварковый состав и состояние. Гиперзаряд (обозначается Y) частицы - сумма - барионного числа B и ароматов: странности S , очарования C , прелести B , истинности T , Гиперзаряд (Y) сводится к удвоенному электрическому заряду (Q), $Y = 2Q$ [1, с. 122].

В астрономии существует эмпирическое правило Тициуса - Боде, устанавливающее зависимость между расстояниями планет от Солнца. Правило было предложено Иоганом Даниэлем Тициусом в 1766 и получило всеобщую известность благодаря работам Иогана Элерта Боде в 1772. Правило, с точностью 2-5 %, предсказывает размер больших полуосей орбит планет солнечной системы a , в астрономических единицах (радиусах земной орбиты): $a = 0.1(3 \cdot 2^n + 4)$, где n - числа от 0 до 7. Как и для определения числа секторов многомерных пространств в формуле правила присутствует множитель 2^n . Правило действует для всех планет от Меркурия до Плутона из этой последовательности выпадает, только планета Нептун [2, с. 1337]. Удовлетворительного теоретического объяснения этой эмпирической зависимости не имеется.

Формулы вычисления первой, второй и третьей космических скоростей также содержат в себе отличие только в числе 2. Первая космическая скорость: $v_1 = \sqrt{GM/r}$, преодоление гравитационного притяжения планеты - $v_2 = \sqrt{2GM/r}$; преодоление гравитационное притяжение Солнца и или Солнечной системы v_3 , формула совпадает с v_2 . [1, с. 314].

В последнее время возникло и оформилось целое научное направление, связанное с вейвлет-анализом и теорией вейвлет-преобразования. Вейвлеты (от англ. wavelet), всплески - это математические функции, позволяющие анализировать различные частотные компоненты данных. Вейвлеты широко применяются для фильтрации и предварительной обработки данных, анализа состояния и прогнозирования ситуации на фондовых рынках, распознавания образов, при обработке и синтезе различных сигналов, например речевых, медицинских, сейсмических, геофизических, сжатия и обработки изображений (форматы JPEG2000, MPEG4) и во многих других случаях. Ключевое значение в вейвлет-анализе имеет выбор функции самого вейвлета, как составной части анализируемого сигнала, и задание коэффициентов интегрирования a_0, b_0 . При весьма специальном выборе, при $a_0 = 2$ и $b_0 = 1$, наиболее хорошими свойствами частотно-временной локализации обладает

функция: $\Psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}x - n)$, где m - вещественные числа [3, с. 34]. В данном случае вейвлет-анализ также приходит к использованию коэффициента 2^m .

Приведенные примеры, затрагивают фундаментальные области физики, астрономии, информатики, напрямую или косвенно связанные со свойствами пространства, как в микро, так и макро масштабах. Во всех примерах, в формулах присутствуют либо дополнительные координаты, либо множители в виде числа 2 или 2^n . Использование данных множителей зачастую имеет эмпирический характер, искусственное либо малообъяснимое происхождение, материал, изложенный в данной статье позволяет дать этому объяснение.

Представление многомерных пространств можно подразделить на две основные формы графическую и алгебраическую. Для более точного определения геометрии многомерных пространств особое значение имеет разработка графической формы. Рассмотрим последовательно обе формы представления многомерных пространств.

1 Анализ графических форм представления многомерных пространств.

Графическая форма представления многомерных пространств - более сложная, чем алгебраическая, так как связана с изображением в трёхмерности объектов пространств, имеющих большее число измерений чем 3. Для построения таких изображений необходимо разрешить ряд ключевых трудностей:

- выявить геометрическую структуру многомерных пространств;
- определить количественные характеристики объектов многомерных пространств;
- построить трехмерные проекции многомерных пространств.

Рассмотрим графические образы представления многомерных пространств, применяемые на современном этапе:

Многомерное пространство - пространство, имеющее число измерений (размерность) более трех. Реальное пространство имеет 3 измерения, поверхность - 2, линия 1. Обычная "пространственная интуиция человека ограничена тремя измерениями. Введение понятия о пространствах 4 и большего числа измерений даёт возможность решить многие вопросы при помощи геометрических аналогий [1, с. 377]. Примеры многомерных пространств: n -мерное евклидово пространство или **гильбертово пространство**, четы-

рёхмерное пространство - время в теории относительности, фазовые пространства механических и др. систем. В трехмерном пространстве через каждую его точку можно провести три взаимно перпендикулярные прямые, но уже нельзя провести четыре. Если принять указанные три прямые за оси координат, то положение каждой точки пространства определится заданием трех действительных чисел - ее прямоугольных координат. Обобщая это положение, n -мерным евклидовым пространством называют совокупность всевозможных систем из n чисел - "точек" этого пространства. Многомерное пространство, является алгебраическим понятием и, как правило, не изображается графически.

Пространство Минковского -четырёхмерное псевдоевклидово пространство, объединяющее физическое трехмерное пространство и время. Точки в пространстве Минковского соответствуют "событиям" специальной теории относительности; положение события задается четырьмя координатами, - тремя пространственными и одной временной [1, с. 422]. Практически во всех источниках изображение четырехмерного пространства Минковского (Рис. 1, а) представлено в виде двух световых конусов событий специальной теории относительности, где одна из осей пространственных координат совмещена с осью времени, что фактически является условным трехмерным изображением четырехмерного.

На рисунке 1, б представлена визуализация многомерного объекта из пространства Калаби - Яу, получена одним из творцов теории суперструн Леонардом Сасскиндом, Стэнфордский университет [5]. **Теория суперструн**, физическая теория, пытающаяся объяснить свойства элементарных частиц и их взаимодействие. Она объединяет квантовую теорию и теорию относительности, в особенности, в объяснении ядерных сил и силы тяжести. Суперструны являются гипотетическими одномерными объектами, длиной около 10^{-35} м, для обеспечения которых необходима десятимерная Вселенная. В качестве геометрической модели теории суперструн пользуется пространствами Калаби-Яу. **Пространство Калаби - Яу** - является римановым многообразием, т.е. обобщением геометрии Римана на многомерные пространства. [6, с. 18]. Геометрия Римана, как и геометрия Лобачевского изучает фигуры расположенные в пространствах с положительной и отрицательной кривизной (выпуклые и вогнутые) соответственно. Изображение (Рис. 1 б.) представляет собой трёхмерную проекцию шестимерного "струнного" объекта (частицы) пространства Калаби - Яу. Приведенное изобра-

жение, является моделью, однако, в ней трудно рассмотреть систематику геометрии шестимерного пространства или его трехмерной проекции.

Развитие теории относительности привело к появлению моделей, где базовым является не пространство Минковского, а пространство Финслера. На рисунке 1 в. представлено вид двух световых конусов событий специальной теории относительности в четырехмерном финслеровом пространстве [7], направленных вдоль оси времени (мировой линии). **Финслерово пространство** - метрическое пространство, метрика которого задаётся положительной однородной формой относительно дифференциалов координат: $f(x, \lambda dx) = \lambda f(x, dx)$. Геометрия финслеровых пространств является одним из обобщений римановой геометрии. Пауль Финслер (1918) дал первое обстоятельное исследование таких пространств. (Математика. Большой энциклопедический словарь, 1999, 608). Под метрикой понимается расстояние между двумя соседними точками пространства, как элементами множества. Существует множество способов задания расстояний: метрика может вводиться как привычное расстояние по прямой, в случае евклидовой геометрии, по дуге в случае римановых пространств и др. В отличие от обычного физического пространства, финслерово пространство, как и пространство Минковского, анизотропно. Пространство Минковского имеет одно выделенное направление - время, а финслерово пространство имеет 8 таких выделенных направлений. Как и на изображении пространства Минковского (Рис. 1 а) ось времени на рисунке 1 в. совпадает с одной из осей пространства, поэтому данное изображение также является условным трехмерным изображением четырехмерного пространства событий, но уже финслерового пространства.

Проведя 8 лучей из точки схождения тетраэдров вдоль выделенных направлений анизотропии финслерового пространства, получим обычный октаэдр, как модель трехмерного пространства (Рис 5 в).

