ISSN 2072-9812

# PROCEEDINGS
of the
# INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 3, No. 4, 2010

# Праці міжнародного геометричного центру

Том.3, No. 4, 2010

# Труды международного геометрического центра

Том.3, No. 4, 2010

# Proceedings of the International Geometry Center

Vol. 3, No. 4, 2010

**Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі математичних наук**
**(перелік № 1-05/3, Бюлетень ВАК України №4, 2010, 14.04.2010, ISSN 2072-9812 )**

**Odessa-2010**

## Зміст

# A COARSE CHARACTERIZATION OF THE BAIRE MACRO-SPACE

T. BANAKH, I. ZARICHNYI

Abstract. We prove that each coarsely homogenous separable metric space $X$ is coarsely equivalent to one of the spaces: the sigleton 1, the Cantor macro-cube $2^{<\mathbb{N}}$ or the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$. This classification is derived from coarse characterizations of the Cantor macro-cube $2^{<\mathbb{N}}$ given in [1] and of the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ given in this paper. Namely, we prove that a separable metric space $X$ is coarsely equivalent to $\omega^{<\mathbb{N}}$ if any only if $X$ has asymptotic dimension zero and has unbounded geometry in the sense that for every $\delta < \infty$ there is $\varepsilon < \infty$ such that no $\varepsilon$-ball in $X$ can be covered by finitely many sets of diameter $\leq \delta$.

This paper is devoted to the characterization of the Baire macro space in the coarse category. The Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ is an asymptotic counterpart of the classical Baire space $\omega^\omega = \prod^\omega \omega$ which is the Tychonoff product of countably many copies of $\omega$. The Baire macro-space is defined as the countable coproduct of countably many copies of $\omega$. For a non zero cardinal $\kappa$ the coproduct

$$\kappa^{<\mathbb{N}} = \coprod_{i\in\mathbb{N}} \kappa = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \kappa^{\mathbb{N}} \colon \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i > n\ x_i = 0\}$$

is the metric space endowed with the ultrametric

$$d((x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \max(\{0\} \cup \{i \in \mathbb{N} \colon x_i \neq y_i\}).$$

For $\kappa = 2$ and $\kappa = \omega$ the coproducts $\kappa^{<\mathbb{N}}$ have special names:

- $2^{<\mathbb{N}}$ is called the *Cantor macro-cube*;
- $\omega^{<\mathbb{N}}$ is called the *Baire macro-space*.

In Theorem 1 we shall prove that up to the coarse equivalence these two spaces exhaust all possible types of coarsely homogeneous unbounded separable metric spaces of asymptotic dimension zero.

The coarse equivalence of metric spaces can be defined with help of multi-maps. By a *multi-map* $\Phi : X \Rightarrow Y$ between two sets $X, Y$ we understand any subset $\Phi \subset X \times Y$. For a subset $A \subset X$ by $\Phi(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ with } (a, y) \in \Phi\}$ we denote the image of $A$ under the multi-map $\Phi$. Given a point $x \in X$ we write $\Phi(x)$ instead of $\Phi(\{x\})$.

The inverse $\Phi^{-1} : Y \Rightarrow X$ of the multi-map $\Phi$ is the multi-map

$$\Phi^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in \Phi\} \subset Y \times X$$

assigning to each point $y \in Y$ the set $\Phi^{-1}(y_= \{x \in X : y \in \Phi(x)\}$. For two multi-maps $\Phi : X \Rightarrow Y$ and $\Psi : Y \Rightarrow Z$ we define their composition $\Psi \circ \Phi : X \Rightarrow Z$ as usual:

$$\Psi \circ \Phi = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y \text{ such that } (x, y) \in \Phi \text{ and } (y, z) \in \Psi\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54E35, 54E40.

A multi-map $\Phi$ is called *surjective* if $\Phi(X) = Y$ and *bijective* if $\Phi \subset X \times Y$ coincides with the graph of a bijective (single-valued) function.

The *oscillation* of a multi-map $\Phi : X \Rightarrow Y$ between metric spaces is the function $\omega_\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty]$ assigning to each $\delta \geq 0$ the (finite or infinite) number

$$\omega_\Phi(\delta) = \sup\{\mathrm{diam}\,(\Phi(A)) : A \subset X,\ \mathrm{diam}\,(A) \leq \delta\}.$$

Observe that $\omega_\Phi(0) = 0$ if and only if $\Phi$ is at most single-valued in the sense that $|\Phi(x)| \leq 1$ for any $x \in X$.

A multi-map $\Phi : X \Rightarrow Y$ between metric spaces $X$ and $Y$ is called *macro-uniform* if for every $\delta < \infty$ the oscillation $\omega_\Phi(\delta)$ is finite.

A multi-map $\Phi : X \Rightarrow Y$ is called a *macro-uniform embedding* if $\Phi^{-1}(Y) = X$ and both multi-maps $\Phi$ and $\Phi^{-1}$ are macro-uniform. If, in addition, $\Phi(X) = Y$, then $\Phi$ is called a *macro-uniform equivalence.* Two metric spaces $X, Y$ are called *macro-uniformly equivalent* if there is a macro-uniform equivalence $\Phi : X \Rightarrow Y$.

Let $\varepsilon \in [0, \infty)$. By the *$\varepsilon$-connected component* of a point $x$ of a metric space $X$ we understand the subset $C_\varepsilon(x)$ consisting of all points $y \in X$ that can be linked with $x$ by a sequence of points $x = x_0, \dots, x_n = y$ such that $d(x_{i-1}, x_i) \leq \varepsilon$ for all $i \leq n$. Such a sequence $x_1, \dots, x_n$ is called an *$\varepsilon$-chain.* It is easy to see that two $\varepsilon$-connected componenets $C_\varepsilon(x)$, $C_\varepsilon(y)$ either coincide or are *$\varepsilon$-disjoint* in the sense that $d(x', y') > \varepsilon$ for any points $x' \in C_\varepsilon(x)$, $y' \in C_\varepsilon(y)$. Thus, $\mathcal{C}_\varepsilon(X) = \{C_\varepsilon(x) : x \in X\}$ is a disjoint cover of the metric space $X$.

In an ultrametric space the $\varepsilon$-connected components $C_\omega(x)$ coincide with closed $\varepsilon$-balls $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$. We recall that a metric space $X$ is *ultrametric* if its metric $d_X$ satisfies the strong triangle inequality:

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \text{ for all } x, y, z \in X.$$

A metric space $X$ has *asymptotic dimension zero* if for all $\varepsilon > 0$ the cover $\mathcal{C}_\varepsilon(X)$ has $\mathrm{mesh}\,\mathcal{C}_\varepsilon(X) < \infty$. It is known that each metric space $X$ of asymptotic dimension zero is macro-uniformly equivalent to an ultrametric space [3].

Next, we need to introduce two cardinal characteristics $\mathrm{cov}^\omega_\delta(X)$ and $\mathrm{Cov}^\omega_\delta(X)$ of a metric space $X$ related to capacities of its balls. For a subset $A \subset X$ let $\mathrm{cov}_\delta(A)$ be the smallest cardinality $|\mathcal{U}|$ of cover $\mathcal{U}$ of $A$ with $\mathrm{mesh}\,(\mathcal{U}) \leq \delta$, where $\mathrm{mesh}\,(\mathcal{U}) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathrm{diam}\, U$.

For positive real numbers $\delta, \varepsilon$ consider the following two cardinals:

$$\mathrm{cov}^\varepsilon_\delta(X) = \min_{x \in X} \mathrm{cov}_\delta(B_\varepsilon(x)),$$
$$\mathrm{Cov}^\varepsilon_\delta(X) = \sup_{x \in X} \mathrm{cov}_\delta(B_\varepsilon(x)),$$

where $B_\varepsilon(x)$ stands for the closed $\varepsilon$-ball centered at $x$.

**Definition 1.** We say that a metric space $X$

- has *bounded geometry,* if there exists $\delta > 0$ such that for every $\varepsilon \in [\delta, \infty)$ $\mathrm{Cov}^\varepsilon_\delta(X) < \infty$.
- has *unbounded geometry,* if for every $\delta < \infty$ there exists $\varepsilon < \infty$ such that $\mathrm{cov}^\varepsilon_\delta(X) \geq \omega$;
- has *asymptotically isolated balls* if there is $\delta < \infty$ such that for every $\varepsilon < \infty$ $\mathrm{cov}^\varepsilon_\delta(X) = 1$.

Finally we recall the definition of a coarsely homogeneous metric space, introduced and studied in [2].

A metric space $X$ is called

- *isometrically homogeneous* if for any points $x, y \in X$ there is a bijective isometry $f : X \to X$ such that $f(x) = y$;
- *coarsely homogeneous* if there is a function $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ such that for any points $x, y \in X$ there is a macro-uniform equivalence $\Phi : X \Rightarrow X$ such that $y \in \Phi(x)$ and $\omega_\Phi \le \varphi$ and $\omega_{\Phi^{-1}} \le \varphi$.

It is clear that each isometrically homogeneous metric space is coarsely homogeneous. In particular, for each cardinal $\kappa$ the space $\kappa^{<\mathbb{N}}$ is isometrically and coarsely homogeneous. By [2], the coarse homogeneity is preserved by macro-uniform equivalences. So, each metric space that is coarsely equivalent to $2^{<\mathbb{N}}$ or $\omega^{<\mathbb{N}}$ is coarsely homogeneous.

**Theorem 1** (Macro-classification)**.** *Every nonempty coarsely homogeneous separable metric space $X$ of asymptotic dimension zero is macro-uniformly equivalent to one of the next three spaces:*

- 1 *if and only if $X$ is bounded;*
- $2^{<\mathbb{N}}$ *if and only if $X$ is unbounded and has bounded geometry;*
- $\omega^{<\mathbb{N}}$ *if and only if $X$ has unbounded geometry.*

This theorem follows from the coarse characterizations of the Cantor macro-cube and Baire macro-space presented in Theorems 2 and 3. The following coarse characterization [1] of the Cantor macro-cube $2^{<\mathbb{N}}$ is an asymptotic analog of the classical Brouwer's characterization [4, 7.4] of the Cantor cube $2^\omega$.

**Theorem 2** (Coarse characterization of $2^{<\mathbb{N}}$)**.** *A metric space $X$ is macro uniformly equivalent to the Cantor macro-space $2^{<\mathbb{N}}$ if and only if*

(1) *$X$ has asymptotic dimension zero;*
(2) *$X$ has bounded geometry;*
(3) *$X$ has no asymptotically isolated balls.*

Next we present the coarse classification of the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$. The topological characterization of its topological counterpart $\omega^\omega$ is a classical result of Aleksandrov and Urysohn (see [4, 7.7]): *A topological space $X$ is homeomorphic to the Baire space $\omega^\omega$ if and only if $X$ is Polish, zero-dimensional and nowhere locally compact.*

**Theorem 3** (Coarse characterization of $\omega^{<\mathbb{N}}$)**.** *A separable metric space $X$ is macro-uniformly equivalent to the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ if and only if $X$ has asymptotic dimension zero and has unbounded geometry.*

We shall prove this theorem in Section 3 using the technique of towers, developed in [1]. Now we will look at embeddings of the Baire macro space. First let us recall two classical topological results [4]:

- *Each Polish nowhere locally compact space includes a closed topological copy of the Bare space $\omega^\omega$.*
- *Every Polish space is a continuous image of Baire space $\omega^\omega$.*

There are analogous statements in the coarse category.

**Theorem 4.** *Every metric space of unbounded geometry contains a subspace which is macro-uniformly equivalent to the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$.*

*Proof.* Given a metric space $X$ of unbounded geometry, we have to construct a macro-uniform embedding $f : \omega^{<\mathbb{N}} \to X$. Let $\varepsilon_1 = 1$. Taking into account that $X$ has unbounded geometry, by induction construct an increasing unbounded sequence $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ such that $\mathrm{cov}_{6\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}(X) \geq \omega$ for all $i \in \mathbb{N}$. For every point $x \in X$ the inequality $\mathrm{cov}_{6\varepsilon_i}(B(x, \varepsilon_{i+1})) \geq \mathrm{cov}_{6\varepsilon_i}^{\varepsilon_{i+1}}(X) \geq \omega$ implies the existence of a countable subset $S_i \subset B(x, \varepsilon_{i+1})$ that contains the point $x$ and is $3\varepsilon_i$-separated in the sense that $d(y, z) \geq 3\varepsilon_i$ for any distinct points $y, z \in S_i$. Let $f_{i,x} : \omega \to S_i$ be any bijective function such that $f_{i,x}(0) = x$. For every $n \in \mathbb{N}$ let $g_{x,n} : \omega^n \to X$ be the function defined by the recursive formula: $g_{x,1}(i) = f_{1,x}(i)$ and $g_{x,n}(\sigma, i) = g_{f_{n,x}(i),n-1}(\sigma)$ for $\sigma \in \omega^{n-1}$. It follows that $f_{x,n}(\sigma, 0) = g_{f_{n,x}(0),n-1}(\sigma) = g_{x,n-1}(\sigma)$ for all $\sigma \in \omega^{n-1}$. This allows us to define a function $g_x : \omega^{<\mathbb{N}} \to X$ letting $g_x|\omega^n = g_{x,n}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Here we identify $\omega^n$ with the subspace $\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \omega^{<\mathbb{N}} : \forall i > n \; x_i = 0\}$ of $\omega^{<\mathbb{N}}$. One can easily check that the so-defined function $g_x : \omega^{<\mathbb{N}} \to X$ determines a macro-uniform embedding of the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ into $X$. □

A metric space $X$ is called *macro-connected* if $C_\varepsilon(x) = X$ for some $x \in X$ and some $\varepsilon < \infty$. It follows that each unbounded metric space of asymptotic dimension zero is not macro-connected. In particular, the spaces $2^{<\mathbb{N}}$ and $\omega^{<\mathbb{N}}$ are not macro-connected.

**Theorem 5.** *If a metric space $X$ is not macro-connected, then for each separable metric space $Y$ there is a surjective macro-uniform map $\Phi : X \Rightarrow Y$.*

*Proof.* First consider the subspace $Z = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ of the space $\mathbb{N}$ endowed with the Euclidean metric. Fix any countable dense subset $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ in $Y$ and observe that the multi-map $\Phi : Z \Rightarrow Y$, $\Phi : z \mapsto B(y_n, 1)$, is macro-uniform and surjective. It remains to construct a surjective macro-uniform map $\psi : X \to Z$.

Fix any points $x_0, x_1 \in X$ and let $\varepsilon_0 = d(x_1, x_0)$. Since $X$ is not macro-connected, there is a sequence of points $(x_i)_{i\in\omega}$ of $X$ such that $x_{i+1} \notin C_{\varepsilon_i}(x_0)$ where $\varepsilon_i = \max\{i, d(x_i, x_0)\}$.

Define a function $\psi : X \to Z$ assigning to each point $x \in X$ the smallest number $n^2 \in Z$ such that $x \in C_{\varepsilon_n}(x_0)$. It is easy to check that the function $\psi$ is surjective and macro-uniform. Then the composition $\Phi \circ \psi : X \Rightarrow Y$ is a required macro-uniform surjective multi-map of $X$ onto $Y$. □

## 1. Towers

The characterization Theorem 3 of the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ will be proved by induction on partially ordered sets called towers. The technique of towers was created in [1] for characterization of the Cantor macro-cube $2^{<\mathbb{N}}$. In this section we recall the necessary information on towers.

1.1. **Partially ordered sets.** A *partially ordered set* is a set $T$ endowed with a reflexive antisymmetric transitive relation $\leq$.

A partially ordered set $T$ is called $\uparrow$-*directed* if for any two points $x, y \in T$ there is a point $z \in T$ such that $z \geq x$ and $z \geq y$.

A subset $C$ of a partially ordered set $T$ is called $\uparrow$-*cofinal* if for every $x \in T$ there is $y \in C$ such that $y \geq x$.

By the *lower cone* (resp. *upper cone*) of a point $x \in T$ we understand the set ${\downarrow}x = \{y \in T : y \leq x\}$ (resp. ${\uparrow}x = \{y \in T : y \geq x\}$). A subset $A \subset T$ will be called a *lower* (resp. *upper*) *set* if ${\downarrow}a \subset A$ (resp. ${\uparrow}a \subset A$) for all $a \in A$. For two points $x \le y$ of $T$ the intersection $[x, y] = {\uparrow}x \cap {\downarrow}y$ is called the *order interval* with end-points $x, y$.

A partially ordered set $T$ is a *tree* if for each point $x \in T$ the lower cone ${\downarrow}x$ is well-ordered (in the sense that each subset $A \subset {\downarrow}x$ has the smallest element.

1.2. **Introducing towers.** A partially ordered set $T$ is called a *tower* if $T$ is $\uparrow$-directed and for every points $x \le y$ in $T$ the order interval $[x, y] \subset T$ is finite and linearly ordered.

This definition implies that for every point $x$ in a tower $T$ the upper set ${\uparrow}x$ is linearly ordered and is order isomorphic to a subset of $\omega$. Since $T$ is $\uparrow$-directed, for any points $x, y \in T$ the upper sets ${\uparrow}x$ and ${\uparrow}y$ have non-empty intersection and this intersection has the smallest element $x \wedge y = \min({\uparrow}x \cap {\uparrow}y)$ (because each order interval in $X$ is finite). Thus any two points $x, y$ in a tower have the smallest upper bound $x \wedge y$.

It follows that for each point $x \in T$ of a tower $T$ the lower cone ${\downarrow}x$ endowed with the reverse partial order is a tree of at most countable height.

1.3. **Levels of a tower.** Given two points $x, y \in T$ we write $\mathrm{lev}_T(x) \le \mathrm{lev}_T(y)$ if

$$|[x, x \wedge y]| \le |[y, x \wedge y]|.$$

Also we write $\mathrm{lev}_T(x) = \mathrm{lev}_T(y)$ if $|[x, x \wedge y]| = |[y, x \wedge y]|$.

The relation

$$\{(x, y) \in T \times T : \mathrm{lev}_T(x) = \mathrm{lev}_T(y)\}$$

is an equivalence relation on $T$ dividing the tower $T$ into equivalence classes called the *levels* of $T$. The level containing a point $x \in T$ is denoted by $\mathrm{lev}_T(x)$. Let

$$\mathrm{Lev}(T) = \{\mathrm{lev}_T(x) : x \in T\}$$

denote the set of levels of $T$ and

$$\mathrm{lev}_T : T \to \mathrm{Lev}(T),\ \mathrm{lev}_T : x \mapsto \mathrm{lev}_T(x),$$

stand for the quotient map called the *level map*.

The set $\mathrm{Lev}(T)$ of levels of $T$ endowed with the order $\mathrm{lev}_T(x) \le \mathrm{lev}_T(y)$ is a linearly ordered set, order isomorphic to a subset of integers. For a level $\lambda \in \mathrm{Lev}(T)$ by $\lambda + 1$ (resp. $\lambda - 1$) we denote the successor (resp. the predecessor) of $\lambda$ in the level set $\mathrm{Lev}(T)$. If $\lambda$ is a maximal (resp. minimal) level of $T$, then we put $\lambda + 1 = \emptyset$ (resp. $\lambda - 1 = \emptyset$).

A tower $T$ will be called $\downarrow$*-bounded* (resp. $\uparrow$*-bounded*) if the level set $\mathrm{Lev}(T)$ has the smallest (resp. largest) element. Otherwise $T$ is called $\downarrow$*-unbounded* (resp. $\uparrow$*-unbounded*). In this paper we can consider that all towers are $\uparrow$-unbounded and $\downarrow$-bounded.

The level set $\mathrm{Lev}(T)$ of a $\downarrow$-bounded tower can be identified with $\omega$, so that zero corresponds to the smallest level of $T$.

1.4. **The boundary of a tower.** By a *branch* of a tower $T$ we understand a maximal linearly ordered subset of $T$. The family of all branches of $T$ is denoted by $\partial T$ and is called the *boundary* of $T$. The boundary $\partial T$ carries an ultrametric that can be defined as follows.

Given two branches $x, y \in \partial T$ let

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y, \\ \mathrm{lev}_T(\min x \cap y), & \text{if } x \ne y. \end{cases}$$

It is a standard exercise to check that $\rho$ is a well-defined ultrametric on the boundary $\partial T$ of $T$ turning $\partial T$ into an ultrametric space.

In the sequel we shall assume that the boundary $\partial T$ of any tower $T$ is endowed with the ultrametric $\rho$.

1.5. **Degrees of points of a tower.** For a point $x \in T$ and a level $\lambda \in \mathrm{Lev}(T)$ let $\mathrm{pred}_\lambda(x) = \lambda \cap {\downarrow} x$ be the set of predecessors of $x$ on the $\lambda$-th level and $\deg_\lambda(x) = |\mathrm{pred}_\lambda(x)|$. For $\lambda = \mathrm{lev}_T(x) - 1$, the set $\mathrm{pred}_\lambda(x)$, called the set of parents of $x$, is denoted by $\mathrm{pred}(x)$. The cardinality $|\mathrm{pred}(x)|$ is called the *degree* of $x$ and is denoted by $\deg(x)$. Thus $\deg(x) = \deg_{\mathrm{lev}_T(x)-1}(x)$. It follows that $\deg(x) = 0$ if and only if $x$ is a minimal element of $T$.

For levels $\lambda, l \in \mathrm{Lev}(T)$ let

$$\deg^l_\lambda(T) = \min\{\deg_\lambda(x) : \mathrm{lev}_T(x) = l\} \text{ and } \mathrm{Deg}^l_\lambda(T) = \sup\{\deg_\lambda(x) : \mathrm{lev}_T(x) = l\}.$$

We shall write $\deg_\lambda(T)$ and $\mathrm{Deg}_\lambda(T)$ instead of $\deg^{\lambda+1}_\lambda(T)$ and $\mathrm{Deg}^{\lambda+1}_\lambda(T)$, respectively.

Now let us introduce several notions related to degrees. We define a tower $T$ to be

- *homogeneous* if $\deg_\lambda(T) = \mathrm{Deg}_\lambda(T)$ for any level $\lambda$ of $T$;
- *pruned* if $\deg_\lambda(T) > 0$ for every non-minimal level $\lambda$ of $T$.

It is easy to check that a tower $T$ is pruned if and only if each branch of $T$ meets each level of $T$.

There is a direct dependence between the degrees of points of the tower $T$ and the capacities of the balls in the ultrametric space $\partial T$. For an arbitrary branch $x \in \partial T$ we can see that $\mathrm{cov}_k(B_n(x)) = \deg_k(x \cap \mathrm{Lev}_n(T))$. This implies that $\deg^l_\lambda(T) = \mathrm{cov}^l_\lambda(\partial T)$ and $\mathrm{Deg}^l_\lambda(T) = \mathrm{Cov}^l_\lambda(\partial T)$.

1.6. **Assigning a tower to a metric space.** In the preceding section to each tower $T$ we have assigned the ultrametric space $\partial T$. In this section we describe the converse operation assigning to each metric space $X$ a pruned tower $T^L_X$ whose boundary $\partial T^L_X$ is canonically related to the space $X$.

A closed discrete unbounded subset $L \subset [0, \infty)$ will be called a *level set*. Given a metric space $X$ and a level set $L \subset [0, \infty)$ consider the set

$$T^L_X = \{(C_\lambda(x), \lambda) : x \in X,\ \lambda \in L\}$$

endowed with the partial order $(C_\lambda(x), \lambda) \le (C_l(y), l)$ if $\lambda \le l$ and $C_\lambda(x) \subset C_l(y)$. Here, as expected, $C_\lambda(x)$ stands for the $\lambda$-connected component of $x$ in $X$.

The tower $T^L_X$ will be called the *canonical $L$-tower* of a metric space $X$. Observe that for each point $x \in X$ the set $C_L(x) = \{(C_\lambda(x), \lambda) : \lambda \in L\}$ is a branch of the tower $T^L_X$, so the map

$$C_L : X \to \partial T^L_X, \;\; C_L : x \mapsto C_L(x),$$

called the *canonical map*, is well-defined.

The following important fact was proved in [1, 4.6].

**Corollary 1.** *Let $L \subset [0, \infty)$ be a level set. The canonical map $C_L : X \to \partial T^L_X$ of a metric space $X$ into the boundary of its canonical $L$-tower is a macro-uniform equivalence if and only if $X$ has macro-uniform dimension zero.*

1.7. **Tower morphisms.** A map $\varphi : S \to T$ is defined to be

- *monotone* if for any $x, y \in S$ the inequality $x < y$ implies $\varphi(x) < \varphi(y)$;
- *level-preserving* if there is an injective map $\varphi_{\mathrm{Lev}} : \mathrm{Lev}(S) \to \mathrm{Lev}(T)$ making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & T \\ {\scriptstyle \mathrm{lev}_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{lev}_T} \\ \mathrm{Lev}(S) & \xrightarrow[\varphi_{\mathrm{Lev}}]{} & \mathrm{Lev}(T). \end{array}$$

For a monotone level-preserving map $\varphi : S \to T$ the induced map $\varphi_{\mathrm{Lev}} : \mathrm{Lev}(S) \to \mathrm{Lev}(T)$ is monotone and injective.

A monotone level-preserving map $\varphi : S \to T$ is called

- *a tower isomorphism* if it is bijective;
- *a tower embedding* if it is injective.

1.8. **Induced multi-maps between boundaries of towers.** Each monotone map $\varphi : S \to T$ between towers induces a multi-map $\partial\varphi : \partial S \Rightarrow \partial T$ assigning to a branch $\beta \subset S$ the set $\partial\varphi(\beta) \subset \partial T$ of all branches of $T$ that contain the linearly ordered subset $\varphi(\beta)$ of $T$. It follows that $\partial\varphi(\beta) \neq \emptyset$ and hence $(\partial\varphi)^{-1}(\partial T) = \partial S$.

1.9. **Level subtowers.** It is clear that each $\uparrow$-directed subset $S$ of a tower $T$ is a tower with respect to the partial order inherited from $T$. In this case we say that $S$ is a *subtower* of $T$. A typical example of a subtower of $T$ is a *level subtower*

$$T^L = \{x \in T : \mathrm{lev}_T(x) \in L\},$$

where $L \subset \mathrm{Lev}(T)$ is an $\uparrow$-cofinal subset of the level set of the tower $T$.

The following proposition was proved in [1, 5.8].

**Proposition 2.** *Let $S, T$ be pruned towers and $f : \mathrm{Lev}(S) \to \mathrm{Lev}(T)$ be a monotone (and surjective) map. If $\mathrm{Deg}_\lambda^{\lambda+1}(S) \le \mathrm{deg}_{f(\lambda)}^{f(\lambda+1)}(T)$ (and $\mathrm{deg}_\lambda^{\lambda+1}(S) \ge \mathrm{Deg}_{f(\lambda)}^{f(\lambda+1)}(T)$) for each non-maximal level $\lambda \in \mathrm{Lev}(S)$, then there is a tower embedding (a tower isomorphism) $\varphi : S \to T$ such that $\varphi_{\mathrm{lev}} = f$.*

## 2. Proof of Theorem 3

To prove the "only if" part, assume that a separable metric space $X$ is macro-uniformly equivalent to the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ and fix a macro-uniform equivalence $\Phi : X \Rightarrow \omega^{<\mathbb{N}}$. The Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ is ultrametric and hence has asymptotic dimension zero, see [3]. Since the asymtotic dimension is preserved by macro-uniform equivalences [5, p.129], the space $X$ also has asymptotic dimension zero. It remains to prove that for every $\delta < \infty$ there is $\varepsilon < \infty$ such that $\mathrm{cov}_\delta^\varepsilon(X) \ge \omega$. Given $\delta < \infty$ consoder the finite number $\delta' = \omega_\Phi(\delta)$. Since the macro-Baire space $\omega^{<\mathbb{N}}$ has unbounded geometry, there is $\varepsilon' < \infty$ such that $\mathrm{cov}_{\delta'}^{\varepsilon'}(\omega^{<\mathbb{N}}) = \omega$. Then for the number $\varepsilon = \omega_{\Phi^{-1}}(\varepsilon')$ we get $\mathrm{cov}_\delta^\varepsilon(X) \ge \mathrm{cov}_{\delta'}^{\varepsilon'}(\omega^{<\mathbb{N}}) = \omega$.

To prove the "if" part, assume that a metric separable space $X$ has asymptotic dimension zero and has unbounded geometry. Put $\delta_1 = 1$. For every natural $i$, we can find $\delta_i > \delta_{i-1} + 1$ such that $\mathrm{cov}_{\delta_{i-1}}^{\delta_i}(X) = \omega$. Let $L = \{\delta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ and consider the canonical $L$-tower $T_X^L = \{(C_\lambda(x), \lambda) : x \in X,\ \lambda \in L\}$ of the metric space $X$. Its level set $\mathrm{Lev}(T^L_X)$ can identified with set $L$. By Corollary 1, the canonical mapping

$$C_L : X \to \partial T^L_X,\ \ C_L : x \mapsto C_L(x) = \{(C_\lambda(x), \lambda) : \lambda \in L\},$$

is a macro-uniform equivalence. Since $\mathrm{cov}^{\delta_i}_{\delta_{i-1}}(X) = \mathrm{Cov}^{\delta_i}_{\delta_{i-1}}(X) = \omega$, the tower $T^L_X$ is homogeneous with $\deg_\lambda(T^L_X) = \mathrm{Deg}_\lambda(T^L_X) = \omega$ for each non-minimal $\lambda \in L$.

Let $T_\omega$ be the canonical tower of the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ with the level set $\mathbb{N}$. It is clear that $T_\omega$ is a homogeneous tower with $\deg_n(T_\omega) = \mathrm{Deg}_n(T_\omega) = \omega$ for each $n \geq 2$. By Proposition 2 there is an isomorphism $\varphi : T^L_X \to T_\omega$ between the towers $T^L_X$ and $T_\omega$. This isomorphism induces a macro-uniform equivalence between the boundaries $\partial T^L_X$ and $\partial T_w = \omega^{<\mathbb{N}}$. Taking into account that $\partial T^L_X$ is macro-uniformly equivalent to $X$, we conclude that $X$ is macro-uniformly equivalent to $\omega^{<\mathbb{N}} = \partial T_\omega$.

## 3. Proof of Theorem 1

Let $X$ be a coarsely homogeneous separable metric space of asymptotic dimension zero. Since the space $X$ is coarsely homogeneous, there is a function $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ such that for any points $x, y \in X$ there is a macro-uniform equivalence $\Phi : X \Rightarrow X$ such that $y \in \Phi(x)$ and $\max\{\omega_\Phi, \omega_{\Phi^{-1}}\} \leq \varphi$.

To prove Theorem 1, it is sufficient to check three possible cases.

1. If $X$ is bounded, then the constant map $\Phi : X \to 1 = \{0\}$ is a macro-uniform equivalence, so $X$ is coarsely equivalent to the singleton 1.

2. Now assume that $X$ is unbounded but has bounded geometry. We shall prove that $X$ has no asymptotically isolated balls. Given any $\delta < \infty$ we should find $\varepsilon < \infty$ such that $B_\varepsilon(x) \neq B_\delta(x)$ for all $x \in X$.

For the number $\delta$ consider the number $\delta' = \varphi(\delta)$. Since the metric space $X$ is unbounded, there are two points $y, z \in X$ on the distance $\varepsilon' = d(y,z) > \delta'$. Next, consider the number $\varepsilon = \varphi(\varepsilon')$. We claim that $B_\varepsilon(x) \neq B_\delta(x)$ for all $x \in X$. For this find a macro-uniform equivalence $\Phi : X \Rightarrow X$ such that $y \in \Phi(x)$ and $\omega_\Phi \leq \varphi$, $\omega_{\Phi^{-1}} \leq \varphi$. It follows that $\Phi(B_\delta(x)) \subset B_{\omega_\Phi(\delta)}(y) \subset B_{\varphi(\delta)}(y) = B_{\delta'}(y) \not\ni z$ and hence $\Phi^{-1}(z) \cap B_\delta(x) = \emptyset$. On the other hand, $\Phi^{-1}(z) \subset \Phi^{-1}(B_{\varepsilon'}(y)) \subset B_{\omega_{\Phi^{-1}}(\varepsilon')}(x) \subset B_{\varphi(\varepsilon')}(x) \subset B_\varepsilon(x)$, which implies that $B_\varepsilon(x) \neq B_\delta(x)$. By Theorem 2, the metric space $X$ is macro-uniformly equivalent to the Cantor macro-cube $2^{<\mathbb{N}}$.