На рисунке 1 г. изображен вид двух световых конусов событий специальной теории относительности, но уже в пятимерном финслеровом пространстве, где имеются 4 измерения пространства и одно измерение времени [8]. На этом изображении в световой конус, как сектор пространства, введена четвертая пространственная ось, а ось времени также совмещена с одной из осей координат. Рисунок 1 г. представляет собой трехмерное изображение двух симметричных секторов четырехмерного пространства, если в соответствии с анизотропией финслерова пространства продолжить построение, следует расположить представленную фигуру вдоль четырех осей четырехмерного пространства, т. е. изобразить многогранник, состоящий из

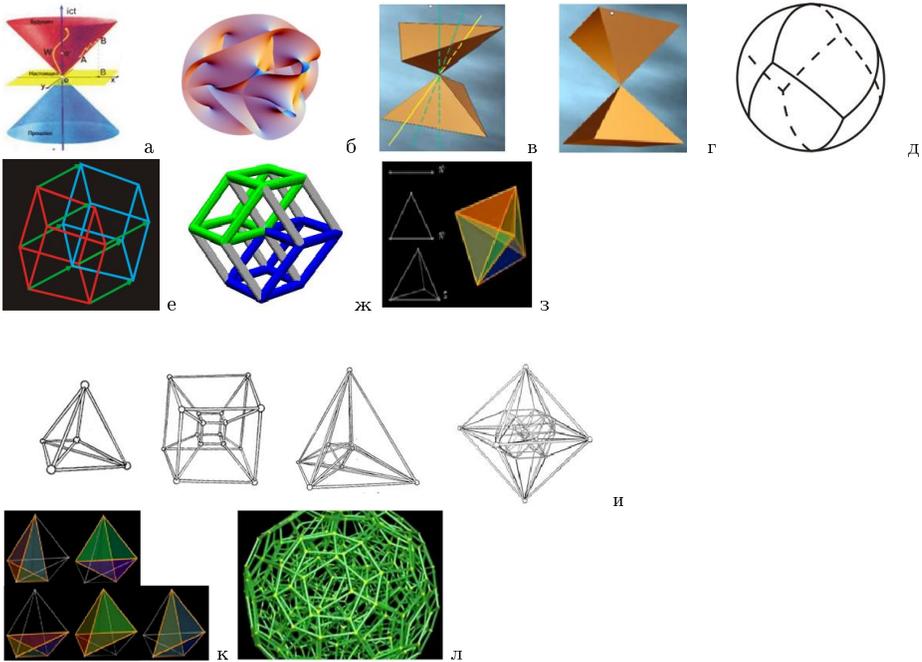


Рис. 1

Изображения многомерных пространств.

а. Световой конус в пространстве Минковского.

б. Трёхмерная проекция шестимерного пространства Калаби - Яу, получена Леонардом Сасскиндом (Стэнфордский университет) с помощью Mathematica Physics World 16 (11).

в. Световой конус в трёхмерном финслеровом пространстве [8]

г. Световой конус в четырехмерном финслеровом пространстве [8]

д. Модель четырехмерного финслерова пространства "8 ромбов на поверхности шара".

е. Модель четырехмерного пространства "Четырехмерный куб" или "Гиперкуб".

ж. Ромбодекаэдр.

з. Постороение 1, 2, 3, и 4-х мерного симплекса (Симплекс - (от латинского simplex - простой) простейший выпуклый многогранник данного числа измерений n).

и. n -ячейки (слева направо: 5, 8, 16, 24), как многогранники четырехмерного пространства [10].

к. 5 трехмерных граней четырехмерного симплекса

л. n -ячейка 120 или четырехмерная проекция додекаэдра "Стодвадцать"[11] "

восьми квадратов. Многогранник из 8 квадратов в трехмерном пространстве не существует, поэтому для определения геометрической структуры грани следует деформировать, приводя к ромбам. Фигуру из 8 ромбов можно построить в трехмерном пространстве, но грани такой фигуры не будут плоскими. Фигуру из 8 ромбов можно изобразить на поверхности шара (Рис 1. д) т. е. в римановом пространстве. В работе Г. Ю. Богословского [9] получен результат, который показывает, что поверхность светового фронта в полностью анизотропном финслеровом пространстве событий, при монотонном возрастании скоростей объектов до скорости света, стремится к форме пра-

вильного ромбододекаэдра (Рис. 1 ж). Т.е. если рассматривать сферу в четырехмерном, полностью анизотропном, финслеровом пространстве, в масштабах, сравнимых с солнечной системой, то она будет стремиться к форме ромбододекаэдра. Ромбододекаэдр состоит из 12 плоских ромбических граней. В связи с вышеизложенным, для выявления геометрической структуры четырехмерного пространства важными являются вопросы: "Сколько секторов имеет четырехмерное пространство 8, 12 или более? Какой формы эти сектора?"

На рисунке 1 е. приведена фигура, созданная параллельным переносом куба, которую в литературе называют: "четырёхмерный куб" трехмерная проекция четырехмерного куба "гиперкуб"[10]. Утверждение о четырёхмерности этой фигуры создается, пользуясь логикой: след движения точки - это прямая; прямой - плоскость; плоскости - трехмерное пространство; движение трехмерного пространства - четырехмерное пространство. Приводя полученную фигуру к равности сторон, получаем - ромбододекаэдр (Рис. 1 ж). В данном случае ромбододекаэдр имеет 16 вершин: 14 внешних вершин и 2 внутренние (на рисунке 1 ж они совмещены в центре). Если рассмотреть данное построение с точки зрения основ геометрии, то можно обнаружить ошибку в названии. Обратимся к основным понятиям: точка - безразмерный объект, который может существовать в любом n -мерном пространстве. Прямая, также может существовать в двух, трех, четырёх, пяти и т. д. мерных пространствах и будет иметь привычный для трехмерного пространства вид. Куб - это 8 точек в трехмерном пространстве, соединенных прямыми и плоскостями. В четырехмерном пространстве также можно создать 8 точек и соединить их прямыми, получив тот же вид куба. Утверждения о том, что - та или иная фигура является "четырёхмерным кубом" ошибочны, так как куб в любом n -мерном пространстве имеет 8 вершин, а значит 12 рёбер, 6 граней и является кубом. Продолжая рассуждение, можно сказать, что: в любом n -мерном пространстве с мерностью больше 3-х, все знакомые фигуры трехмерного пространства сохраняют свою форму. Отсюда следует, что четырёхмерность пространства заключается в его природе и структуре и для его представления нужно исследовать количество и расположение его секторов, следы движения трехмерных фигур не дают представление о геометрии четырехмерного пространства. Поэтому фигура на рисунке 1 е. не "четырёхмерный куб" а трехмерный след движения куба и может рассматриваться как трехмерная модель четырехмерного пространства, к сожалению не отражающая его структуру.

Примером многомерного объекта является симплекс. **Симплекс** - (от латинского simplex - простой) простейший выпуклый многогранник данного числа измерений n . При $n = 3$ трехмерный симплекс представляет собой произвольный, в том числе неправильный тетраэдр [7, с. 543]. На рисунке 1 з представлены симплексы 1, 2, 3 и 4-х мерного пространства. Логика построения симплексов проста: если треугольник, с тремя вершинами - это симплекс двумерного пространства, а тетраэдр, с четырьмя вершинами - это симплекс трехмерного пространства, то, добавляя одну вершину и соединяя их между собой, получаем трехмерную проекцию симплекса четырехмерного пространства. Симплекс четырехмерного пространства имеет 5 вершин, 10 ребер, 10 двумерных граней и 5 трехмерных граней (Рис 1 к). Выполняя построение дальше, можно определить топологию, количество точек, ребер и граней простейших многогранников (аналогов тетраэдра) в любом n -мерном пространстве и получить их трехмерную проекцию. Однако, определить геометрическую структуру самого четырехмерного пространства, т. е количество секторов и их форму, пользуясь симплексами практически невозможно. Построение других четырехмерных многогранников, с большим, чем симплексов, количеством вершин ведется с помощью параллельного переноса подобно "гиперкубу" (Рис. 1 е). Правильные многогранники четырехмерного пространства строятся исходя из условия, если в трехмерном пространстве поверхности, ограничивающие тело, являются правильными многоугольниками, то в четырехмерном пространстве области, ограничивающие четырехмерный образ, являются правильными многогранниками. Такие образы, называются n -ячейками, по числу многогранников, их известно 6: ячейки 5, 8, 16, 24, 120 и 600 [10, с. 148]. На рисунке 1 и, изображены ячейки 5, 8, 16 и 24, как многогранники четырехмерного пространства. Все n -ячейки строятся параллельным переносом и имеют большое количество внутренних вершин. Часто n -ячейки называют четырехмерными проекциями правильных многогранников, такая проекция додекаэдра, построенная параллельным переносом по различным направлениям, называется: "Сто двадцать" (Рис. 1 л.) [11]. Важно понимать, что многогранник или его проекция могут существовать в любом n -мерном пространстве, и какой из них совпадает со структурой или топологией конкретного пространства, предстоит определить.