3. Finally, assume that $X$ is not of bounded geometry. Theorem 3 will imply that $X$ is macro-uniformly equivalent to the Baire macro-space $\omega^{<\mathbb{N}}$ as soon as we check that $X$ is of unbounded geometry. Assume conversely that $X$ is not of unbounded geometry. This means that there is $\delta < \infty$ such that for every $\varepsilon < \infty$ there is a point $x \in X$ with $\mathrm{cov}_\delta(B_\varepsilon(x)) < \infty$. To derive a contradiction, we shall prove that the metric space $X$ is of bounded geometry. Let $\delta' = \varphi(\delta)$. Given any $\varepsilon' < \infty$ we shall prove that $\mathrm{Cov}^{\varepsilon'}_{\delta'}(X) < \infty$. Consider the number $\varepsilon = \varphi(\varepsilon')$ and find a point $x \in X$ such that $m = \mathrm{cov}_\delta(B_\varepsilon(x)) < \infty$. We claim that $\mathrm{Cov}^{\varepsilon'}_{\delta'}(X) \leq m$. This inequality will follow as soon as we check that $\mathrm{cov}_{\delta'}(B_{\varepsilon'}(y)) \leq m$ for any point $y \in X$. By the choice of the function $\varphi$, there is a macro-uniform equivalence $\Phi : X \Rightarrow X$ such that $y \in \Phi(x)$ and $\max\{\omega_\Phi, \omega_{\Phi^{-1}}\} \leq \varphi$. The inequality $\mathrm{cov}_\delta(B_\varepsilon(x)) \leq m$ implies the existence of a cover $\mathcal{U}$ of the ball $B_\varepsilon(x)$ having cardinality $|\mathcal{U}| \leq m$ and $\mathrm{mesh}\,(\mathcal{U}) \leq \delta$.

Then the family $\mathcal{V} = \{\Phi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ is the cover of the ball

$$B_{\varepsilon'}(y) \subset \Phi \circ \Phi^{-1}(B'_\varepsilon(y)) \subset \Phi(B_{\omega_{\Phi^{-1}}(\varepsilon')}(x)) \subset \Phi(B_{\varphi(\varepsilon')}(x)) = \Phi(B_\varepsilon(x))$$

and has $\mathrm{mesh}\,(\mathcal{V}) \le \omega_\Phi(\delta') \le \varphi(\delta) = \delta'$. Since $|\mathcal{V}| \le |\mathcal{U}| \le m$, we conclude that $\mathrm{cov}_{\delta'}(B_{\varepsilon'}(y)) \le m$. Thus, the space $X$ has bounded geometry and this is a desired contradiction showing that $X$ has unbounded geometry and hence is macro-uniformly equivalent to the Baire macro-space $w^{<\mathbb{N}}$ according to Theorem 3.

## References

[1] T. Banakh, I. Zarichnyi, *Characterizing the Cantor bi-cube in asymptotic categories*, Groups, Geometry, and Dynamics, 5:3 (2011).

[2] T. Banakh, O. Chervak, N. Lyaskovska, *Asymptotic dimension and small subsets in homogeneous coarse spaces*, preprint.

[3] N. Brodsky, J. Dydak, J. Higes, A. Mitra, *Dimension zero at all scales*, Topology Appl. **154**: 14 (2007) 2729-2740.

[4] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, 1995.

[5] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, Amer. Math. Soc., 2003.

Department of Mathematics, Ivan Franko National University of Lviv

Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of Ukrainian Academy of Sciences

*E-mail address*: tbanakh@yahoo.com, ihor.zarichnyj@gmail.com

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(4) (15–24) $d\omega$

# О голоморфно-проективных отображениях "в целом" некоторых классов обобщенно-рекуррентных келеровых пространств

**Е.Н. Синюкова**

**Abstract** У статті наведені детальні доведення двох теорем про голоморфно-проективну однозначну визначеність у цілому компактних, у певному сенсі узагальнено-рекурентних келерових просторів. Дослідження ґрунтуються на застосуванні теорем Е. Хопфа.

Под $C^r$-многообразием $M^n$ $(n \in N,\ r > 1)$ в работе понимается хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная некоторой области пространства $R^n$, любые две такие окрестности $C^r$-согласованы между собой. На подобном многообразии существует риманова $C^{r-1}$-метрика (задаваемая бесконечным числом способов, не обязательно положительно определенная), превращающая его в риманово $C^r$-пространство $V^n$ [1].

Вещественное $n$-мерное риманово $C^r$-пространство называется келеровым $C^r$-пространством $K^n$ $(n \geq 2,\ r \geq 2)$, если в нем существует тензор комплексной структуры $F^i_j(x^1, x^2, ..., x^n)$, то есть тензор, удовлетворяющий соотношениям:

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = -\delta^h_i, \quad g_{\alpha\beta} F^\alpha_i F^\beta_j = g_{ij}, \quad F^h_{i,j} = 0.$$

Здесь, как обычно, $g_{ij}$ — метрический тензор пространства $K^n$.

Любое келерово пространство имеет четную размерность и является ориентируемым [2, 3].

Пусть $J$ — непустой интервал прямой. Дифференцируемым путем класса $C^k$ в $C^r$-многообразии $M^n$ $(1 \leq k \leq r)$ называют $C^k$-отображение $l : J \to$

$M^n$. $C^k$-пути $l_1 : J_1 \to M^n$ и $l_2 : J_2 \to M^n$ считают $C^k$-эквивалентными, если существует такой $C^k$-диффеоморфизм $\gamma : J_1 \to J_2$, что $l_1 = l_2 \circ \gamma$ на $J_1$. Класс $C^k$-эквивалентных $C^k$-путей называют $C^k$-кривой в $M^n$, каждый путь этого класса — параметризацией данной кривой. $C^k$-кривая $L$ однозначно определяется любым своим путем $l$. В каждой локальной системе координат $C^k$-путь $l$ задается уравнениями:

$$x^h = x^h(t),\ t \in J,\ x^h(t) \in C^k. \tag{1}$$

$C^2$-кривая $\gamma$ келерова $C^r$-пространства $K^n$ $(n \geq 2,\ r > 1)$, в локальной системе координат определяемая уравнениями (1), называется аналитически планарной, если в каждой точке $M(x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t))$ для нее справедливы соотношения

$$\eta^h_{,\,\alpha}\eta^\alpha \equiv \frac{d\eta^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = a(t)\eta^h + b(t)F^h_\alpha\eta^\alpha, \tag{2}$$

где $\eta^h = \frac{dx^h}{dt}$ — касательный вектор к данной кривой в точке $M$, $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции параметра $t$.

С геометрической точки зрения условия (2) говорят о том, что при параллельном перенесении вдоль аналитически планарной кривой касательный вектор $\eta^h$ остается принадлежащим двумерному распределению, натянутому на $\eta^h$ и сопряженный с ним вектор $F^h_\alpha\eta^\alpha$.

Из (2) вытекает, что в любом келеровом пространстве через каждую точку, в каждом направлении можно провести аналитически планарную кривую.

Пусть отображение $f : K^n \to \overline{K}^n$ келерова $C^r$-пространства $K^n$ на келерово $C^r$-пространство $\overline{K}^n$ является $C^r$-диффеоморфизмом $(n \geq 2,\ r > 1)$ и, кроме того, сохраняет комплексную структуру. Если при этом во взаимно однозначном соответствии находятся и аналитически планарные кривые обоих пространств, то отображение $f$ называют сохраняющим комплексную структуру аналитически планарным или голоморфно-проективным отображением (глобально, в целом) келерова пространства $K^n$ на келерово пространство $\overline{K}^n$ [4].

Чаще, однако, рассматривают голоморфно-проективные отображения локального характера. Пусть отображение $f$, определенное в некоторой окрестности $U$ точки $M_0$ келерова $C^r$-пространства $K^n$ $(n \geq 2,\ r > 1)$, $C^r$-диффеоморфно переводит эту окрестность в некоторую окрестность $\overline{U}$ келерова $C^r$-пространства $\overline{K}^n$ и при этом аналитически планарные кривые обеих окрестностей взаимнооднозначно соответствуют друг другу. Тогда

$f$ — голоморфно-проективное отображение в окрестности точки $M_0$. Если такие отображения $f$ можно определить для каждой точки пространства $K^n$, то говорят, что $K^n$ локально допускает голоморфно-проективные отображения.

Как в данном определении, так и при последующем изложении, говоря о голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств, для сокращения записи мы не будем каждый раз подчеркивать, что рассматриваемое отображение сохраняет комплексную структуру. Однако всегда будем иметь это в виду.

Из приведенных определений вытекает, что всякое голоморфно-проективное отображение в целом является и локальным голоморфно-проективным отображением. Более того, $C^r$-диффеоморфизм между келеровыми $C^r$-пространствами $K^n$ и $\overline{K}^n$, являющийся локальным голоморфно-проективным отображением, будет и голоморфно-проективным отображением $K^n$ на $\overline{K}^n$ в целом. Тем ни менее, существуют широкие классы пространств $K^n$, локально допускающих нетривиальные (отличные от аффинных) голоморфно-проективные отображения, но не допускающих таких отображений в целом (см., например, [5]).

Пусть координатная окрестность $U$ $C^r$-пространства $K^n$ $(n > 1, r > 1)$ $C^r$-диффеоморфна некоторой координатной окрестности $\overline{U}$ $C^r$-пространства $\overline{K^n}$. Доказано (см., например, [4]), что этот $C^r$-диффеоморфизм тогда и только тогда будет голоморфно-проективным отображением $U$ на $\overline{U}$, когда в общей по отображению системе координат выполняются условия:

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_{(i}\overline{g}_{j)k} - \psi_\alpha F^\alpha_{(i}\overline{g}_{j)\beta} F^\beta_k. \tag{3}$$

Здесь $\overline{g}_{ij}$ — метрический тензор пространства $\overline{K}^n$, $\psi_i$ — некоторый ковектор, ковариантное дифференцирование производится в пространстве $K^n$, круглые скобки обозначают симметрирование без деления по заключенным в них индексам.

В соответствии с приведенными выше определениями, соотношения (3), очевидно, можно использовать и для изучения голоморфно-проективных отображений келеровых пространств в целом: для того, чтобы $C^r$-диффеоморфизм между $C^r$-пространствами $K^n$ и $\overline{K^n}$ $(n \geq 2,\ r > 1)$ был голоморфно-проективным отображением $K^n$ на $\overline{K^n}$ в целом необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки пространства $K^n$ в общей по отображению системе координат выполнялись условия (3).

Фигурирующий в (3) ковектор $\psi_i$ определяет данное голоморфно-проективное отображение. Он градиентен:

$$\psi_i = \partial_i \psi = \frac{1}{2(n+2)} \partial_i \ln \left| \frac{\overline{g}}{g} \right|, \tag{4}$$

где $g = det||g_{ij}||(\neq 0)$, $\overline{g} = det||\overline{g}_{ij}||(\neq 0)$.

Из (4) вытекает что при глобальном характере отображения ковектор $\psi_i$ и инвариант $\psi$ определены в целом, на всем пространстве $K^n$.

Случай $\psi_i \equiv 0$ приводит к аффинному отображению и потому считается тривиальным. Под нетривиальными голоморфно-проективными отображениями понимают такие, для которых $\psi_i$ не тождественный нуль.

Пространства, не допускающие нетривиальных голоморфно-проективных отображений (в целом или локально), называют голоморфно-проективно однозначно определенными (соотвественно, в целом или локально), можно утверждать, что их объекты аффинной связности вполне определяются ( в целом или локально) совокупностью их аналитически планарных кривых.

Очевидно, что вопрос о том, допускает ли данное $K^n$ локально или глобально нетривиальные геодезические отображения, сводится к вопросу существования в некоторой окрестности каждой точки $K^n$ или на всем $K^n$ симметричного неособенного $C^{r-1}$-тензора $\overline{g}_{ij}$ и не равного тождественно нулю $C^{r-2}$-ковектора $\psi_i$, удовлетворяющих уравнениям (3), (4). Следовательно, в заданном келеровом пространстве $K^n$ уравнения (3), (4) образуют основную систему уравнений теории голоморфно-проективных отображений. Это система нелинейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных первого порядка относительно компонент тензора $\overline{g}_{ij}$, не являющаяся системой типа Коши. В общем случае такие системы не допускают эффективного исследования регулярными методами на предмет существования и единственности их решений.

Следуя Синюкову Н. С.[6], Микеш Й. и Домашев В. В. положили

$$a_{ij} = e^{2\psi} \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad \lambda_i = -e^{2\psi} \psi_\alpha \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i},$$

$$\mu = e^{2\psi} [(n+2)\psi_\alpha \psi_\beta - \psi_{\alpha,\beta}] \overline{g}^{\alpha\beta}, \tag{5}$$

что привело к эквивалентной, но уже допускающей эффективное исследование системе

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i} g_{j)k} + \overline{\lambda}_{(i} F_{j)k}, \tag{6}$$

$$n\lambda_{i,k} = \mu g_{ik} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha\ \beta}_{ik.}, \tag{7}$$

$$\mu_{,k} = 2\lambda_\alpha R^\alpha_{.k}, \tag{8}$$

где

$$\overline{\lambda}_i = \lambda_\alpha F^\alpha_i. \tag{9}$$

Была доказана следующая основная теорема теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств [?,6].

**Теорема.** *Для того, чтобы келерово $C^r$-пространство $K^n$ $(n \geq 2, r > 3)$ допускало нетривиальные голоморфно-проективные отображения с сохранением комплексной структуры, необходимо и достаточно, чтобы система дифференциальных уравнений* (6)–(8) *имела в этом пространстве решение относительно симметричного неособенного тензора $a_{ij}$ , для которого*

$$F^\alpha_i F^\beta_j a_{\alpha\beta} \equiv a_{ij}, \tag{10}$$

*не равного тождественно нулю ковектора $\lambda_i$ и инварианта $\mu$.*

Система (6) – (8) первого порядка, типа Коши, линейная, с однозначно определенными пространством $K^n$ коэффициентами. Она описывает как локальные, так и глобальные голоморфно-проективные отображения. Ковектор $\lambda_i$, удовлетворяющий (6) – (8), градиентен: $\lambda_i \equiv \partial_i\lambda$;

$$\mu = \lambda^\alpha_{,\alpha} \equiv g^{ij}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^i\partial x^j} - \lambda_\alpha\Gamma^\alpha_{ij}g^{ij} \tag{11}$$

Кроме того, для ковектора $\lambda_i$ из $(6-8)$ справедливы соотношения

$$\lambda_{\alpha,\beta}F^\alpha_i F^\beta_j = \lambda_{i,j}. \tag{12}$$

По известному решению системы (6) – (8) метрический тензор $\overline{g}_{ij}$ пространства $\overline{K^n}$, на которое в силу наличия этого решения, рассматриваемое пространство $K^n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение, находится из соотношений, обратных к (5)). Именно, из (5) вытекает, что

$$\psi_i = -\lambda_\alpha a^{\alpha\beta}g_{\beta i} = \frac{1}{2}\partial_i \ln\left|\frac{\widetilde{g}}{g}\right|, \tag{13}$$

где $a^{\alpha\beta}$ – элементы матрицы, обратной к $||a_{ij}||$, $\widetilde{g} = \det ||a^{ij}_{..}||$. Значит, с точностью до постоянной

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\widetilde{g}}{g}\right|$$

и, в силу (5),

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi}a^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}. \tag{14}$$

Система (6) – (8) не всегда совместна. Для того, чтобы она имела решения, необходимо, чтобы выполнялись условия ее интегрируемости и их последовательные дифференциальные продолжения, представляющие собой, в силу линейного характера данной системы, совокупность линейных однородных алгебраических уравнений относительно $a_{ij}$ ($\equiv$ $a_{ji}$), $\lambda_i$, тождественно не равного нулю, и $\mu$. Приведем лишь используемые в дальнейшем условия интегрируемости первой группы уравнений данной системы. В соответствии с (6) – (8), они имеют вид

$$a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl} = 0, \tag{15}$$

где

$$T^{\alpha\beta}_{ijkl} = n\delta^{\alpha}_{(i}R^{\beta}_{j)kl} + g_{l(i}T^{\alpha\beta}_{j)k} - g_{k(i}T^{\alpha\beta}_{j)l} - F_{l(i}F^{\gamma}_{j)}T^{\alpha\beta}_{\gamma k} + F_{k(i}F^{\gamma}_{j)}T^{\alpha\beta}_{\gamma l}, \tag{16}$$

$$T^{\alpha\beta}_{\gamma l} = \delta^{\alpha}_{i}R^{\beta}_{k} - R^{\alpha}_{ik}{}^{\beta}_{\cdot}. \tag{17}$$

Американский математик Э. Хопф, исследовав линейный дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа

$$L(f) = u^{jk}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{18}$$

где $u^{jk}(x)$ и $v^i(x)$ — непрерывные функции точки $n$-мерного многообразия, доказал следующую теорему, названную впоследствии его именем.

**Теорема (Хопфа)[3].** *Если всюду в компактном $C^2$-многообразии $M^n$ ($n \geq 1$) $C^2$-функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$L(f) \geq 0$$

*или*

$$L(f) \leq 0,$$

*где $L(f)$ — дифференциальный оператор вида (18), $u^{jk}(x)$ — коэффициенты квадратичной формы, положительно определенной в любой точке $M^n$, а $v^i(x)$ — произвольные непрерывные функции, то $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv 0$ всюду в $M^n$.*

На основании этой теоремы, исследуя условия интегрируемости уравнений системы (6) – (8) и их дифференциальные продолжения, можно показать, что имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Компактные, с положительно определенной метрикой келеровы $C^r$-пространства $K^n$ ($n > 2$, $r > 4$), в которых $E_{ij} \neq 0$ и выполнены рекуррентные соотношения*

$$T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,mh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = \frac{1}{n} T^{(\alpha\beta)} \left(\delta^{\gamma}_{\mu} g_{\nu m} + + F^{\gamma}_{\mu} F\right) T^{(\mu\nu)}_{ijkl} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} + \qquad (19)$$
$$+ T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} + T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m} W^{ijklm},$$

*где $W^{ijkl}$ и $W^{ijklm}$ — некоторые контравариантные тензоры, в целом не допускают нетривиальных голоморфно-проективных отображений.*

**Доказательство.** Если удовлетворяющее условиям теоремы 1 келерово пространство $K^n$ в целом допускает нетривиальное голоморфно-проективное отображение, а тензоры $a_{ij}$, $\lambda_i$ (не тождественный ноль), $\mu$ образуют отвечающее этому отображению решение системы (6) – (8), то справедливы и условия интегрируемости первой группы уравнений системы (6) – (8), то есть выполнены соотношения (15).

С учетом уравнений системы (6) – (8), первые и вторые дифференциальные продолжения (15) соответственно имеют вид:

$$\lambda_\gamma \left(\delta^{\gamma}_{\alpha} g_{\beta m} + F^{\gamma}_{\alpha} F_{\beta m}\right) T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} + a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}_{ijkl,m} = 0 \qquad (20)$$

и

$$\frac{1}{n}\mu \left(g_{\alpha h} g_{\beta m} + F_{\alpha h} F_{\beta m}\right) T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} + \lambda_\alpha U^{\alpha}_{ijklmh} + a_{\alpha\beta} V^{\alpha\beta}_{ijklmh} = 0, \qquad (21)$$

где

$$U^{\alpha}_{ijklmh} = \left(\delta^{\gamma}_{\alpha} g_{\beta\sigma} + F^{\gamma}_{\alpha} F_{\beta\sigma}\right) T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,(h} \delta^{\sigma}_{m)};$$
$$V^{\alpha\beta}_{ijklmh} = T^{\alpha\beta}_{ijkl,mh} + \frac{1}{n} T^{\alpha\beta}_{\gamma h} \left(\delta^{\gamma}_{\mu} g_{\nu m} + F^{\gamma}_{\mu} F_{\nu m}\right) T^{(\mu\nu)}_{ijkl}. \qquad (22)$$

Свернув (21) с $g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..}$, найдем

$$(n-2)\mu E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}_{..} + \lambda_\alpha U^{\alpha}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} + a_{\alpha\beta} V^{\alpha\beta}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = 0. \qquad (23)$$

Но, в силу (22), выполняющиеся в рассматриваемом пространстве рекуррентные соотношения (20) представимы в виде

$$V^{\alpha\beta}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} + T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m} W^{ijklm}.$$

Значит, на основании (15) и (20),

$$a_{\alpha\beta} V^{\alpha\beta}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}_{ijkl} W^{ijkl} + a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}_{ijkl,m} W^{ijklm} =$$
$$= -\lambda_\alpha \left(\delta^{\alpha}_{\gamma} g_{\beta m} + F^{\alpha}_{\gamma} F_{\beta m}\right) T^{(\gamma\beta)}_{ijkl} W^{ijkl}. \qquad (24)$$

Теперь (23) можно переписать как

$$(n-2)\mu E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}_{..} + \lambda_\alpha \left[U^{\alpha}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} - \left(\delta^{\alpha}_{\gamma} g_{\beta m} + F^{\alpha}_{\gamma} F_{\beta m}\right) T^{(\gamma\beta)}_{ijkl} W^{ijkl}\right] = 0. \qquad (25)$$

Для нашего пространства $K^n$ размерность $n>2$, метрическая форма положительно определена и $E_{ij}\neq 0$. Поэтому $(n-2)E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta}_{..}>0$ и соотношения (25) эквивалентны соотношениям

$$g^{ij}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^i\partial x^j}+\lambda_\alpha P^\alpha=0, \tag{26}$$

где

$$P^\alpha=\frac{1}{(n-1)E_{m\mu}E^{m\mu}_{..}}\left[U^\alpha_{ijklmh}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}-\left(\delta^\alpha_\gamma g_{\beta m}+F^\alpha_\gamma F\right)T^{(\gamma\beta)}_{ijkl}W^{ijkl}\right]- \\ -\Gamma^\alpha_{ij}g^{ij}.$$

По теореме Хопфа, которая здесь, очевидно, применима, из (26) вытекает, что $\lambda_i\equiv 0$ в $K^n$. Следовательно, рассматриваемое отображение не может быть нетривиальным. Теорема 1 доказана.

Если использовать так называемое свойство чистоты метрики келеровых пространств относительно комплексной структуры, указанные в начале статьи, то рекуррентные соотношения (20) можно задать и в несколько более общем виде:

$$lT^{(\alpha\beta)}_{ijkl,mh}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}+b\widehat{T}^{(\alpha\beta)}_{ijkl,mh}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}= \\ =\frac{b+1}{n}T^{(\alpha\beta)}_{\gamma h}\left(\delta^\gamma_\mu g_{\nu m}+F^\gamma_\mu F_{\nu m}\right)T^{(\mu\nu)}_{ijkl}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}+ \\ +T^{(\alpha\beta)}_{ijkl}W^{ijkl}+\widehat{T}^{(\alpha\beta)}_{ijkl}\widetilde{W}^{ijkl}+ \\ +T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}W^{ijklm}+\widehat{T}^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}\widetilde{W}^{ijklm}, \tag{27}$$

где

$$\widehat{T}^{\alpha\beta}_{ijkl}=F^\alpha_\mu F^\beta_\nu T^{\mu\nu}_{ijkl},$$

$b(\neq\ -1)$ — произвольный инвариант, $W^{ijkl}$, $\widetilde{W}^{ijkl}$, $W^{ijklm}$, $\widetilde{W}^{ijklm}$ — некоторые тензоры.

В самом деле, свертка (27) с $a_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$(b+1)a_{\alpha\beta}T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,mh}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}=-\tfrac{b+1}{n}a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{\gamma h}\left(\delta^\gamma_\mu g_{\nu m}+F^\gamma_\mu F_{\nu m}\right)T^{(\mu\nu)}_{ijkl}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}+$$

$$+a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl}\left(W^{ijkl}+\widetilde{W}^{ijkl}\right)+a_{\alpha\beta}T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}\left(W^{ijklm}+\widetilde{W}^{ijklm}\right)$$

или

$$a_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}_{ijklmh}g^{mj}g^{hl}E^{ik}_{..}=\frac{1}{b+1}a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl}\left(W^{ijkl}+\widetilde{W}^{ijkl}\right)+ \\ \frac{1}{b+1}a_{\alpha\beta}T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}\left(W^{ijklm}+\widetilde{W}^{ijklm}\right). \tag{28}$$

Так как в (24) тензоры $W^{ijkl}$ и $W^{ijklm}$ произвольны, то (28) ему, очевидно, эквивалентно.

При более простых рекуррентных ограничениях на пространство $K^n$ к результату такого же рода можно прийти, рассматривая вместо условий интегрируемости (15) условия

$$a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}_{il}=0, \tag{29}$$

где

$$P^{\alpha\beta}_{il}=\delta^{\beta}_{i}R^{\alpha}_{.l}-\delta^{\beta}_{l}R^{\alpha}_{.i}$$

в силу градиентности ковектора $\lambda_i$ тотчас вытекающие из второй группы уравнений системы (6) – (8).

Действительно, первые и вторые дифференциальные продолжения (29) с учетом уравнений системы (6) – (8) соответственно имеют вид

$$\lambda_\gamma\left(\delta^\gamma_\alpha g_{\beta k}+F^\gamma_\alpha F_{\beta k}\right)P^{(\alpha\beta)}_{il}+a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}_{il,k}=0, \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{n}\mu\left(g_{\alpha h}g_{\beta k}+F_{\alpha h}F_{\beta k}\right)P^{(\alpha\beta)}_{il}+\lambda_\gamma\left(\delta^\gamma_\alpha g_{\beta\sigma}+F^\gamma_\alpha F_{\beta\sigma}\right)P^{(\gamma\beta)}_{il,(h}\delta^{\sigma}_{k)}+\\ +a_{\alpha\beta}\left[\tfrac{1}{n}T^{\alpha\beta}_{\gamma h}\left(\delta^\gamma_\mu g_{\nu k}+F^\gamma_\mu F_{\nu k}\right)P^{(\mu\nu)}_{il}+P^{\alpha\beta}_{il,kh}\right]=0.\end{gathered} \tag{31}$$

Нетрудно подсчитать, что $\left(g_{\alpha h}g_{\beta k}+F_{\alpha h}F_{\beta k}\right)P^{(\alpha\beta)}_{il}g^{hi}=-nE_{kl}$;

$$a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{\gamma h}\left(\delta^\gamma_\mu g_{\nu k}+F^\gamma_\mu F_{\nu k}\right)P^{(\mu\nu)}_{il}g^{hi}E^{lk}_{..}\equiv 0.$$

Значит, свернув (28) с $g^{hi}E^{kl}_{..}$, получим

$$-\mu E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta}_{..}+\lambda_\alpha v^\alpha+a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}_{il,kh}g^{hi}E^{kl}_{..}=0, \tag{32}$$

где

$$v^\alpha=\left(\delta^\alpha_\gamma g_{\beta\sigma}+F^\alpha_\gamma F_{\beta\sigma}\right)P^{(\gamma\beta)}_{il,(h}\delta^\sigma_{k)}g^{hi}E^{kl}_{..}.$$

Если рассматриваемое пространство $K^n$ имеет положительно определенную метрическую форму, отличный от нуля тензор Эйнштейна и удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$P^{(\alpha\beta)}_{il,kh}g^{hi}E^{kl}_{..}=P^{(\alpha\beta)}_{il,k}S^{ilk}+P^{(\alpha\beta)}_{il}S^{il}, \tag{33}$$

где $S^{il}$, $S^{ilk}$ — некоторые тензоры, то в силу (26) и (27)

$$a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}_{il,kh}g^{hi}E^{kl}_{..}=-\lambda_\gamma\left(\delta^\gamma_\alpha g_{\beta k}+F^\gamma_\alpha F_{\beta k}\right)P^{(\alpha\beta)}_{il}S^{ilk}.$$

Поэтому, положив

$$\widetilde{v}^\alpha=-\frac{1}{E_{\mu\nu}E^{\mu\nu}_{..}}\left[v^\alpha-\left(\delta^\alpha_\gamma g_{\beta k}+F^\alpha_\gamma F_{\beta k}\right)P^{(\gamma\beta)}_{il}S^{ilk}\right]-\Gamma^\alpha_{ij}g^{ij},$$

(26) с учетом (11), можно переписать как

$$g^{ij}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^i \partial x^j} + \lambda_\alpha \widetilde{v}^\alpha = 0. \tag{34}$$

По теореме Хопфа в компактном, с положительно определенной метрикой пространстве $K^n$ отсюда вытекает, что $\lambda_i \equiv 0$. Следовательно, имеет место

**Теорема 2.** *Компактные, с положительно определенной метрикой пространства $K^n$ $(n > 2)$, класса $C^r$ $(r > 4)$, в которых $E_{ij} \neq 0$ и выполнены рекуррентные соотношения (33), в целом не допускают нетривиальных голоморфно-проективных отображений.*

Нетрудно убедиться в том, что для теоремы 2, как и для теоремы 1 рекуррентные соотношения можно задать и в несколько более общем виде

$$left(P^{(\alpha\beta)}_{il,kh} + b\widehat{P}^{(\alpha\beta)}_{il,kh} g^{hi} E^{kl}_{..} =$$

$$= T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} + \widehat{T}^{(\alpha\beta)}_{ijkl} \widetilde{W}^{ijkl} + T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m} W^{ijklm} + \widehat{T}^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m} \widetilde{W}^{ijklm}, \tag{35}$$

где $b(\neq -1)$ — произвольный инвариант, $W^{ijkl}$, $\widetilde{W}^{ijkl}$, $W^{ijklm}$, $\widetilde{W}^{ijklm}$ — некоторые тензоры, $\widehat{P}^{\alpha\beta}_{il} = P^{\mu\nu}_{il} F^\alpha_\mu F^\beta_\nu$.

# References


1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, т. I. // М.: Наука, 1981
2. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономии // М., И.Л., 1960
3. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти //М., ИЛ, 1957
4. *Tashiro Y.* On holomorphicallyprojective correspondences in an almost complex space, Math. J. Okayama Univ., 1957, 6, 2, p. 147-152
5. *Синюков Н.С., Синюкова Е. Н.* О голоморфно-проективных отображениях специальных келеровых простраств// Матем. заметки, 1984, 36, № 3, с. 417-423
6. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, 1979
7. *Домашев В.В., Микеш Й.* К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств// Матем. заметки,



**Е.Н. Синюкова**
**ПНПУ имени К. Д. Ушинского, Одесса, Украина**
**Marbel@ukr.net**



***In this paper we give the detailed proofs of two theorems of holomorphikally projective unique definiteness in a whole of compact, in some sense generally-recurrent*** *Kählerian* ***spaces. The investigations are grounded on the theorem of H. Hopf.***

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(4) 25–34 $d\omega$

# Idempotent convexity and $L$-fuzzy preferences

**Iryna Nykyforchyn Oleh Nykyforchyn**

**Abstract** A class of graded preference relations, which are embeddable into idempotent semimodules, is introduced.

**Keywords** fuzzy preference relation, idempotent semimodule,idempotent convexity

**Mathematics Subject Classification (2000)** 06B35, 52A01

## THANKS

This research was supported by the Fund of Fundamental Research of Ukraine, project F25.1/099, and by the Ministry of Science and Education of Ukraine project M/15-2010.

## Introduction

One of common methods to choose an optimal variant of a set of possibilities is to calculate some *utility function* [4] and to take an argument where a greatest value (or at least a value that is sufficiently close to the greatest one) is attained. In most cases this function is real-valued, which offers significant advantages: values are linearly ordered, hence always comparable, the natural metric on $\mathbb{R}$ allows to estimate difference of outcomes etc. Nonetheless, the assumption of linear ordering restricts the amount of information given by the utility function.