2 Алгебраическая форма представления многомерных пространств - комплексные числа.

Формально, положение точки или любого объекта в многомерном пространстве можно задать с помощью координат. Координаты являются числами, и их количество соответствует мерности пространства. Одним из обобщений понятия числа являются комплексные числа. Комплексные числа добавляют к обычной последовательности действительных чисел дополнительное измерение мнимой оси. Вместо одномерной последовательности действительных чисел возникает пространство чисел, множество которых задаются уже не прямой, а координатной плоскостью, одна из осей которой - мнимая.

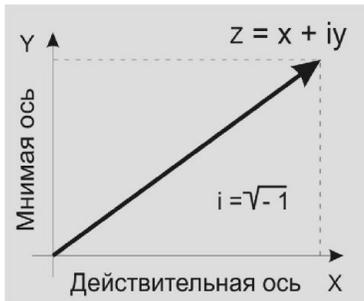


Рис. 2 Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Комплексное число имеет геометрический смысл координат вектора этой плоскости вида: $z = x + iy$ (Рис. 2). При моделировании многомерных пространств, количество мнимых и действительных осей увеличивается, такие пространства задаются гиперкомплексными числами. Гиперкомплексные числа могут быть рассмотрены как точки в некотором многомерном Евклидовом пространстве. Так, например, четырехмерное пространство может быть задано одной из модификаций гиперкомплексных чисел - кватернионами, которые имеют одну действительную ось и три мнимые. В настоящее время существует множество модификаций гиперкомплексных чисел, которые в различных вариациях моделируют числовые плоскости и пространства с измерениями до 16 (Рис. 3). Гиперкомплексные числа моделируют многомерные пространства алгебраически как множество чисел. Как правило, результатом моделирования является численный результат или формула. Получение образа, как наглядной картины многомерного объекта, события или процесса затруднено. Данные затруднения обусловлены скорее психоло-

гически, чем геометрически и обусловлены отсутствием опыта восприятия пространств с мерностью более трёх и могут приводить к ошибкам.



Рис. 3 Классификация гиперкомплексных чисел как форм представления многомерных пространств.

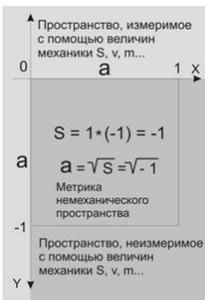


Рис. 4 Геометрическая и физическая интерпретация $\sqrt{-1}$

Мнимый характер оси Y комплексной плоскости (Рис. 2) задается присутствием множителя $i = \sqrt{-1}$. Значение: $i = \sqrt{-1}$ предложил Леонард Эйлер в 1777 г. Известно, что И. Ньютон не включал комплексные величины в понятие числа, а Г. Лейбницу принадлежит фраза: "Мнимые числа - это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием"[7, с. 278]. С точки зрения математики выражение: $\sqrt{-1}$ - абстрактный символ, не имеющий смысла. Сущность этого символа следует искать больше в области физики и философии. С точки зрения физики его можно интерпретировать так: $\sqrt{-1}$ - это форма метрики пространства, которое не измеримо с помощью положительных расстояний, и механических величин. Графически, $\sqrt{-1}$ - это одна из сторон квадрата со сторонами 1 и -1 (Рис. 4), который лежит, в так называемом, немеханическом пространстве или немеханической его части. Немеханическое про-

странство имеет отрицательную размерность расстояния. Отрицательный знак здесь лишь, указывает на непринадлежность к миру величин механики и имеет условное значение. Так же как условное значение имеет, принятое в математике правило, что результат умножения и деления двух отрицательных чисел есть - положительное число. Немеханическое пространство имеет проекцию на оси обычного пространства, а значит, может оказывать на него влияние. Как известно из физики, такие немеханические пространства не просто абстракция, а реальный мир взаимодействий известный нам как электричество, магнетизм, мир атомов и молекул. В квантовой теории есть ряд механических ограничений, так для объектов микромира: не существует такое понятие как, - траектория частицы; принцип неопределенности Гейзенберга указывает на невозможность одновременного определения координат частицы и её импульса.

3 Геометрия пространств с мерностью 0, 1, 2, 3, 4, 5...

Анализ источников показал, что для выявления геометрической структуры многомерных пространств необходимо определить: "Какое количество секторов имеют пространства с мерностью больше трёх, и какую форму имеют сектора?". Трёхмерное пространство, разделяется координатными плоскостями на 8 октантов (Рис. 5).

Для любого n-мерного пространства установлено, что если: показатель степени n принять за мерность пространства, то результатом возведения в степень числа 2, по этому показателю, является количество секторов соответствующего n-мерного пространства.

Рассмотрим степенной ряд $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 \dots$

$-2^0 = 1$; 0 - нульмерное пространство; 1 - один сектор нульмерного пространства - точка.

$-2^1 = 2$; 1 - одномерное пространство (прямая); 2 сектора - положительная и отрицательная полуось координатной оси.

$-2^2 = 4$; 2 - двухмерное пространство (плоскость); 4 сектора координатной плоскости.

$-2^3 = 8$; 3 - трёхмерное пространство; 8 секторов (октантов) (Рис. 5). Для наглядного изображения формы секторов на рисунке 5 в координатные плоскости вписан октаэдр.

$-2^4 = 16$; 4 - четырёхмерное пространство; 16 секторов.

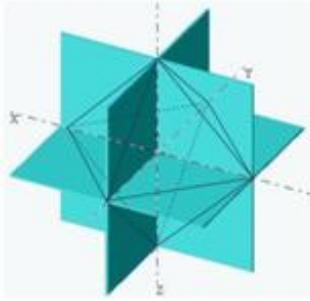
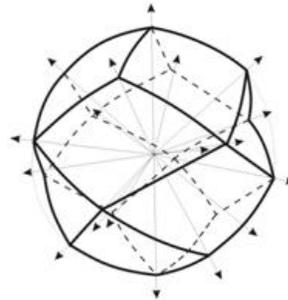
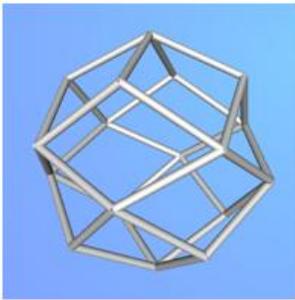
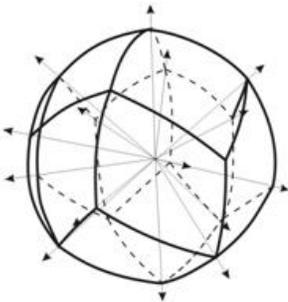


Рис. 5 Модель трехмерного пространства "Октаэдр".



а

б



в

Рис. 6 Модели 4-х мерного пространства, а - ромбический шестнадцатигранник или ромбоседекаэдр (от латин. sedecim - шестнадцать); б - ромбический шестнадцатигранник на сферической поверхности. в. - ромбический шестнадцатигранник (вариант 2)

Изложение подходит к понятиям, непривычным опыту нашего восприятия. Важно понять, что пространство - реальность, данная в ощущении, поэтому представить многомерное пространства можно только, анализируя собственные ощущения. Фигуры, показывающие геометрическую структуру пространств четырёх, пяти, шести и т. д. измерений, - это трёхмерные модели этих пространств. Важно не путать модели и трехмерные проекции многомерных пространств. Модели показывают геометрию многомерных пространств в себе, проекции представляют собой геометрическое место точек

проецирования многомерных объектов в трехмерные и будут рассмотрены в следующем разделе.