Similar problems arise when one tries to express *comparative utility* of available alternatives. A simple answer is to use a *preference relation* [2]: $x \succ y$ if $x$ is weakly (not worse than) or strongly (equal or better than) preferable to $y$. Next stage is to assign to the statement $x \succ y$ some value, which shows "how much" or "how reliable" $x$ is preferred to $y$. Usually this value is a number from the segment $[0, 1]$, thus *fuzzy preference relations* are introduced, cf. [5] for more details. Although fuzzy preference relations proved to be useful, a significant part of arbitrariness exists in the procedures of assignment of "degrees of preference", of processing data, and of interpretation of obtained results. In particular, it is not always clear how to translate verbal estimates like "much better" into numerical form, and what to do if preferences depend on some parameters. E.g. the degree of preference of a straw hat to an umbrella depends on the current weather. It seems to be reasonable to express this degree as a vector with components that correspond to sunny weather, to rain, to snow etc, hence possible values can be partially ordered. This immediately results in a concept of a preference that is a *family* of binary relations, indexed by an element, of a poset, which can capture both aspect of comparison and degree of preference. We develop this approach in Section 2. We consider a class of $L$-fuzzy preference structures for which preferences are determined via embeddings into idempotent semimodules.

Therefore decision making problems in some cases can be reformulated in geometric language and approached by methods of idempotent geometry [3].

## 1 Preliminaries

First we recall basic definitions concerning idempotent semimodules.

Let $(L, \oplus, *)$ be an idempotent semiring with a zero element 0 and a unit element 1.

A (left idempotent) $(L, \oplus, *)$-semimodule [1] is a set $X$ with operations $\bar{\oplus} : X \times X \to X$ and $\bar{\odot} : L \times X \to X$ such that, for all $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in L$ :

1) $x \,\bar{\oplus}\, y = y \,\bar{\oplus}\, x$;

2) $(x \,\bar{\oplus}\, y) \,\bar{\oplus}\, z = x \,\bar{\oplus}(y \,\bar{\oplus}\, z)$;

3) there is an (obviously unique) element $\bar{0} \in X$ such that $x \,\bar{\oplus}\, \bar{0} = x$ for all $x$;

4) $\alpha \,\bar{\odot}(x \,\bar{\oplus}\, y) = (\alpha \,\bar{\odot}\, x) \,\bar{\oplus}(\alpha \,\bar{\odot}\, y)$, $(\alpha \oplus \beta) \,\bar{\odot}\, x = (\alpha \,\bar{\odot}\, x) \,\bar{\oplus}(\beta \,\bar{\odot}\, x)$;

5) $(\alpha * \beta) \,\bar{\odot}\, x = \alpha \,\bar{\odot}(\beta \,\bar{\odot}\, x)$;

6) $1 \,\bar{\odot}\, x = x$;

7) $0 \,\bar{\odot}\, x = \bar{0}$.

Observe that these axioms imply that $(X, \bar{\oplus})$ is an upper semilattice with a bottom element $\bar{0}$, and $\alpha \,\bar{\odot}\, \bar{0} = \bar{0}$ for all $\alpha \in L$. Informally speaking, an idempotent semimodule is a vector space over an idempotent semiring. The operation $\bar{\odot}$ is isotone in the both variables. We adopt a usual convention and often write $\alpha x$ instead of $\alpha \bar{\odot} x$ for $\alpha \in L$ and $x \in X$.

For an $(L, \oplus, *)$-semimodule $(X, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$, an expression of the form $\alpha_1 x_1 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} \alpha_n x_n$ is called an $(L, \oplus, *)$-*convex combination* of elements $x_1, \ldots, x_n \in X$ whenever $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ satisfy the equality $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n = 1$.

In this section we use $L$ as a shorthand for $(L, \oplus, *)$ and say "$L$-semimodule", "$L$-convex combination" etc. If it is necessary to specify operations $\oplus$ and $*$ explicitly, e.g. if there is a risk of confusion, in a respective notation $L$ can be expanded to $(L, \oplus, *)$.

A subset $A$ of an $L$-semimodule $X$ is called *convex* if it contains all $L$-convex combinations of its elements. Consider these combinations as standalone operations on $A$, without appealing to $X$.

It is very convenient that we can calculate usual convex combinations of a finite number of points "step by step", i.e. by using only pairwise combinations. This is not the case for convex combinations with coefficients from an idempotent semiring, which we are going to introduce, thus we should simultaneously define $L$-convex combinations of arbitrary finite numbers of points. First we define sets that contain allowed collections of coefficients.

The $n$-dimensional[1] $L$-simplex is the set

$$\Delta_L^n = \{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L^{n+1} \mid \sup\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = 1\}.$$

We say that an (idempotent) *$L$-convex combination* is given on a set $A$ if for all $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_L^n$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A$ an element

$$ic(x_0, x_1, \ldots, x_n, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A$$

(which we will denote by $(\alpha_0 \bar{\odot} x_0) \bar{\oplus} (\alpha_1 \bar{\odot} x_1) \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} (\alpha_n \bar{\odot} x_n)$ or simply by $\alpha_0 x_0 \bar{\oplus} \alpha_1 x_1 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} \alpha_n x_n$) is uniquely determined, and the following properties are valid :

(1) $ic(x, 1) = x$ for all $x \in A$;

(2) for all $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in A$, $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Delta_L^m$ and a mapping $\sigma : \{0, 1, \ldots m\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ we have

$$\alpha_0 x_{\sigma(0)} \bar{\oplus} \alpha_1 x_{\sigma(1)} \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} \alpha_m x_{\sigma(m)} = \beta_0 x_0 \bar{\oplus} \beta_1 x_1 \bar{\oplus} \ldots \oplus \beta_n x_n,$$

where $\beta_k = \sup\{\alpha_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m, \sigma(i) = k\}$ for $k = 0, 1, \ldots, n$. This equality means that we can exchange summands, drop summands with zero coefficients and join summands with the same second factor; and

[1] We do not mean any topological dimension here.

(3) the “big associative law” :

$$\alpha_0(\beta_0^0 x_0^0 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} \beta_{k_0}^0 x_{k_0}^0) \bar{\oplus} \alpha_1(\beta_0^1 x_0^1 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} \beta_{k_1}^1 x_{k_1}^1) \bar{\oplus} \ldots$$
$$\bar{\oplus} \alpha_n(\beta_0^n x_0^n \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} \beta_{k_n}^n x_{k_n}^n) = (\alpha_0 * \beta_0^0) x_0^0 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus}(\alpha_0 * \beta_{k_0}^0) x_{k_0}^0$$
$$\bar{\oplus}(\alpha_1 * \beta_0^1) x_0^1 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus}(\alpha_1 * \beta_{k_1}^1) x_{k_1}^1 \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus}(\alpha_n * \beta_0^n) x_0^n \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus}(\alpha_n * \beta_{k_n}^n) x_{k_n}^n,$$

where $x_j^i \in A$, $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_L^n$, $(\beta_0^i, \beta_0^i, \ldots, \beta_{k_i}^i) \in \Delta_L^{k_i}$ for $i = 0, 1, \ldots, n$.

In fact, an $L$-idempotent convex combination $ic$ in $A$ is a collection of maps $ic_n : A^{n+1} \times \Delta_L^n \to A$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, but we will use a common denotation $ic$ for all of them. Observe that $A$ is an upper semilattice with the join $x \vee y = 1x \bar{\oplus} 1y$.

It is easy to see that (1)–(3) hold if $A$ is a convex subset of an $L$-semimodule $X$, and all combinations $(\alpha_0 \bar{\odot} x_0) \bar{\oplus}(\alpha_1 \bar{\odot} x_1) \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus}(\alpha_n \bar{\odot} x_n)$ are defined via operations $\bar{\oplus}, \bar{\odot}$ on $X$. Then $A$ is also an upper subsemilattice of $X$.

Further we shall show that each $L$-convex combination on a set $A$ is induced by an embedding of $A$ as a convex subset into an $L$-semimodule $X$.

## 2 Idempotent semimodules and $L$-preferences

The aim of this section is to show that $L$-convex combinations and $L$-semimodules are closely related to “weakened” variants of $L$-fuzzy preference relations.

We call a family $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ of binary relations on a set $X$ an *$L$-preference* if the following holds for all $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in L$:

(1) $x \succ_\alpha y$ and $x \succ_\beta y$ if and only if $x \succ_{\alpha \oplus \beta} y$;
(2) $\succ_1$ is a partial order;
(3) $\succ_0 = X \times X$.

Observe that (1) can be equivalently replaced with

(1’) $\alpha \leqslant \beta$ implies $\succ_\alpha \supset \succ_\beta$;
(1”) if $x \succ_\alpha y$, $x \succ_\beta y$, then there is $\gamma \in L$ such that $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$, $x \succ_\gamma y$;

i.e., for fixed $x, y \in X$, the set $\{\gamma \in L \mid x \succ_\gamma y\}$ is a directed lower set.

An advantage of such a definition of “graded preference” of $x$ over $y$ is that $\alpha$ can capture both an aspect in which we compare the options and the rate of preference. Consider e.g. the set $X = [0, +\infty)^n$ and the lattice $L = [0, 1]^n$. We assume $(x_1, \ldots, x_n) \succ_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} (y_1, \ldots, y_n)$, for $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L$, if $x_i \geqslant \alpha_i y_i$ for all $1 \leqslant i \leqslant n$. Then $(x_1, \ldots, x_n) \succ_{(1, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)} (y_1, \ldots, y_n)$ iff $x_1 \geqslant y_1$, $2x_2 \geqslant y_2$, and other coordinates are ignored.

The following property of preferences is often considered:

(4') if $x \succ_\alpha y$, $y \succ_\beta z$, then $x \succ_{\alpha * \beta} z$ (*$*$-transitivity*).

We shall also study its stronger form:

(4) $x \succ_{\alpha*\beta} z$ if and only if there is there is $t \in X$ such that $x \succ_\alpha t$, $t \succ_\beta z$ (*strict $*$-transitivity*).

A strictly $*$-transitive $L$-preference $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ on $X$ is called *convex* if it satisfies two more conditions:

(5) if $x \succ_\alpha y$, $x \succ_\alpha z$, then there is $t \in X$ such that $x \succ_\alpha t$, $t \succ_1 y$, $t \succ_1 z$;
(6) for all $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ such that $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n = 1$, there is an element $x_0 \in X$ such that, for all $t \in X$, the inequalities $t \succ_{\alpha_1} x_1$, $\ldots$, $t \succ_{\alpha_n} x_n$ hold if and only if $t \succ_1 x_0$.

Note that the above conditions are insufficient for $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ to be the family of $\alpha$-cuts of an $L$-fuzzy relation on $X$ (although it is also possible), but they imply that the binary relation $x \leqslant y \iff y \succ_1 x$ is a partial order as well, and the set

$$\{t \in X \mid t \succ_{\alpha_1} x_1, \ldots, y \succ_{\alpha_n} x_n\}$$

contains a least element whenever $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n = 1$. We denote this element by $(\alpha_1 \bar{\odot} x_1) \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} (\alpha_n \bar{\odot} x_n)$. It is easy to verify that we have obtained an $L$-convex combination on $X$, and $(1 \bar{\odot} x) \bar{\oplus} (1 \bar{\odot} y)$ is the join of $x, y$. Hence $(X, \leqslant)$ is an upper semilattice, in which we use for join the same notation "$\bar{\oplus}$".

Observe that $x \succ_\alpha y$ if and only if $(1 \bar{\odot} x) \bar{\oplus} (\alpha \bar{\odot} y) = x$. On the other hand, given an $L$-convex combination on $X$, we can define relations $\succ_\alpha \subset X \times X$ for all $\alpha \in L$ by the latter formula, and it is an easy exercise to verify that the obtained family of relations satisfies (1)–(6).

Thus we arrive at:

**Proposition 1** *There is a one-to-one correspondence between $(L, \oplus, *)$-convex combinations on $X$ and convex strictly $*$-transitive $L$-preferences on $X$, namely, each such preference $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ is determined by a unique $(L, \oplus, *)$-convex combination ic by the formulae $x \succ_\alpha y \iff ic(x, y, 1, \alpha) = x$, $x, y \in X$, $\alpha \in L$.*

In the sequel we assume that convex strictly $*$-transitive $L$-preferences on sets with $L$-convex combinations are determined by the latter formulae.

Things become much simpler if $(X, \leqslant)$ contains a bottom element, i.e. $\bar{0}$ such that $x \succ_1 \bar{0}$ for all $X$. Then (6) implies:

(6') for all $x \in X$, $\alpha \in L$, there is an element $x_0 \in X$ such that, for all $t \in X$, the inequalities $t \succ_\alpha x$ and $t \succ_1 x_0$ are equivalent.

The required element is equal to $(1 \mathbin{\bar{\odot}} \bar{0}) \mathbin{\bar{\oplus}} (\alpha \mathbin{\bar{\odot}} x)$. We denote it by $\alpha \mathbin{\bar{\odot}} x$, and $(X, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$ is an $L$-semimodule. On the other hand, (6') implies that $0 \mathbin{\bar{\odot}} x$ is a bottom element, for all $x \in X$. Therefore, if a family $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ of binary relations on $X$ satisfies (1)–(5), (6'), the condition (6) holds even without the restriction $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n = 1$. We call such a family $\succ$ a *convex strictly $*$-transitive $L$-preference on $X$ with a bottom element.* Thus:

**Corollary 1** *There is a one-to-one correspondence between structures of $(L, \oplus, *)$-semimodule on $X$ and convex strictly $*$-transitive $L$-preferences on $X$ with bottom elements, namely, each such preference $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ is determined by unique $\bar{\oplus}$, $\bar{\odot}$ such that $(X, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$ is an $(L, \oplus, *)$-semimodule, by the formulae $x \succ_\alpha y \iff x \mathbin{\bar{\oplus}} (\alpha \mathbin{\bar{\odot}} y) = x$, $x, y \in X$, $\alpha \in L$.*

Let $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ be a $*$-transitive $L$-preference on a set $X$. For an injective mapping $e : Y \hookrightarrow X$, a family $\succ' = (\succ_\alpha)'_{\alpha \in L}$ of binary relations on $Y$ that is defined as follows:

$$y_1 \succ_\alpha)' y_2 \iff e(y_1) \succ_\alpha e(y_2), \quad y_1, y_2 \in Y, \alpha \in L,$$

is an $L$-preference on $Y$ is well. If, for $L$-preferences $\succ'$ and $\succ$, on $Y$ and $X$, respectively, such a mapping $e$ exists, then it is called an *embedding* of $(Y, \succ')$ into $(X, \succ)$.

Now we are going to show that each set with a $*$-transitive $L$-preference can be embedded into an $(L, \oplus, *)$-semimodule.

**Proposition 2** *Let $\succ = (\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ be a $*$-transitive $L$-preference on a set $X$. There is an embedding $e$ of $(X, \succ)$ into an $(L, \oplus, *)$-semimodule $(N, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$, i.e. $x \succ_\alpha y \iff e(x) \mathbin{\bar{\oplus}} (\alpha \mathbin{\bar{\odot}} e(y)) = e(x)$ for all $x, y \in X$, $\alpha \in L$.*

*Proof* Let $K$ be the set of all nonempty finite subsets of $X \times L$, and we put

$$\{(x_1, \alpha_1), \ldots, (x_m, \alpha_m)\} >_\varepsilon \{(y_1, \beta_1), \ldots, (y_n, \beta_n)\},$$

for $m, n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in X$, $\varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in L$, if, for all $1 \leqslant i \leqslant n$, there are $\varepsilon_{1i}, \ldots, \varepsilon_{mi} \in L$ such that

$$x_1 \succ_{\varepsilon_{1i}} y_i, \ldots, x_m \succ_{\varepsilon_{mi}} y_i, \alpha_1 * \varepsilon_{1i} \oplus \ldots \oplus \alpha_m * \varepsilon_{mi} \geqslant \varepsilon * \beta_i.$$

Assume also

$$\{(y_1, \beta_1), \ldots, (y_n, \beta_n)\} >_\delta \{(z_1, \gamma_1), \ldots, (z_k, \gamma_k)\},$$

for $z_1, \dots, z_k \in X$, $\delta, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in L$, then, for all $1 \leqslant j \leqslant k$, there are $\delta_{1j}, \dots, \delta_{nj} \in L$ such that

$$y_1 \succ_{\delta_{1j}} z_j, \dots, y_n \succ_{\delta_{nj}} z_j, \beta_1 * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus \beta_n * \delta_{nj} \geqslant \delta * \gamma_j.$$

Hence

$$\begin{aligned} \varepsilon * \delta * \gamma_j &\leqslant \varepsilon * \beta_1 * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus \varepsilon * \beta_n * \delta_{nj} \\ &\leqslant (\alpha_1 * \varepsilon_{11} \oplus \dots \oplus \alpha_m * \varepsilon_{m1}) * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus (\alpha_1 * \varepsilon_{1n} \oplus \dots \oplus \alpha_m * \varepsilon_{mn}) * \delta_{nj} \\ &= \alpha_1 * (\varepsilon_{11} * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{1n} * \delta_{nj}) \oplus \dots \oplus \alpha_m * (\varepsilon_{m1} * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{mn} * \delta_{nj}). \end{aligned}$$

By observing that $x_1 \succ_{\varepsilon_{11} * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{1n} * \delta_{nj}} z_j$, $x_m \succ_{\varepsilon_{m1} * \delta_{1j} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{mn} * \delta_{nj}} z_j$, we obtain that

$$\{(x_1, \alpha_1), \dots, (x_m, \alpha_m)\} >_{\varepsilon * \delta} \{(z_1, \gamma_1), \dots, (z_k, \gamma_k)\}.$$

On the other hand, if

$$\{(x_1, \alpha_1), \dots, (x_m, \alpha_m)\} >_{\varepsilon * \delta} \{(z_1, \gamma_1), \dots, (z_k, \gamma_k)\},$$

then

$$\{(x_1, \alpha_1), \dots, (x_m, \alpha_m)\} >_{\varepsilon} \{(z_1, \delta * \gamma_1), \dots, (z_k, \delta * \gamma_k)\},$$
$$\{(z_1, \delta * \gamma_1), \dots, (z_k, \delta * \gamma_k)\} >_{\delta} \{(z_1, \gamma_1), \dots, (z_k, \gamma_k)\},$$

therefore strict $*$-transitivity for the family $(>_\alpha)_{\alpha \in L}$ is valid. It is straightforward to verify that this family of relations satisfies all conditions (1)–(5), (6') but the antisymmetry of $>_1$. The relation $\sim$ on $K$ defined as $A \sim B$ iff $A >_1 B$ and $B >_1 A$ is an equivalence relation, and a family $(\succ_\alpha)_{\alpha \in L}$ of binary relations on the quotient set $N = K/{\sim}$ is well defined as follows: $[A] \succ_\alpha [B]$ iff $A >_\alpha B$, for $A, B \in K$, $\alpha \in L$. This family satisfies (1)–(5), (6'), thus we obtain an $(L, \oplus, *)$-semimodule $(N, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$. Observe that $[A] \,\bar{\oplus} [B] = [A \cup B]$,

$$\alpha \,\bar{\odot} [\{(x_1, \alpha_1), \dots, (x_m, \alpha_m)\}] = [\{(x_1, \alpha * \alpha_1), \dots, (x_m, \alpha * \alpha_m)\}].$$

Let a mapping $e : X \to N$ send each $x \in X$ to $[\{(x, 1)\}]$. Observe that $e(x) \succ_\alpha e(y)$ in $K$ iff $x \succ_\alpha y$ in $X$. Thus a required embedding is obtained.

The embedding $e$ that has been constructed in the latter proof has a disadvantage: if a $*$-transitive $L$-preference on $X$ is already convex and strictly $*$-transitive, hence $(L, \oplus, *)$-convex combinations exist in $X$, then they are not necessarily preserved by $e$. Therefore the following statement is not a particular case of the previous one.

**Proposition 3** *Let an $(L, \oplus, *)$-convex combination be defined on a set $X$. Then there is an injective mapping $e$ of $X$ into an $(L, \oplus, *)$-semimodule $(N, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$ that preserves $(L, \oplus, *)$-convex combinations.*

Recall that such $e$ preserves the respective $L$-preferences (in the obvious sense).

*Proof* A starting point is the same as before: $K$ is a set of all non-empty subsets of $X \times L$, but another equivalence relation is used:

$$\{(x_1, \alpha_1), \ldots, (x_m, \alpha_m)\} \sim \{(y_1, \beta_1), \ldots, (y_n, \beta_n)\}$$

if

$$(1 \,\bar{\odot}\, z) \,\bar{\oplus} (\alpha_1 \,\bar{\odot}\, x_1) \,\bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} (\alpha_m \,\bar{\odot}\, x_m) = (1 \,\bar{\odot}\, z) \,\bar{\oplus} (\beta_1 \,\bar{\odot}\, y_1) \,\bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} (\beta_n \,\bar{\odot}\, y_n)$$

for all $z \in X$. The operations $\bar{\oplus}$ and $\bar{\odot}$ on $N = K/\sim$ are again defined as $[A] \,\bar{\oplus} [B] = [A \cup B]$,

$$\alpha \,\bar{\odot} [\{(x_1, \alpha_1), \ldots, (x_m, \alpha_m)\}] = [\{(x_1, \alpha * \alpha_1), \ldots, (x_m, \alpha * \alpha_m)\}],$$

and the mapping $e$ that takes each $x \in X$ to $[\{(x, 1)\}]$ is a required embedding.

Thus each set with an $L$-convex combination can be regarded as a convex subset of an $L$-semimodule. A "practical" consequence of the above results is that, if one wants to express comparison of available alternatives, which combines qualitative and quantitative estimates w.r.t. multiple criteria, then a utility function with range in an idempotent semimodule can be an appropriate tool.

## 3 Bi-$(L, \oplus, \otimes)$-semimodules

Probably the simplest example of an idempotent semiring is a distributive lattice $L = (L, \oplus, \otimes)$, where 0 and 1 are a bottom and a top elements, respectively, and the multiplication is the lattice meet $\otimes$. Observe that by reversing the order on $L$ we obtain a distributive lattice $\tilde{L} = (L, \otimes, \oplus)$, with a bottom and a top elements $\tilde{0} = 1$ and $\tilde{1} = 0$, respective, which is an idempotent semiring as well.

Consider an $L$-semimodule $(X, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$ such that:

(a) $X$ is a distributive lattice with top and bottom elements $\bar{0}$ and $\bar{1}$, resp., and with meet $\bar{\otimes}$;

(b) the multiplication $\bar{\odot}$ on $X$ satisfies the equality $(\alpha \,\bar{\odot}\, \bar{1}) \,\bar{\otimes}\, x = \alpha \,\bar{\odot}\, x$, for all $\alpha \in L$, $x \in X$.

**Proposition 1** *For an operation $\underline{\odot}: L \times X \to X$ that is defined by the formula $\alpha \underline{\odot} x = (\alpha \bar{\odot} \bar{1}) \bar{\oplus} x$, for all $\alpha \in L$, $x \in X$, the triple $(X, \bar{\otimes}, \underline{\odot})$ is a $\tilde{L}$-semimodule and a distributive lattice with top and bottom elements $\bar{1}$ and $\bar{0}$, resp., and with meet $\bar{\oplus}$.*

Observe that $\alpha \bar{\odot} \bar{1} = \alpha \underline{\odot} \bar{0}$, and we obtain a formula $(\alpha \underline{\odot} \bar{0}) \bar{\oplus} x = \alpha \underline{\odot} x$, which is dual in the obvious sense to the formula $(\alpha \bar{\odot} \bar{1}) \bar{\otimes} x = \alpha \bar{\odot} x$ (cf. property (b)). Hence we have on $X$ two dual structures of an $L$-semimodule and of a $\tilde{L}$-semimodule. Additionally to $L$-convex combinations, i.e. expressions of the form $(\alpha_1 \bar{\odot} x_1) \bar{\oplus} \ldots \bar{\oplus} (\alpha_n \bar{\odot} x_n)$, where $\alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n = 1$, we define *$\tilde{L}$-convex* (or *dual $L$-convex*) *combinations* of the form $(\alpha_1 \underline{\odot} x_1) \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} (\alpha_n \underline{\odot} x_n)$, where $\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n = 0$.

Therefore we call such $(X, \bar{\oplus}, \bar{\otimes}, \bar{\odot}, \underline{\odot})$ a *bi-$L$-semimodule*. It is easy to see that the mapping $p : L \to X$ that takes each $\alpha$ to $\alpha \bar{\odot} \bar{1}$ is a lattice morphism. Conversely, each lattice morphism $p : (L, \oplus, \otimes) \to (X, \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ determines a structure $(X, \bar{\oplus}, \bar{\otimes}, \bar{\odot}, \underline{\odot})$ of bi-$L$-semimodule on $X$ by the formulae $\alpha \bar{\odot} x = p(\alpha) \bar{\otimes} x$, $\alpha \underline{\odot} x = p(\alpha) \bar{\oplus} x$ for all $\alpha \in L$, $x \in X$. Thus there is a one-to-one correspondence between bi-$L$-semimodules and lattice morphisms with the domain $L$. From now on we assume that a respective $p$ is fixed for each bi-$L$-semimodule $(X, \bar{\otimes}, \bar{\oplus}, \bar{\odot}, \underline{\odot})$.

A subset $Y$ of a bi-$L$-semimodule $X$ is called *$L$-biconvex* if it is closed under $L$-convex and dual $L$-convex combinations. Note that such $Y$ is a sublattice of $X$. The following statement shows that "good" $L$-biconvex sets of bi-$L$-semimodules are bi-$L$-semimodules themselves, which contrasts, e.g., to the case of convex subsets in vector spaces.

**Proposition 2** *Let a subset $Y$ of a bi-$L$-semimodule $(X, \bar{\otimes}, \bar{\oplus}, \bar{\odot}, \underline{\odot})$ be $L$-biconvex and contain a least element $\bar{0}'$ and a greatest element $\bar{1}'$. Then $(Y, \bar{\oplus}', \bar{\otimes}', \bar{\odot}', \underline{\odot}')$ is a bi-$L$-semimodule, with $\bar{\oplus}'$ and $\bar{\otimes}'$ being the restrictions of $\bar{\oplus}$ and $\bar{\otimes}$ to $Y$, and $\alpha \bar{\odot}' x = \bar{0}' \bar{\oplus} (\alpha \bar{\odot} x)$, $\alpha \underline{\odot}' x = \bar{1}' \bar{\otimes} (\alpha \underline{\odot} x)$ for all $\alpha \in L$, $x \in L$.*

Observe also that the latter bi-$L$-semimodule $(Y, \bar{\oplus}', \bar{\otimes}', \bar{\odot}', \underline{\odot}')$ is determined by the lattice morphism $p' : L \to Y$, $p'(\alpha) = (p(\alpha) \bar{\oplus} \bar{0}') \bar{\otimes} \bar{1}'$.

A simple example of such $Y$ is presented by a *closed interval* $[a, b] = \{x \in X \mid a \leqslant x \leqslant y\}$, for $a, b \in X$, which obviously is non-empty iff $a \leqslant b$.

Although bi-$L$-semimodules seem to be trivial, consider the $L$-preference $\succ$ and the $\tilde{L}$-preference $\tilde{\succ}$ determined by the semimodules $(X, \bar{\oplus}, \bar{\odot})$ and $(X, \bar{\otimes}, \underline{\odot})$, respectively. We have $x \succ_\alpha y \iff x \geqslant p(\alpha) \mathbin{\bar{\otimes}} y$, $x \mathrel{\tilde{\succ}_\alpha} y \iff x \leqslant p(\alpha) \mathbin{\bar{\oplus}} y$ for all $\alpha \in L$, $x, y \in X$.

Can we express the information given by all $\succ_\alpha$ and $\tilde{\succ}_\alpha$ via an embedding of $X$ into an appropriate poset, preferably a distributive lattice?

## References

1. Akian, M.: Densities of invariant measures and large deviations, Trans. Amer. Math. Soc. **351(11)**, 4515–4543 (1999)
2. Bouyssou, D., Vincke, P.: Introduction to topics on preference modelling, Annals of Operation research **80**, i–xiv (1998)
3. Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J.-P.: Duality and separation theorems in idempotent semimodules. `arXiv: math/0212294v2 [math.FA]`, 29 Sep 2003
4. Fishburn, P.C.: Utility Theory for Decision Making. Huntington, NY, Robert E. Krieger Publishing Co. (1970)
5. Fodor, J., Roubens, M.: Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1994)
6. Kolokoltsov, V.N., Maslov, V.P.: Idempotent Analysis and Its Applications. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1998)
7. Nykyforchyn, O., Repovš D.: Idempotent convexity and algebras for the capacity monad and its submonads, Applied Categorical Structures, publ. online 10 june 2010, `doi: 10.1007/s10485-D10-9229-9`

# Топологія Вієторіса на просторі відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору

**Катерина Миколаївна Копорх**

**Abstract** Наведено топологізацію множини відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору, породжену топологією Вієторіса на $\exp^2 X$. Одержаний топологічний простір відкритих фактороб'єктів простору $X$ позначаємо $\Psi(X)$. Доведено, що конструкція $\Psi$ визначає контраваріантний функтор з категорії $\mathbf{Comp}^0$, компактних гаусдорфових просторів та $\mathbf{Top}$ топологічних просторів. Доведено, що простір відкритих фактороб'єктів $(\Psi(X), \tau_V)$ неперервно вкладається у простір фактороб'єктів $(\Phi(X), \tau_W)$ у випадках, коли $X$ — компактний гаусдорфовий простір і коли $X$ — компактний гаусдорфовий метричний простір.

**Keywords** простір відкритих фактороб'єктів, топологія Вієторіса, топологія Вайсмана

## Вступ

При дослідженні неметризовних компактних гаусдорфових просторів методами обернених спектрів важливу роль відіграє запропонована Є.В.Щепіним конструкція множини факторвідображень.

Детальніше, розглянемо $X$ — компактний гаусдорфовий простір і неперервне сюр'єктивне відображення $f_i\colon X \to Z_i$, де $Z_i$ — компактний гаусдорфовий простір, $i = 1, 2$, то вважаємо, що $f_1 \sim f_2$, якщо існує гомеоморфізм $h\colon Z_1 \to Z_2$ такий, що $h \circ f_1 = f_2$. Так означене відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності на класі всіх сюр'єктивних відображень (факторвідображень) в компактні гаусдорфові простори. Через $[f]$ позначаємо клас еквівалентності, що містить факторвідображення $f$. Фактороб'єктом простору $X$ назвемо клас еквівалентних відображень. Множину всіх класів еквівалентності позначаємо

$$\widetilde{\Phi}(X) = \{[f] \mid f\colon X \longrightarrow Z \text{ де } f - \text{ сюр'єктивне відображення,} \\ X, Z - \text{ компактні гаусдорфові простори } \}.$$

Нехай $f\colon X \to Z$ — неперервне, відкрите, сюр'єктивне відображення компактних гаусдорфових просторів (нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Z$ називається відкритим, якщо образ кожної відкритої множини є множина відкрита). Позначимо $\langle f \rangle$ клас відкритих факторвідображень еквівалентних відображенню $f\colon X \to Z$. Множину класів відкритих факторвідображень позначимо $\widetilde{\Psi}(X)$,

$$\widetilde{\Psi}(X) = \{\langle f \rangle \mid f\colon X \longrightarrow Z \text{ де } f - \text{ відкрите сюр'єктивне відображення,} \\ X, Z - \text{ компактні гаусдорфові простори } \}.$$

Очевидно $\widetilde{\Psi}(X) \subset \widetilde{\Phi}(X)$.

Метою цієї праці є топологізація множини $\Psi(X)$ відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору, породжена топологією Вієторіса на множині всіх можливих непорожніх замкнених множин гіперпростору $\exp X$. А також дослідження функторіальності конструкції $\Psi$, в топології Вієторіса і можливість вкладення простору $(\Psi(X), \tau_V)$ у простір $(\Phi(X), \tau_W)$.