В трехмерном пространстве невозможно провести четвертую пространственную ось, пытаясь соблюсти условие ортогональности, при котором углы между осями будут прямыми. Важно понять, что четырехмерное пространство по природе своей имеет "ёмкость свобод" большую, чем трехмерное. "Ёмкость" многомерного пространства можно оценить через объем n -мерного шара (расчеты приведены в разделе 4). Форма секторов пространства, с увеличением мерности, усложняется: для одномерности это - луч, и в своем пространстве видится он как точка; для двумерности - треугольник, в своём пространстве видится как линия; для трехмерности сектор представляет собой пирамиду с треугольником в основании (Рис. 5). Соответственно, для четырехмерного пространства сектор представляет собой пирамиду с квадратом в основании; сектор - пятимерности пирамида с пятиугольником в основании и т. д.

Изобразить объёмную замкнутую фигуру из 16 квадратов, как модель четырёхмерного пространства, в пространстве трёх измерений, не представляется возможным из-за несоответствия "ёмкости" трёхмерного пространства, поэтому модель четырёхмерности возможно изобразить только, деформируя сектора и приводя квадраты к ромбам (Рис. 6 а). На рисунках 6 б и в представлены варианты шестнадцатигранников на сферической поверхности. В четырехмерном пространстве углы между лучами модели составляют 90 градусов, отобразить это на трехмерном рисунке не представляется возможным. Сектора трехмерного пространства разделены плоскостями, поверхности, разделяющие сектора модели четырехмерного пространства, в трехмерном пространстве имеют ломаную структуру, поэтому количество осей и полюсов, приведенных моделей (Рис 6 б, в) больше чем 4 и 8, соответственно. Чтобы приблизиться к ощущению четырёхмерного пространства нужно представить, что в каждом из шестнадцати секторов этого пространства вы также свободны, как и в каждом из восьми секторов трёхмерного пространства.

Фигура на рисунке 6 а - ромбический шестнадцатигранник или ромбоседекаэдр (от латин. *sedecim* - шестнадцать) является ближайшим аналогом ромбододекаэдра (Рис.1 ж). Ромбический шестнадцатигранник имеет 16 четырехугольных граней, 18 вершин и 32 ребра, грани не являются плоскими четырехугольниками. Однако, если расположить эту фигуру на сферической поверхности то можно получить фигуру римановой геометрии, в ко-

торой ромбические грани будут участками сферы. Так же как и ромбододекаэдр, ромбический шестнадцатигранник не может быть вписан в сферу, так как вершины с четырьмя примыкающими гранями, отстоят от центра дальше, чем вершины с тремя гранями. Для приведения фигуры к равности сторон и граней сферическую поверхность нужно немного вытянуть, превратив её в подобие яйца, визуально это практически незаметно. На рисунке 6 в изображен вариант сферического ромбического шестнадцатигранника, с равными гранями, который может быть вписан в сферу. Следует ожидать, что ромбический шестнадцатигранник, в четырехмерном пространстве, является правильным многогранником, также как октаэдр в трехмерном.

$-2^5 = 32$; 5 - пятимерное пространство; 32 сектора. Сектор пятимерного пространства - пирамида с пятиугольником в основании. Изобразить многогранник из 32 правильных пятиугольников в трехмерном пространстве не представляется возможным, поэтому грани нужно деформировать из-за несоответствия "ёмкости" трехмерного пространства пятимерному. Фигура из 32-х пятиугольников (Рис. 7 а) имеет 32 грани, 50 вершин и 80 ребер. Грани представленной фигуры нельзя привести к равности сторон, однако можно соблюсти условие, при котором площадь граней будет одинакова, а соответствующие стороны граней равны. Для простоты восприятия модель пятимерного пространства, также может быть представлена фигурой, полученной от взаимного размещения икосаэдра и додекаэдра - 20 и 12 вершин соответственно.

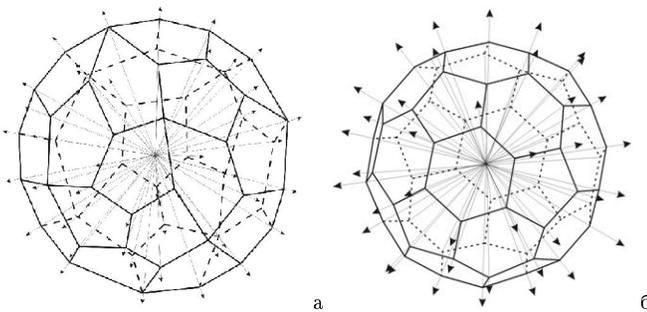


Рис. 7 Модели пятимерного пространства: а. Неправильный "пятиугольный тридцатидвугранник" с пятиугольными гранями; б: "Футбольный мяч".

Взяты совместно, эти две фигуры имеют 32 вершины. Если через вершины провести плоскости, перпендикулярные оси фигуры, то получится фигура знакомая нам как футбольный мяч - 32 грани: 12 пятиугольников и 20 шестиугольников (Рис. 7 б). Для того, чтобы приблизиться к ощущению

пятимерного пространства нужно понять, что все углы между осями равны 90 градусов и в каждом из 32 секторов вы также свободны, как и в каждом из восьми секторов трехмерного пространства. Модели пространств с мерностями 6, 7, 8 и более, строятся с применением степеней числа 2, где многогранники будут иметь по $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ секторов, соответственно. Сектора пространств будут выглядеть как пирамиды с основанием в виде многоугольника, с числом ребер, равным мерности пространства. Фигуру из 64 шестиугольников возможно построить, деформируя плоскости граней и уходя от равенности сторон. Построение фигур из 128 семиугольников и 256 восьмиугольников в пространстве трех измерений не представляется возможным.

4 Построение трехмерных проекций многомерных пространств.

На основании алгоритма моделирования n-мерных пространств по 2^n , изложенном в предыдущей главе установлено что, трехмерная проекция любого из n-мерных пространств, строится в соответствии со строками треугольника Паскаля. Треугольник Паскаля - арифметический треугольник, треугольная числовая таблица для составления биномиальных коэффициентов [8].

Проекция любого n-мерного пространства состоит из такого количества точек, прямых, плоскостей, пространств трех, четырех, пяти и т. д. измерений, какое показывает цифра, находящаяся на соответствующем месте в строке числового треугольника Паскаля. Номер строки соответствуют мерности проецируемого пространства, начиная от 0, порядковый номер числа в строке соответствует мерности пространств - элементов проекции, цифра показывает количество таких элементов (Рис. 8) .

				Точки								
				Прямые	1							
				Плоскости	1	1						
			Пространства 3-х изм.	1	2	1						
			Пространства 4-х изм.	1	3	3	1					
			Пространства 5-ти изм.	1	4	6	4	1				
			Пространства 6-ти изм.	1	5	10	10	5	1			
			Пространства 7-ми изм.	1	6	15	20	15	6	1		
			Пространства 8-ми изм.	1	7	21	35	35	21	7	1	
				1	8	28	56	70	56	28	8	1

Рис. 8 Треугольник Паскаля - ключ к построению трёхмерных проекций многомерных пространств.

Сумма биномиальных коэффициентов в строках равняется элементам степенного ряда 2^n и показывает количество секторов n-мерного про-

странства. Рассмотрим построение проекций пространств от 0 до 7, в соответствии с рисунком 8. Каждый наклонный столбец соответствует элементу проекции n-мерного пространства, - точке, прямой, трех, четырех, пяти мерному пространству и т. д. Цифры в строках показывают количество соответствующих элементов проекции.

$2^0=1$ (1) - нульмерное пространство: одна точка;

$2^1=2$ (1 1) - одномерное пространство: одна точка, одна прямая, (два направления);

$2^2=4$ (1 2 1) - двумерное пространство: одна точка, две прямых, одна плоскость (4 сектора).

$2^3=8$ (1 3 3 1) - трёхмерное пространство: одна точка, три прямых, три плоскости, одно трёхмерное пространство (8 октантов) (Рис. 9).

$2^4=16$ (1 4 6 4 1) - проекция четырёхмерного пространства: одна точка, 4 прямых, 6 плоскостей, 4 трёхмерных пространства, одно четырёхмерное пространство (Рис. 10).

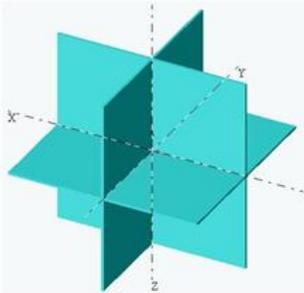


Рис. 9 Модель трехмерного пространства

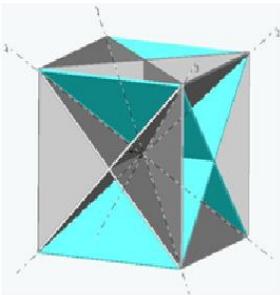


Рис. 10 Проекция четырехмерного пространства

На рисунках проекций n-мерных пространств будут изображаться только точки, прямые и плоскости, пространства трёх и более измерений можно наглядно воспроизвести с помощью сфер, однако это только усложнит представление, поэтому их изображение не целесообразно. Четыре прямые: 1,2,3,4, проходящие через точку и, равноудалённые друг от друга в пространстве, будут расположены вдоль диагоналей куба (Рис. 10). Каждым двум парам прямых, соответствуют 6 плоскостей: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Каждым трём прямым соответствуют 4 трехмерных пространства: 123, 124, 234, 134. При взаимном пересечении четыре трёхмерных пространства, с центрами в вершинах тетраэдра, дают всё те же 6 плоскостей, 6 плоскостей - 4 прямых, поэтому проекцию четырёхмерного пространства можно также построить и по алгоритму от большего измерения к меньшему.

Из рисунка 10 видно, плоскости проекции четырёхмерного пространства при пересечении образуют ещё три прямые, выходящие из центров граней куба и повторяющие модель трёхмерного пространства. Таким образом, проекция четырёхмерного пространства содержит в себе проекцию трехмерного и далее проекции всех меньших пространств. $2^5=32$ (1 5 10 10 5 1) - проекция пятимерного пространства: 1 точка, 5 прямых, 10 плоскостей, 10 трёхмерных пространств, 5 четырёхмерных пространств, одно пятимерное пространство (Рис. 11).

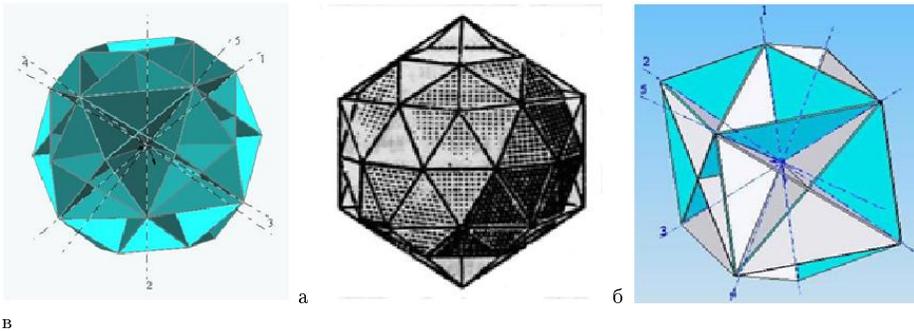


Рис. 11 а - проекция пятимерного пространства "Пятиугольная антипризма"; б - фигура, производная от икосаэдра; в - проекция пятимерного пространства на основе куба.

Построены 2 варианта проекции пятимерного пространства: с расположением прямых вдоль осей пятиугольной антипризмы, когда все плоскости образованы парами прямых (Рис. 11, а) и проекция на основе куба, когда в двух плоскостях лежат по три прямые (Рис. 11, в). Если соединить середины сторон икосаэдра, то будет получена фигура, состоящая из правильных

пятиугольников и треугольников (Рис. 11, б). Эта фигура является основой для визуального представления проекции "Пятиугольная антипризма". Пять прямых - 1,2,3,4,5 проходящих через точку и, равноудалённо друг от друга в пространстве, расположены вдоль диагоналей пятиугольной антипризмы (Рис. 11 а). Каждым двум парам прямых соответствуют 10 плоскостей: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Каждым трём прямым соответствуют 10 трехмерных пространств: 123, 124, 125, 234, 235, 134, 135, 145, 245,345.

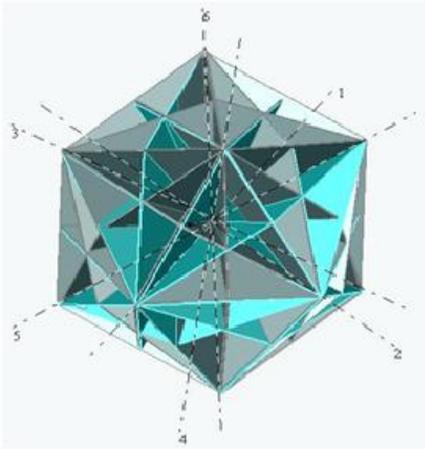


Рис. 12 Проекция шестимерного пространства "Икосаэдр"

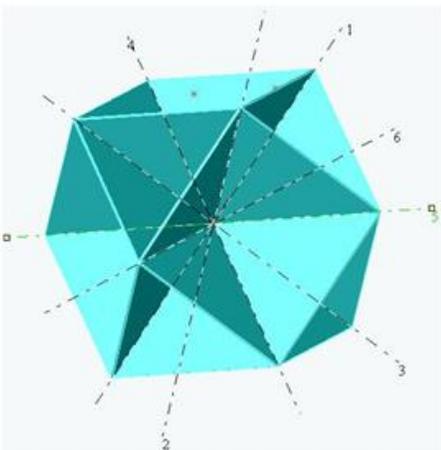


Рис. 13 Проекция шестимерного пространства "Усечённый октаэдр".

Трёхмерная проекция пятимерного пространства не образует симметричной фигуры в трёхмерном пространстве подобно проекциям четырех и шести мерных пространств. Это свойство трёхмерной проекции пятимерного пространства находит подтверждение в факте того, что симметрия с осями 5-го, 7-го порядка и выше, является запрещенной в кристаллографии.

$2^6=64$ (1 6 15 20 15 6 1) - Проекция шестимерного пространства: одна точка, 6 прямых, 15 плоскостей, 20 трёхмерных пространств, 15 четырёхмерных пространств, 6 пятимерных пространств, одно шестимерное пространство (Рис. 12). Проекцию шестимерного пространства удобно рассматривать на основе икосаэдра: шесть прямых проходят через 12 вершин и равноудалены друг от друга, 15 плоскостей соответствуют парам противоположных рёбер из тридцати рёбер икосаэдра: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56. Каждые три прямые образуют 20 комбинаций трёхмерных пространств: 123, 124, 125, 126, 234, 235, 236, 134, 135, 136, 145, 146, 245, 246, 345, 346, 156, 256, 356, 456 и соответствуют 20 треугольникам граням. 15 четырёхмерных пространств располагаются в соответствии с плоскостями. Если продолжить плоскости, то можно получить фигуру, называющуюся икосододекаэдр, получающуюся на основе взаимного расположения икосаэдра и додекаэдра (Рис. 15). На рисунке 13 изображена фигура - усечённый октаэдр, который также является проекцией шестимерного пространства. В проекции "Усечённый октаэдр в каждой из плоскостей лежит по три прямых, а не по две, как у проекции "Икосаэдр поэтому многие плоскости совпадают.

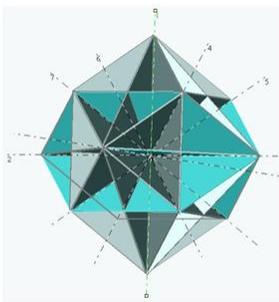


Рис. 14 Проекция семимерного пространства "Кубооктаэдр".

Проекция "Икосаэдр является более наглядной проекцией шестимерного пространства, где все возможные варианты плоскостей отражены самостоятельно.