## 1 Топологія Вайсмана на множині фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору

Нагадаємо, що для топологічного простору $X$ через $CL(X)$ позначаємо множину непорожніх замкнених множин в $X$; різні топології на множині $CL(X)$ розглянуто в [2]. Пригадаємо, що базисним околом елемента $A \in CL(X)$ в топології Вайсмана є множина

$$O(A, F, \varepsilon) = \{B \in CL(X) \mid |d(x, A) - d(x, B)| < \varepsilon \text{ для всіх } x \in F\},$$

де $F$ — скінченна підмножина простору $X$ і $\varepsilon > 0$. Множина $CL(X)$ з введеною топологією Вайсмана є топологічним простором і позначається $(CL(X), \tau_W)$.

Топологія Вайсмана на $\widetilde{\Phi}(X)$ задається такою конструкцією. Для кожного компактного гаусдорфового простору $X$ через $C(X)$ позначимо банахів простір дійснозначних неперервних функцій на $X$, наділений sup-нормою. Розглянемо неперервне, сюр'єктивне відображення $f\colon X \to Z$ і розглянемо дуальне відображення $f_*\colon C(Z) \to C(X)$, означене формулою $f_*(\xi) = \xi \circ f$. Якщо $f\colon X \to Z$ — сюр'єктивне відображення, то відображення $f_*\colon C(Z) \to C(X)$ є відображенням вкладення, тому $f_*(C(Z)) \in \mathrm{CL}(C(X))$. Таким чином, кожному неперервному, сюр'єктивному відображенню $f$ компакта $X$ на $Z$ можна покласти у відповідність деяку замкнену підмножину $f_*(C(Z))$ простору $C(X)$.

Очевидно, двом еквівалентним відображенням $f \sim g$, де $f\colon X \to Z$ і $g\colon X \to Y$ відповідає одна і та ж підмножина $f_*(C(Z)) \equiv g_*(C(Y))$ простору $C(X)$.

Таким чином, визначене вкладення

$$e\colon \widetilde{\Phi}(X) \longrightarrow (CL(C(X)), \tau_W)$$

множини класів еквівалентних відображень компактного гаусдорфового простору $X$ в простір $(CL(C(X)), \tau_W)$ непорожніх замкнених підмножин функціонального простору $C(X)$ наділений топологією Вайсмана. Покладемо $\Phi(X) = e(\widetilde{\Phi}(X))$.

У статті [1] автор доводить замкненість підмножини $\Phi(X)$ в просторі $(CL(C(X)), \tau_W)$, що дає змогу топологізувати $\Phi(X)$, а саме базисним околом елемента $[f] \in \Phi(X)$ є множина

$$O([f]; \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n; \varepsilon) = \{[g] \in \Phi(X) \mid |\rho(\varphi_i, [f]) - \rho(\varphi_i, [g])| < \varepsilon, \\ \varphi_i \in C(X), i = 1, 2, \dots, n \text{ де } \varepsilon > 0 \text{ і } n \in N\}.$$

Множину фактороб'єктів простору $X$ наділену топологією Вайсмана позначаємо $\Phi(X)$.

## 2 Топологія Вієторіса на множині відкритих фактороб'єктів компактного гаусдорфового простору

Нехай $f\colon X \to Z$ — неперервне, відкрите, сюр'єктивне відображення компактних гаусдорфових просторів. Відомо, що відкритість відображення $f\colon X \to Z$ еквівалентна неперервності відображення $f^{-1}\colon Z \to \exp X$, де через $\exp X$ ми позначаємо гіперпростір (множину непорожніх, замкнених підмножин простору $X$), наділений топологією Вієторіса (див., напр., [3]). Базою цієї топології може служити сім'я множин

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всіх } i = 1, 2, \dots, n\},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Образом простору $Z$ при відображенні $F = f^{-1}\colon Z \to \exp X$ є непорожня, замкнена підмножина $F(Z)$ в $\exp X$, тобто

$$F(Z) = \{f^{-1}(z) \mid z \in Z\} = \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\} \in \exp^2 X.$$

Зрозуміло, що різним класам еквівалентних відображень $\langle f\rangle \neq \langle g\rangle$ відповідають різні сім'ї множин $\mathcal{F} = \{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}$ і $\mathcal{G} = \{g^{-1}(g(x)) \mid x \in X\}$, що дає змогу вкласти підмножину класів відкритих факторвідображень простору $X$ в множину $\exp^2 X$, наділену топологією Вієторіса.

В топології Вієторіса базисним околом елемента $\langle f\rangle$ є множина

$$O\langle f\rangle = \langle\langle U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1n_1}\rangle, \ldots, \langle U_{k1}, U_{k2}, \ldots, U_{kn_k}\rangle\rangle,$$

де $U_{ij}$ — відкриті підмножини простору $X$ такі, що виконуються умови:

1) для кожного $z \in Z$ існує номер $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, такий, що $f^{-1}(z) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in_i}\rangle$, тобто $f^{-1}(z) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_i} U_{ij}$ і для всіх $j \in \{1, 2, \ldots n_i\}$ маємо $f^{-1}(z) \cap U_{ij} \neq \emptyset$;

2) для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ знайдеться елемент $z \in Z$ такий, що $f^{-1}(z) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{in_i}\rangle$.

Множину відкритих факторвідображень простору $X$ наділену топологією Вієторіса позначаємо $\Psi(X)$.

## 3 Функторіальність конструкції $\Psi$ в категорії компактних гаусдорфових просторів та відкритих сюр'єктивних відображень

Нехай $X$, $Y$ — компактні, гаусдорфові простори. Розглянемо неперервне, відкрите відображення $g\colon X \to Y$ і відповідне йому відображення

$$\Psi(g)\colon \Psi(Y) \to \Psi(X),$$

задане формулою $\Psi(g)(\langle h\rangle) = \langle h \circ g\rangle$, де $\langle h\rangle \in \Psi(Y)$. Коректність такого означення відображення $\Psi(g)$ випливає з того факту, що композиція двох відкритих відображень є відкрите відображення.

Відображення $\Psi(g)\colon \Psi(Y) \to \Psi(X)$ неперервне.

*Proof* Розглянемо довільний базисний окіл

$$O\langle f\rangle = \langle\langle U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1n_1}\rangle, \langle U_{21}, U_{22}, \ldots, U_{2n_2}\rangle, \ldots, \langle U_{k1}, U_{k2}, \ldots, U_{kn_k}\rangle\rangle$$

елемента $\langle f\rangle = \langle h\circ g\rangle \in \Psi(X)$.

Розглянемо прообраз $\Psi^{-1}(g)(O\langle f\rangle)$ околу $O\langle f\rangle$. Для кожного $z\in Z$ існує номер $i$, $i\in\{1,2,\dots,k\}$, такий, що $f^{-1}(z)\in\langle U_{i1},U_{i2},\dots,U_{in_i}\rangle$, тобто $f^{-1}(z)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n_i}U_{ij}$ і для кожного $j\in\{1,2,\dots n_i\}$ маємо $f^{-1}(z)\cap U_{ij}\neq\emptyset$.

Оскільки $f = hg$, то з умови $f^{-1}(z)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n_i}U_{ij}$ випливає $(hg)^{-1}(z)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n_i}U_{ij}$, звідки отримаємо $g^{-1}(h^{-1}(z))\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n_i}U_{ij}$, тобто $h^{-1}(z)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n_i}g(U_{ij})$. З того, що $f^{-1}(z)\cap U_{ij}\neq\emptyset$, де $j\in\{1,2,\dots n_i\}$, випливає, що існує таке $x_j\in X$, що $x_j\in f^{-1}(z)$ і $x_j\in U_{ij}$. Тоді $f(x_j)=z$ і $g(x_j)\in g(U_{ij})$, звідки одержуємо $hg(x_j)=z$ і $g(x_j)\in g(U_{ij})$. Тоді $g(x_j)=h^{-1}(z)$ і $g(x_j)\in g(U_{ij})$, тобто $h^{-1}(z)\cap g(U_{ij})\neq\emptyset$ для всіх $j\in\{1,2,\dots n_i\}$. Отже, для кожного $z\in Z$ знайдеться $i\in\{1,2,\dots,k\}$ таке, що $h^{-1}(z)\in\langle g(U_{i1}),g(U_{i2}),\dots,g(U_{in_i})\rangle$.

Аналогічно можна показати, що для кожного $i\in\{1,2,\dots,k\}$ знайдеться елемент $z\in Z$ такий, що $f^{-1}(z)\in\langle U_{i1},U_{i2},\dots,U_{in_i}\rangle$.

Оскільки $g$ — відкрите відображення, множина $g(U_{ij})$ є відкритою підмножиною простору $Y$, а тому множина

$$O\langle h\rangle = \langle\langle g(U_{11}),g(U_{12}),\dots,g(U_{1n_1})\rangle,\langle g(U_{21}),g(U_{22}),\dots,g(U_{2n_2})\rangle,\\ \dots,\langle g(U_{k1}),g(U_{k2}),\dots,g(U_{kn_k})\rangle,$$

буде базисним околом елемента $\langle h\rangle\in\Psi(Y)$, тобто при відображенні $\Psi(g)$ елементи бази простору $\Psi(Y)$ відображаються в базисні елементи простору $\Psi(X)$. Звідки випливає неперервність відображення $\Psi(g)\colon\Psi(Y)\to\Psi(X)$.

Отже, конструкція $\Psi$ визначає контраваріантний функтор з категорії $\mathbf{Comp}^0$, компактних гаусдорфових просторів та відкритих сюр'єктивних відображень, в категорію **Top** топологічних просторів.

## 4 Неперервність відображення $\gamma\colon\Psi(X)\to\Phi(X)$.

Нехай $(X,d)$ — компактний метричний простір. Розглянемо відображення $\gamma\colon(\Psi(X),\tau_V)\to(\Phi(X),\tau_W)$, задане таким чином: кожній сім'ї замкнених множин $F=\{f^{-1}(f(x))\mid x\in X\}=\langle f\rangle\in\Psi(X)$, де $f\colon X\to Z$ — деяке неперервне, сюр'єктивне, відкрите відображення, ставимо у відповідність клас еквівалентності $[f]=f_*(C(Z))\in\Phi(X)$, який містить факторвідображення $f$. Оскільки $(X,d)$ — компакт, то кожна неперервна на $X$ функція є рівномірно неперервною. Тобто, для кожного $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ така, що якщо відстань між елементами прообразу не перевищує $\delta$, то відстань між елементами образу не перевищуватиме $\varepsilon$.

Нехай $(X, d)$ — компактний метричний простір. Відобра- ження $\gamma\colon (\Psi(X), \tau_V) \to (\Phi(X), \tau_W)$ неперервне.

*Proof* Нехай $[f] = \gamma(\langle f\rangle)$ де $[f] \in \Phi(X)$ і $\langle f\rangle \in \Psi(X)$. Розглянемо деякий окіл

$$O([f]; \varphi; \varepsilon) = \{[g] \in \Phi(X) \mid |\rho(\varphi, [f]) - \rho(\varphi, [g])| < \varepsilon\}, \varphi \in C(X),$$

де $\varepsilon > 0$, елемента $[f]$.

Нехай відстань від елемента $\varphi \in C(X)$ до множини $[f]$ реалізується на елементі $\alpha \in [f]$, тоді $\rho(\varphi, [f]) = \rho(\varphi, \alpha)$. З рівномірної неперервності функції $\alpha \in C(X)$ для заданого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що якщо $d(x, y) < \delta$, то $|\alpha(x) - \alpha(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Розглянемо окіл $O_\delta\langle f\rangle \subset \Psi(X)$. Якщо $\langle g\rangle \in O_\delta\langle f\rangle \subset \Psi(X)$, то для кожного $x \in X$ існує елемент $x' \in X$ такий, що $d_H(f^{-1}(f(x)), g^{-1}(g(x'))) < \delta$ і навпаки для кожного $x' \in X$ існує елемент $x \in X$ такий, що

$$d_H(g^{-1}(g(x')), f^{-1}(f(x))) < \delta.$$

Отже, відстань

$$\rho(\varphi, [f]) = \rho(\varphi, \alpha) = \| \varphi - \alpha \| = \sup_{x\in X}\{|\varphi(x) - \alpha(x)|\} = \sup_{x\in X}\{|\varphi(x) - \xi \circ f(x)|\}.$$

Зауважимо, що функція $\alpha$ стала на елементах сім'ї $\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}$.

Розглянемо функцію $\mu\colon X \to \mathbb{R}$, задану формулою $\mu(x) = \min\{\alpha(y) \mid y \in g^{-1}(g(x))\}$. Тобто $\mu \in [g]$. Нехай відстань $\rho(\alpha, \mu)$ реалізується на елементі $x_0 \in X$, тобто

$$\begin{aligned}\rho(\alpha, \mu) &= \sup_{x\in X}\{|\alpha(x) - \mu(x)|\} = |\alpha(x_0) - \mu(x_0)| = \\ &= |\alpha(x_0) - \min\{\alpha(y) \mid y \in g^{-1}(g(x_0))\}| = |\alpha(x_0) - \alpha(y_0)|.\end{aligned}$$

За побудовою, знайдеться елемент $x_0' \in X$ такий, що

$$d_H(f^{-1}(f(x_0)), g^{-1}(g(x_0'))) < \delta,$$

отже, існує $x' \in g^{-1}(g(x_0'))$ таке, що $d(x_0, x') < \delta$ і існує $y' \in g^{-1}(g(x_0'))$ таке, що $d(y_0, y') < \delta$. Далі, враховуючи рівномірну неперервність відображення $\alpha$, отримаємо:

$$\begin{aligned}\rho(\alpha, \mu) &= |\alpha(x_0) - \alpha(y_0)| = |\alpha(x_0) - \alpha(x') + \alpha(x') - \alpha(y') + \alpha(y') - \alpha(y_0)| \\ &\leqslant |\alpha(x_0) - \alpha(x')| + |\alpha(x') - \alpha(y')| + |\alpha(y') - \alpha(y_0)| < \varepsilon/2 + 0 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким чином, має місце нерівність $\rho(\varphi,\mu) \leqslant \rho(\varphi,\alpha)+\rho(\alpha,\mu) < \rho(\varphi,[f])+\varepsilon$, але $\rho(\varphi,[g]) \leqslant \rho(\varphi,\mu)$, отже, отримаємо

$$\rho(\varphi,[g])-\rho(\varphi,[f]) < \varepsilon.$$

З іншого боку, припустимо, що відстань від елемента $\varphi \in C(X)$ до множини $[g]$ реалізується на деякому елементі $\beta \in [g]$, тоді $\rho(\varphi,[g])=\rho(\varphi,\beta)$, тому

$$\| \varphi-\beta \| = \sup_{x\in X}\{|\varphi(x)-\beta(x)|\}.$$

Зауважимо, що функція $\beta$ стала на елементах сім'ї $\{g^{-1}(g(x)) \mid x \in X\}$.