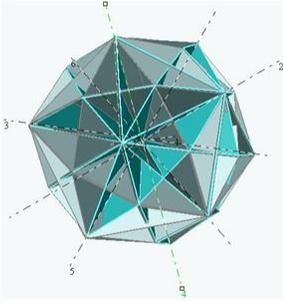


Рис. 15 Проекция шестимерного пространства "Икосододекаэдр".

$2^7=128$ (1 7 21 35 35 21 7 1) - проекция семимерного пространства: одна точка, семь прямых, 21 плоскость, 35 трёхмерных пространств, 35 четырёхмерных пространств, 21 пятимерное пространство, 7 шестимерных пространств, одно семимерное пространство (Рис. 14). Проекция семимерного пространства строится через построение в пространстве семи прямых, обозначенных на рисунке 14 - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Возможна 21 комбинация плоскостей, из двух прямых: 12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67. Существуют проекции семимерного пространства с плоскостями, в которых лежат по 2 и по 3 прямые. Если расположить 7 прямых на равном удалении друг от друга, то в каждой плоскости будет лежать по 3 прямые, также как в проекциях трехмерного и четырехмерного пространств, взятых совместно. В каждой из плоскостей, лежат по три прямые, поэтому, проекция состоит из девяти плоскостей, а не из двадцатиодной, многие из плоскостей проекции семимерного пространства совпадают. Пересечение плоскостей проекции семимерных пространств рождает дополнительно 6 прямых, в серединах сторон условного куба проекции. Данная проекция семимерного пространства воспроизводит проекцию шестимерного пространства "Усечённый октаэдр". Если расположить прямые в проекции семимерного пространства таким образом, чтобы любые три прямые не лежали в одной плоскости, то мы бы получили фигуру, являющуюся результатом пересечения двадцати одной плоскости. Эта фигура имела бы 126 вершин. Замечена закономерность: количество элементов проекции n -мерного пространства равняется количеству секторов модели того же пространства минус 2, $2^n - 2$. Дальнейшее построение проекций пространств с мерностью больше семи остаётся за рамками этой работы, быть может, заинтересованный читатель сделает это самостоятельно.

5 Параметры многомерных окружностей и сфер

Основные задачи раздела:

1. Определить длины окружностей в 4, 5, 6, 7 мерных пространствах;
2. Определить алгоритм вывода формул площади сфер и объемов шара для 5, 6, 7 и т. д мерных пространств.
3. Вывести формулы площади четырехмерной сферы и объема четырехмерного шара;

В модели трехмерного пространства (Рис. 5) сектора ограничены плоскостями, сектора четырехмерной модели в трехмерном пространстве ограничены ломаными поверхностями, которые в своем пространстве являются плоскими. Для того чтобы, описать окружность на четырехмерной плоскости рассмотрим модель четырехмерного пространства на рисунке 6 в, так как она является изотропной. Чтобы описать четырехмерную окружность нужно придерживаться ребер ромбоседекаэдра, таких ребер - 8. Ребро модели моделирует собой участок дуги или угловой сектор в 90 градусов в четырехмерном пространстве (Рис. 17 а). Таких секторов 8, соответственно - четырехмерная окружность составляет $8 \cdot 90 = 720$ трехмерных градусов. В своем пространстве четырехмерная окружность будет выглядеть плоской, но если такую окружность поместить в трехмерное пространство, то она будет выглядеть в виде волнистой линии (Рис. 16). Данная модель четырехмерной окружности совпадает с моделью струны теории Суперструн.

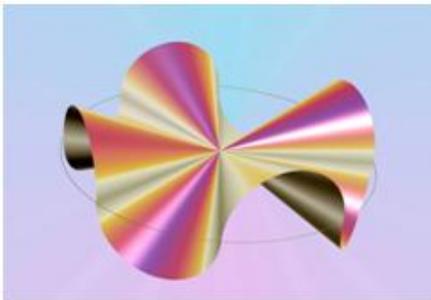


Рис. 16 Четырехмерная окружность в трехмерном пространстве

Для того чтобы, описать окружность с помощью пятимерной модели пространства, нужно пройти вдоль 16 ребер "пятиугольного тридцатидвух-

гранника" (Рис. 17 б). Ребро модели моделирует собой участок дуги или угловой сектор в 90 градусов, но уже в пятимерном пространстве. Пятимерная окружность будет равняться $16 \cdot 90 = 1440$ трехмерных градусов.

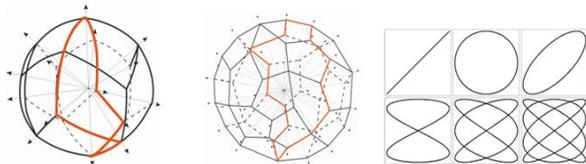


Рис. 17 а - проекция пятимерного пространства "Пятиугольная антипризма"; б - фигура, производная от икосаэдра; в - проекция пятимерного пространства на основе куба.

Модели четырехмерного и пятимерного пространств показывают, что длины окружностей с возрастанием мерности увеличиваются в 2 раза. Следует ожидать что, шестимерная окружность будет иметь 2880, а семимерная 5760 трехмерных градусов и т. д. Длина - 1, любой окружности, принадлежащей пространству с мерностью n , в трехмерных градусах, будет равна:

$$l = 360 * 2^{n-3} \quad (1)$$

Изображение таких окружностей в трехмерном пространстве будут напоминать сферические фигуры Лиссажу (Рис. 17 в) (Лиссажу фигуры - замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Впервые изучены французским учёным Жюлем Антуаном Лиссажу [1, с. 349]).

Площадь трёхмерной сферы равна площади 8 выпуклых сферических треугольников модели (Рис. 5). Пользуясь трехмерной моделью четырехмерного пространства (Рис. 6 в), можно определить, что площадь четырехмерной сферы равна площади 16 выпуклых сферических квадратов, со стороной в виде дуги в 90 градусов. Площадь пятимерной сферы равна площади 32 правильных сферических пятиугольников, стороной в виде дуги в 90° , модели (Рис. 7 а); площадь шестимерной сферы равна площади 64 правильных выпуклых сферических шестиугольников, стороной в виде дуги в 90° и т. д. Пользуясь моделями четырёх и пяти мерных пространств можно вывести правило для вычисления площади поверхности соответствующих сфер. Площадь поверхности n -мерной сферы равна сумме площадей правильных выпуклых сферических n -угольников, со стороной в виде дуги в 90° , взятых в количестве секторов модели соответствующего n -мерного

пространства 2^n . Вычислим площадь поверхности четырехмерной сферы, по отношению к трехмерной сфере равного радиуса R_3 .

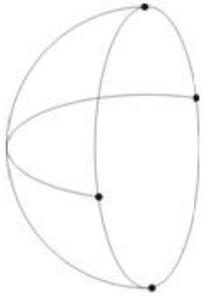


Рис. 18 Поверхность сектора четырехмерной сферы (трехмерная модель).

В трехмерном пространстве правильный выпуклый сферический четырехугольник (квадрат) со стороной в 90 градусов занимает площадь равную полусфере - $2\pi(R_3)^2$ (Рис. 18). Модель сферы четырехмерного пространства будет выглядеть в виде ромбоседекаэдра с гранями в виде полусфер, однако грани ромбоседекаэдра деформированы из квадратов в ромбы, поэтому используется только модель сектора сферы четырехмерного пространства (Рис. 18). Площадь поверхности четырехмерной сферы радиуса R_3 :

$$S_{\text{пов}4} = 2^4 * 2\pi(R_3)^2 = 32\pi R_3^2. \quad (2)$$

При равенстве трехмерных линейных размеров трехмерной и четырехмерной сферы R_3 площадь поверхности четырехмерной сферы в 8 раз больше площади трехмерной. Поверхность четырехмерной сферы, в 32 раза больше площади трехмерного большого круга (πR_3^2), тогда как площадь трехмерной сферы больше круга в 4 раза. Эти сравнения показывают, что при равенстве трехмерных линейных размеров четырехмерное пространство обладает большей плотностью свобод или "ёмкостью" чем трехмерное. Уместно привести аналогию, когда обычная таблетка активированного угля диаметром 1 см, имеет площадь поверхности равную стадиону. Для определения понятий "ёмкость" пространства необходимо рассчитать объем четырехмерного шара. Трехмерную "ёмкость" пространства можно определить как отношение трехмерных объемов n -мерного и трёхмерного шара.

Определение объема тела в многомерном пространстве требует точности понимания основных понятий. Следует разделять, трехмерный, четырехмерный, пятимерный объем и т. д. Трехмерный объем определяется через произведение трех расстояний: длины, ширины, высоты; четырехмерный

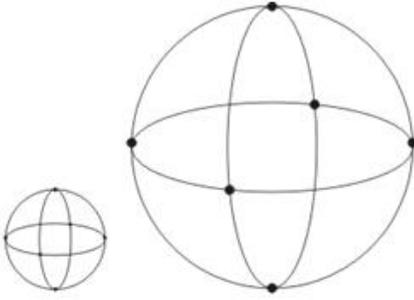


Рис. 19 Трехмерный объем (справа), заключенный в четырехмерном шаре (слева).

объем определяется произведением четырех расстояний и т. д. Объем тела многомерного пространства пропорционален расстоянию, взятому в степени равной мерности этого пространства. Зная площадь поверхности четырехмерной сферы, вычислим трехмерный объем шара $V_{3экв4}$, ограниченного четырехмерной сферой. Для этого приравняем формулы площадей поверхностей обеих сфер $S_{пов4} = S_{пов3}$ и определим радиус трехмерной сферы, равной по площади четырехмерной - $R_{3экв4}$ из выражения:

$$32\pi R_3^2 = 4\pi(R_{3экв4})^2, \quad (3)$$

где R_3 трехмерный радиус четырехмерной сферы. $R_{3экв4} = R_3\sqrt{8}$. Т. е. трехмерная сфера, равная по площади четырехмерной, будет очерчена радиусом в $2,8284(\sqrt{8})$ раз больше. (Рис. 19). Объем шара, очерченного данной сферой будет равен:

$$V_{3экв4} = \frac{4}{3}\pi R_{3экв4}^3 = \frac{4}{3}\pi(R_3\sqrt{8})^3 = 32\pi\sqrt{8}/3 * (R_3)^3 = \pi R_3^3\sqrt{8192}/3 \quad (4)$$

т. е. трехмерный объем четырехмерного шара $R_4 = 1$, будет равен: $V_{3экв4} = \pi(R_3)^3 * \sqrt{8192}/3$, и будет в $22,6274(\sqrt{512})$ раза больше чем аналогичный трехмерный шар, при $R_3 = 1$ (Рис. 19). Если сравнить два одинаковых по размеру шара: шар трехмерного пространства и шар четырехмерного пространства, то в четырехмерном шаре будет заключен трехмерный объем в $22,6274(\sqrt{512})$ раза больше чем в трехмерном шаре. Линейные размеры таких шаров внутри каждого из пространств будут разные: например, для трехмерного шара, трехмерный радиус - $R_3 = 1$, а для четырехмерного шара, того же трехмерного радиуса $R_{3,4-го} = 1\text{см.}$, $R_4 = R_3\sqrt{8} = 2,83$ см. Исходя из этого, актуальным является определение понятия ёмкости

пространства. Трёхмерная ёмкость многомерного пространства - отношение трехмерного объема шара n-мерного пространства единичного радиуса к объему трехмерного шара того же радиуса. Например, трёхмерная ёмкость четырёхмерного пространства равна $22,6274 (\sqrt{512})$, а самого трехмерного пространства равна 1.

Площадь пятимерной сферы равняется площади тридцати двух выпуклых сферических пятиугольников со стороной дуги окружности в 90 градусов. Расположить правильный выпуклый сферический пятиугольник со стороной дуги окружности в 90 градусов на трехмерной сфере не представляется возможным, так как он займет площадь большую, чем полусферы, а значит - не будет выпуклым и правильным. Такой многоугольник можно расположить на четырехмерной сфере, где окружность содержит 720 трехмерных градусов. Расчеты площадей и объемов 5 и 6 мерных сфер выходят за рамки и объем данной работы и будут представлены отдельно.

Таблица № 1 Формулы длины окружности, площади сферы и объема шара для 3 и 4-х мерного пространств, через R_3 (трехмерный радиус).

Величина \ мерность	Трёхмерное пространство	Четырёхмерное пространство
	Трёхмерные единицы	
R - радиус,	R_3	R_3
Lокр— длина окружности, в (метрах)	$2\pi R_3$	$4\pi R_3$
Lокр— длина окружности, в трехмерных градусах.	2π	4π
Sповехн—площадь поверхности сферы	$4\pi(R_3)^2$	$32\pi(R_3)^2$
Vшара—трехмерный объем шара	$\frac{4}{3}\pi R_3^3$	$\sqrt{8192/3\pi}(R_3)^3$

Выводы

В данной работе впервые предложен системный подход определения структуры и ёмкости пространств с мерностью больше трех. Разработаны трех-

мерные геометрические модели для визуализации четырех и пяти мерных пространств. Установлено, что степенной ряд 2^n представляет собой дискретную числовую последовательность, результатом которой является количество секторов любого n -мерного пространства. Определено, что числовой треугольник Паскаля, показывает алгоритм построения трехмерных проекций многомерных пространств. Цифры в строках показывают, сколько и каких элементов содержит проекция. Построены проекции пространств с мерностью 4, 5, 6 и 7. На основе модели четырехмерного пространства выведены формулы для: длины окружности с мерностью n , площади поверхности четырехмерной сферы и трехмерного объема четырехмерного шара. Определен алгоритм вывода формул площади поверхности и объема для пяти и шести мерных сфер.

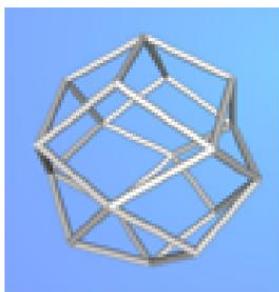
Модели и расчеты показывают, что:

С увеличением мерности пространства длина окружности увеличивается в 2 раза и определяется как $360 * 2^{n-3}$ трехмерных градусов, где n - мерность пространства. Четырехмерное пространство обладает большей ёмкостью, чем трехмерное. Трехмерная ёмкость пространства определяется в относительных единицах и равна отношению трехмерных объемов четырехмерного и трехмерного шара радиуса R . Трёхмерная ёмкость четырёхмерного пространства равна $22,6274 (\sqrt{512})$, а самого трехмерного пространства равна 1. С возрастанием мерности ёмкость пространства увеличивается. результате моделирования пространств с мерностью 4 и 5, получены две новые геометрические фигуры: неправильный ромбоседекаэдр (16 граней и 18 вершин) (Рис. 6) и неправильный пятиугольный тридцатидвухгранник (32 грани и 50 вершин) (Рис. 7 а). Замечено, что число граней и вершин неправильного ромбоседекаэдра, а также неправильного пятиугольного тридцатидвухгранника, совпадают с количеством электронов в периодах системы химических элементов Д. И. Менделеева. **Таблица 2.** Соответствие количества граней и вершин моделей четырех и пятимерных пространств количеству электронов в периодах системы Менделеева

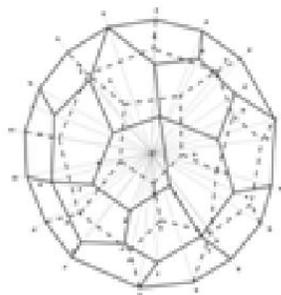
Полученные фигуры четырех и пяти мерных пространств можно применять при моделировании формы электронных оболочек атомов.

Построение симплексов, как проекций простейших многогранников n -мерного пространства, ведется также в соответствии со строками числового треугольника Паскаля. Симплекс трехмерного пространства - тетраэдр, имеет 4 вершины, 6 ребер и 4 грани. Симплекс четырехмерного простран-

№ периода	Электронные орбитали					Количество электронов в периоде	Количество граней/вершин Моделей 4-х и 5-ти мерных пространств
	s	p	d	f	g		
1	2					2	
2	2	6				8	16
3	2	6				8	16
4	2	6	10			18	18
5	2	6	10			18	18
6	2	6	10	14		32	32
7	2	6	10	14		32	32
8	2	6	10	14	18	50	50
9							50



а



б

а - Вид для количества граней 16-18 ; б - Вид для количества 32-50.

ства имеет 5 вершин, 10 ребер, 10 двумерных граней и 5 трехмерных граней (Рис 1 и). Количество элементов n-мерного симплекса соответствует цифрам в n+1 строке числового треугольника Паскаля. По сравнению с алгоритмом построения проекций многомерных пространств, приведенном в этой статье, построение симплексов проводится на строку ниже.

Вид проекции окружности четырехмерного пространства подобен модели струны в теории Струн и Суперструн [6]. Т. е. модель струны, как частицы или моды колебаний, подобна трехмерному виду окружности n-мерного пространства.

Вейвлет анализ и концепция многомерных пространств имеет несколько общих признаков: При построении функции самого вейвлета, как дискретного элемента исследуемого сигнала, используются ортогональные (взаимно перпендикулярные) базисы. Такое же условие ортогональности существует при построении моделей многомерных пространств, когда угол между осями модели равен 90 градусов. В вейвлет преобразовании исходный сигнал определяется в 2^n условных единиц и при синтезе или анализе суммируется

или подразделяется на n компонентов. Таким образом, реализуется подход, при котором исследуемый сигнал является суммой сигналов, каждый из которых моделирует пространство с мерностью n . Подобно тому, как любое n -мерное пространство рассматривается как сумма $n+1$ мерных пространств.

6 Предположения и гипотезы.

Совпадение количества вершин и сторон моделей четырех и пяти мерных пространств с количеством электронов в периодах системы химических элементов, а также, существование спина и g -фактора, создают основания предположить, что для описания процессов и частиц на атомном уровне необходимо перейти к многомерной модели пространства внутри атома. Для чего необходимо дополнить операторы Гамильтона, Лапласа и др. четвертой пространственной координатой, используя, полученные модели. Это позволит устранить или облегчить трудности, возникающие при определении координат и траекторий частиц внутри атома.

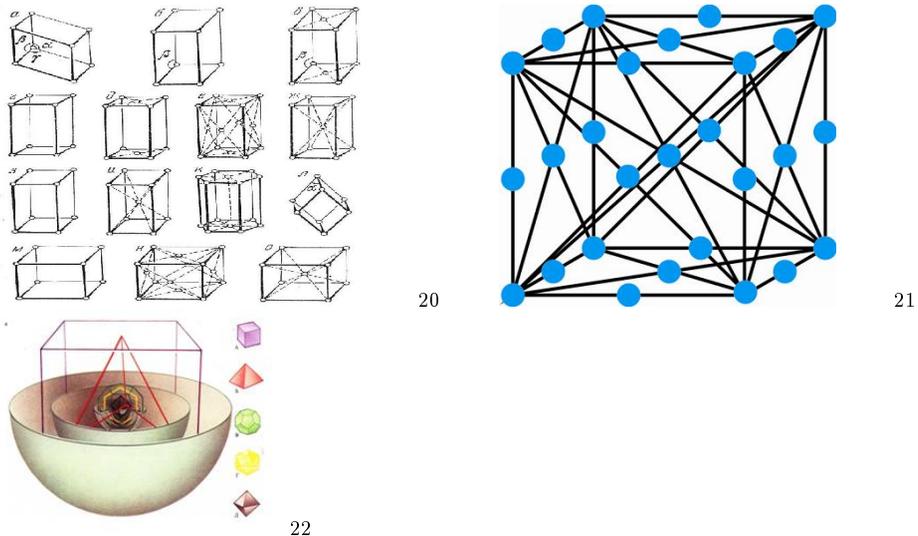


Рис. 20 20 - Формы элементарных ячеек кристаллов химических элементов 14 решёток Браве ; 21 - проекция семимерного пространства, каркасная форма представления.; 22 - Планетарная модель Кеплера, основанная на правильных полиэдрах.

На рисунке 20 представлены формы элементарных ячеек кристаллов химических элементов, 14 решеток Браве. Практически все решетки, имеют кубическую форму или её производную. Исключение составляет гексагональная решетка (Рис. 20 к.), с шестиугольником в основании, однако её

можно разбить на 3 самостоятельные решетки с ромбом в основании. Таким образом, все решетки элементарных ячеек кристаллов химических элементов можно привести к форме подобной или производной от куба. Если совместить узлы всех ячеек кристаллов простых веществ, то полученная обобщенная ячейка имеющая структуру, совпадающую с трехмерной проекцией семимерного пространства (Рис. 21). Данная форма также содержит себе другие проекции: проекцию четырехмерного пространства, проекцию шестимерного пространства "Усеченный октаэдр проекцию пятимерного пространства на основе куба. Такое соответствие позволяют выдвинуть гипотезу, что вещество на атомном уровне можно рассматривать как результат взаимодействия многомерных пространств.

Присутствие коэффициента 2^n в формуле больших полуосей орбит планет солнечной системы Тициуса-Боде, может иметь случайное происхождение. Однако если допустить обратное, то можно предположить, что размеры орбит планет представляют собой линейную аппроксимацию, проецирования многомерных пространств в трехмерное. Используя геометрическую аналогию можно выдвинуть следующую гипотезу: пересечением двух плоскостей является - прямая, двух трехмерных пространств - плоскость, двух четырехмерных пространств - трехмерное пространство, тогда можно предположить, что наше трехмерное пространство является результатом пересечения и взаимодействия двух "родительских" четырехмерных пространств, те, в свою очередь, пятимерных и т. д. Данная гипотеза имеет общие черты с планетарной моделью Иоганна Кеплера (Рис. 22) и требует дальнейшей проверки и разработки.

Приведенные примеры, из квантовой механики, теории кварков, теории электричества, правило Тициуса-Боде, формулы второй и третьей космических скоростей, затрагивают фундаментальные области науки, напрямую или косвенно связанные со свойствами пространства, как в микро, так и макро масштабах. Применение знаний о геометрии многомерных пространств поможет выйти за рамки трёхмерных представлений о мире и прийти к новым, более точным и интересным результатам.

Список литературы

1. Физика. Большой энциклопедический словарь. Гл. редактор А. М. Прохоров. - 4-е изд. -// М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. - 944 с.: ил., 2 л. цв. ил.
2. Советский энциклопедический словарь. Гл. редактор А. М. Прохоров. - С 56 4-е изд. - М.: Советская энциклопедия, 1986. - 1600 с., ил.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. // НИЦ Регулярная хаотическая динамика. Ижевск, 2001. 34 стр.
4. Большой энциклопедический политехнический словарь. 2004, 377

5. Leonard Susskind. "Superstrings (Features: November 2003)". Physics World 16 (11).
6. Грин, Брайан. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории: Пер. с англ / Под ред. В. О. Малышенко. - Изд. 3-е. - М.: Едиториал УРСС, 2007. - 288 с.
7. Математика. Большой энциклопедический словарь. Гл. редактор И. Л. Кнунянц, - М. Большая Российская энциклопедия, 2000. - 792 с.
8. Павлов Д. Г., Складов А. Ю. фильм "Геометрия вселенной с разных точек зрения". Фонд развития финслеровой геометрии. 2008 URL: <http://hypercomplex.xpsweb.com/page.php?lang=ruid=482> (дата обращения: 10.12.2010)
9. Богословский Г. Ю. О процедуре определения наблюдаемых 3-скоростей в полностью анизотропном финслеровом пространстве событий. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (9), том 5, 2008.
10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: Пер. с нем. - 3-е изд. - М.: Наука, 1981. - 344 с.
11. Ghys Etienne. Scenario et mathematiques. Film "La dimension quatre". Creative commons. Belgium. 2008.URL: http://www.dimensions-math.org/Dim_CH3_RU.htm (дата обращения: 14.05.2011).

Magula A. S., M'achikov A. V.

Khar'kov State University of Food and Trade

E-mail: magula111@mail.ru

Geometry of multidimensional spaces. Rule of construction of three-dimensional projections of multidimensional spaces on them