Розглянемо функцію $\eta\colon X \to \mathbb{R}$, задану формулою $\eta(x)=\min\{\beta(y) \mid y \in f^{-1}(f(x))\}$. Тобто функція $\eta \in [f]$. Нехай відстань $\rho(\beta,\eta)$ реалізується на деякому елементі $x_0 \in X$, тобто

$$\begin{aligned}\rho(\beta,\eta) &= \sup_{x\in X}\{|\beta(x)-\eta(x)|\} = |\beta(x_0)-\eta(x_0)| = \\ &= |\beta(x_0)-\min\{\beta(y) \mid y \in g^{-1}(g(x_0))\}| = |\beta(x_0)-\beta(y_0)|.\end{aligned}$$

За побудовою знайдеться елемент $x_0' \in X$ такий, що

$$d_H(f^{-1}(f(x_0')), g^{-1}(g(x_0))) < \delta,$$

отже, існує $x' \in f^{-1}(f(x_0'))$ таке, що $d(x_0,x') < \delta$ і існує $y' \in f^{-1}(f(x_0'))$ таке, що $d(y_0,y') < \delta$. Далі, враховуючи рівномірну неперервність відображення $\beta$, отримаємо:

$$\begin{aligned}\rho(\beta,\eta) &= |\beta(x_0)-\beta(y_0)| = |\beta(x_0)-\beta(x')+\beta(x')-\beta(y')+\beta(y')-\beta(y_0)| \\ &\leqslant |\beta(x_0)-\beta(x')|+|\beta(x')-\beta(y')|+|\beta(y')-\beta(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+0+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким чином, має місце нерівність $\rho(\varphi,\eta) \leqslant \rho(\varphi,\beta)+\rho(\beta,\eta) < \rho(\varphi,[g])+\varepsilon$, але $\rho(\varphi,[f]) \leqslant \rho(\varphi,\eta)$, отже, отримаємо

$$\rho(\varphi,[f])-\rho(\varphi,[g]) < \varepsilon.$$

Отже, $|\rho(\varphi,[f])-\rho(\varphi,[g])| < \varepsilon$ звідки випливає, що $[g] \in O([f];\varphi;\varepsilon)$. Тобто $\gamma(O_\delta\langle f\rangle) \subset O([f];\varphi;\varepsilon)$, що означає неперервність відображення

$$\gamma\colon (\Psi(X),\tau_V) \to (\Phi(X),\tau_W).$$

Нехай $X$ — компактний гаусдорфовий простір. Розглянемо відображення $\gamma\colon (\Psi(X), \tau_V) \to (\Phi(X), \tau_W)$. Оскільки $X$ — компакт, то кожна неперервна на $X$ функція є рівномірно неперервною. Тобто, для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченне покриття простору $X$ відкритими множинами, а саме $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots U_m\}$, де $m \in \mathbb{N}$, таке, що на кожному елементі покриття $U_i$ коливання функції не перевищуватиме $\varepsilon$.

Нехай $X$ — компактний гаусдорфовий простір. Відобра- ження $\gamma\colon (\Psi(X), \tau_V) \to (\Phi(X), \tau_W)$ неперервне.

*Proof* Нехай $[f] = \gamma(\langle f \rangle)$ де $[f] \in \Phi(X)$ і $\langle f \rangle \in \Psi(X)$. Розглянемо деякий окіл

$$O([f]; \varphi; \varepsilon) = \{[g] \in \Phi(X) \mid |\rho(\varphi, [f]) - \rho(\varphi, [g])| < \varepsilon\}, \varphi \in C(X),$$

де $\varepsilon > 0$, елемента $[f]$.

Нехай відстань від елемента $\varphi \in C(X)$ до множини $[f]$ реалізується на елементі $\alpha \in [f]$, тоді $\rho(\varphi, [f]) = \rho(\varphi, \alpha)$. З рівномірної неперервності функції $\alpha \in C(X)$ для заданого $\varepsilon > 0$ існує скінченне покриття простору $X$ відкритими множинами, а саме $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots U_m\}$, таке, що для всіх $x, y \in U_i$ маємо $|\alpha(x) - \alpha(y)| < \varepsilon/2$.

Розглянемо окіл

$$O\langle f \rangle = \langle \langle U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1n_1} \rangle, \langle U_{21}, U_{22}, \dots, U_{2n_2} \rangle, \dots, \langle U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{kn_k} \rangle \rangle$$

елемента $\langle f \rangle \subset \Psi(X)$, в якому всі $U_{ij} \in \mathcal{U}$. Розглянемо довільний елемент $\langle g \rangle \in O\langle f \rangle$, тоді для кожного $x \in X$ існує елемент $x' \in X$ такий, що $f^{-1}(f(x)) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i} \rangle$ і $g^{-1}(g(x')) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i} \rangle$ і навпаки: для кожного $x' \in X$ існує елемент $x \in X$ такий, що $g^{-1}(g(x')) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i} \rangle$ і $f^{-1}(f(x)) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i} \rangle$ .

Отже,

$$\rho(\varphi, [f]) = \rho(\varphi, \alpha) = \parallel \varphi - \alpha \parallel = \sup_{x \in X} \{|\varphi(x) - \alpha(x)|\} = \sup_{x \in X} \{|\varphi(x) - \xi \circ f(x)|\}.$$

Зауважимо, що функція $\alpha$ стала на елементах сім'ї $\{f^{-1}(f(x)) \mid x \in X\}$.

Розглянемо функцію $\mu\colon X \to \mathbb{R}$, задану формулою $\mu(x) = \min\{\alpha(y) \mid y \in g^{-1}(g(x))\}$. Тоді $\mu \in [g]$. Нехай

$$\begin{aligned}\rho(\alpha, \mu) = \sup_{x \in X} \{|\alpha(x) - \mu(x)|\} = |\alpha(x_0) - \mu(x_0)| = \\ = |\alpha(x_0) - \min\{\alpha(y) \mid y \in g^{-1}(g(x_0))\}| = |\alpha(x_0) - \alpha(y_0)|,\end{aligned}$$

де $x_0$ і $y_0$ — елементи множини $g^{-1}(g(x_0))$. Тоді $g^{-1}(g(x_0)) = g^{-1}(g(y_0)) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots U_{in_i} \rangle$. Отже, знайдеться елемент $x_0' \in X$ такий, що $f^{-1}(f(x_0')) \in$

$\langle U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in_i}\rangle$. Далі $x_0 \in g^{-1}(g(x_0)) \in \langle U_{i1}, U_{i2}, \dots U_{in_i}\rangle$, тобто $x_0 \in U_{ik}$ де $1 \leqslant k \leqslant n_i$, отже, знайдеться елемент $x' \in U_{ik}$ і $x' \in f^{-1}(f(x'_0))$ такий, що $|\alpha(x) - \alpha(x')| < \varepsilon/2$. Міркуючи аналогічно, виберемо $y' \in U_{il}$, де $1 \leqslant l \leqslant n_i$, і $y' \in f^{-1}(f(x'_0))$ такий, що $|\alpha(y) - \alpha(y')| < \varepsilon/2$.

Далі отримаємо:

$$\rho(\alpha, \mu) = |\alpha(x_0) - \alpha(y_0)| = |\alpha(x_0) - \alpha(x') + \alpha(x') - \alpha(y') + \alpha(y') - \alpha(y_0)|$$
$$\leqslant |\alpha(x_0) - \alpha(x')| + |\alpha(x') - \alpha(y')| + |\alpha(y') - \alpha(y_0)| < \varepsilon/2 + 0 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким чином, має місце нерівність $\rho(\varphi, \mu) \leqslant \rho(\varphi, \alpha) + \rho(\alpha, \chi) < \rho(\varphi, [f]) + \varepsilon$, але $\rho(\varphi, [g]) \leqslant \rho(\varphi, \mu)$, отже, отримаємо

$$\rho(\varphi, [g]) - \rho(\varphi, [f]) < \varepsilon.$$

З іншого боку, припустимо, що відстань від елемента $\varphi \in C(X)$ до множини $[g]$ реалізується на деякому елементі $\beta \in [g]$, тоді

$$\rho(\varphi, [g]) = \rho(\varphi, \beta) = \parallel \varphi - \beta \parallel = \sup_{x \in X}\{|\varphi(x) - \theta \circ g(x)|\}.$$

Отже, функція $\beta$ стала на елементах сім'ї $\{g^{-1}(g(x)) \mid x \in X\}$.

Розглянемо функцію $\eta\colon X \to \mathbb{R}$, задану формулою $\eta(x) = \min\{\beta(y) \mid y \in f^{-1}(f(x))\}$. Тобто функція $\eta \in [f]$. Нехай відстань $\rho(\beta, \eta)$ реалізується на деякому елементі $x_0 \in X$, тобто

$$\rho(\beta, \eta) = \sup_{x \in X}\{|\beta(x) - \eta(x)|\} = |\beta(x_0) - \eta(x_0)| =$$
$$= |\beta(x_0) - \min\{\beta(y) \mid y \in g^{-1}(g(x_0))\}| = |\beta(x_0) - \beta(y_0)|,$$

де $x_0$ і $y_0$ — елементи множини $f^{-1}(f(x_0))$. Тоді $f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(f(y_0)) \in \langle U_{j1}, U_{j2}, \dots U_{jn_j}\rangle$. Отже, знайдеться елемент $x'_0 \in X$ такий, що $(g^{-1}(g(x'_0)) \in \langle U_{j1}, U_{j2}, \dots, U_{jn_j}\rangle$. Далі $x_0 \in f^{-1}(f(x_0)) \in \langle U_{j1}, U_{j2}, \dots U_{jn_j}\rangle$, тобто $x_0 \in U_{jk}$ де $1 \leqslant k \leqslant n_j$, отже, знайдеться елемент $x' \in U_{jk}$ і $x' \in (g^{-1}(g(x'_0))$ такий, що $|\beta(x) - \beta(x')| < \varepsilon/2$. Міркуючи аналогічно виберемо $y' \in U_{jl}$ де $1 \leqslant l \leqslant n_j$, і $y' \in (f^{-1}(f(x'_0))$ такий, що $|\beta(y) - \beta(y')| < \varepsilon/2$.

Тоді отримаємо:

$$\rho(\beta, \eta) = |\beta(x_0) - \beta(y_0)| = |\beta(x_0) - \beta(x') + \beta(x') - \beta(y') + \beta(y') - \beta(y_0)|$$
$$\leqslant |\beta(x_0) - \beta(x')| + |\beta(x') - \beta(y')| + |\beta(y') - \beta(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, має місце нерівність $\rho(\varphi, \eta) \leqslant \rho(\varphi, \beta) + \rho(\beta, \eta) < \rho(\varphi, [g]) + \varepsilon$, але $\rho(\varphi, [f]) \leqslant \rho(\varphi, \eta)$, отже, отримаємо

$$\rho(\varphi, [f]) - \rho(\varphi, [g]) < \varepsilon.$$

Отже, $|\rho(\varphi, [f]) - \rho(\varphi, [g])| < \varepsilon$ звідки випливає, що $[g] \in O([f]; \varphi; \varepsilon)$. Тобто $\gamma(O\langle f\rangle) \subset O([f]; \varphi; \varepsilon)$, що означає неперервність відображення

$$\gamma\colon (\Psi(X), \tau_V) \to (\Phi(X), \tau_W).$$

## 5 Зауваження і відкриті питання.

Основний результат статті стосується компактних гаусдорфових просторів. Залишаємо відкритим питання про перенесення його на некомпактний випадок. У зв'язку з цим зауважемо, що паралельно до теорії Є.В.Щепіна топології неметризовних компактів, де виникла конструкція $\Phi(X)$, А.Ч.Чигогідзе [6] розвинув її некомпактний аналог.

Виникає цілий ряд проблем щодо топологічних властивостей простору $\Psi(X)$. Зокрема, невідомо, чи цей простір є топологічно повним.

Сформулюємо також питання про опис топології просторів $\Psi(X)$ для конкретних просторів $X$. Оскільки гіперпростір $\exp X$ нульвимірний для нульвимірного $X$, то нульвимірним є і $\Psi(X)$. Виникає питання, чи зв'язний простір $\Psi([0,1]^n)$, де $n \geqslant 2$?

## References


1. К.Копорх, *Простір фактороб'єктів компактного топологічного простору*// Вісн. Львів. ун-ту. Серія механіко-математична. -2008- вип. 68. стор.152-157
2. Beer G. Topologies on Closed and Closed Convex Sets.- Kluwer, Dordrecht, 1993.
3. Федорчук В.В, Филипов В.В. Общая топология. Основные конструкции.-М.:МГУ.-1988.-252с.
4. Е.В.Щепин, *Функторы и несчетные степени компактов* // Успехи мат. наук.-1981.-т.36,вып.3.стр.3-61
5. Е.В.Щепин, *Топология предельных пространств несчетных обратных спектров*// Успехи мат. наук.-1976.- т.31,вып.5(191).стр.197.
6. А.Ч.Чигогидзе, *Небикомпактные абсолютные экстензоры в размерности и, п-мягкие отображения и их применения* //Изв. АН СССР. Сер.мат.1986. Т.50. С.156-180

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(4) 45–51 $d\omega$

# Розмиті метрики Громова-Гаусдорфа

**Олександр Григорович Савченко**

**Abstract** У класі розмитих метрик побудовано аналог метрики Громова-Гаусдорфа. показано, що клас усіх компактних розмитих метричних просторів у сенсі George і Veeramani (GM-розмитих метричних просторів) є KM-розмитим метричним простором (у сенсі означення, що його навели Kramosil і Michalek).

**Keywords** метрика Громова-Гаусдорфа, розмитий метричний простір

## 1 Вступ

Метрика Громова-Гаусдорфа була вперше запроваджена у статті [1]. Означуючи цю метрику, М. Громов далеко узагальнив метрику Гаусдорфа на гіперпросторі (просторі непорожніх замкнених підмножин). З того часу метрика Громова-Гаусдорфа знайшла широкі застосування у рімановій геометрії та інших областях математики(див., наприклад, [2],[3]). Громов довів два фундаментальні результати, теорему компактності і теорему збіжності, які мають важливе значення для теорії ріманових многовидів. Нагадаємо, що теорема компактності стверджує відносну компактність множини всіх ріманових многовидів з кривиною Річчі $\geq c$ і діаметром $\leq D$.

Для означення метрики Громова-Гаусдорфа нагадаємо, що гіперпростором метричного простору $(X, d)$ називають множину всіх непорожніх компактних підмножин, наділену метрикою Гаусдорфа $d_H$:

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset O_r(B),\ B \subset O_r(A)\}$$

(тут через $O_r(C)$ позначено $r$-окіл множини $C$).

Відстань Громова-Гаусдорфа між компактними метричними просторами $X$ і $Y$ обчислюється за формулою:

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\{d_H(i(X), j(Y)) \mid \\ i\colon X \to Z,\ j\colon Y \to Z \text{ — ізометричні вкладення}\}.$$

Метою цієї статті є знаходження аналога метрики Громова-Гаусдорфа для випадку розмитих метричних просторів. Поняття розмитого метричного простору є далеким узагальненням поняття метричного простору. Воно знаходить свої застосування до теорії обробки зображень та у інших областях.

# 2 Розмита метрика Громова-Гаусдорфа

## 2.1 Розмита метрика Гаусдорфа

Нам знадобиться поняття t-норми. Бінарну операцію $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ називають неперервною t-нормою, якщо $*$ задовольняє такі умови:

(i) $*$ комутативна і асоціативна;
(ii) $*$ неперервна;
(iii) $a * 1 = a$ для всіх $a \in [0,1]$;
(iv) $a * b \le c * d$, якщо $a \le c$ і $b \le d$, і $a,b,c,d \in [0,1]$.

Прикладами t-норм є такі операції:

$$a * b = ab,\ a * b = \min\{a,b\},\ a * b = \max\{a+b-1, 0\}$$

(t-норма Лукасєвича).

У літературі найбільш поширеними є два підходи до означення розмитого метричного простору.

Трійка $(X, M, *)$ називається GV-розмитим метричним простором, якщо $X$ — довільна множина, $*$ — неперервна t-норма і $M$ — розмита множина на $X^2\times(0,\infty)$ (тобто функція $X^2\times(0,\infty)\to[0,1]$), що задовольняє умови для всіх $x,y,z\in X$ і $s,t>0$:

(i) $M(x,y,t) > 0$,
(ii) $M(x,y,t) = 1$ тоді і лише тоді, коли $x = y$,
(iii) $M(x,y,t) = M(y,x,t)$,
(iv) $M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M(x,z,t+s)$,
(v) функція $M(x,y,-)\colon (0,\infty)\to[0,1]$ неперервна.

Це поняття означено в статті [4]. Якщо замість неперервності вимагаємо лише неперервність зліва, то одержуємо поняття КМ-розмитого метричного простору (див. [5]).

Нехай $x \in X$, $r \in (0,1)$ і $t > 0$. Множина $B(x,r,t) = \{y \in X \mid B(x,y,t) > 1-r\}$ називається *кулею радіуса* $r$ *з центром у точці* $x$, *що відповідає* $t$. Множина всіх куль служить базою для (метризовної) топології на $X$ (див. [6]). Надалі у розмитому метричному просторі будемо розглядати лише цю топологію.

Відомо, що кожна метрика $d$ на множині $X$ породжує розмиту метрику $M_d$ на $X$ за формулою:

$$M_d(x,y,t) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+t}.$$

Нехай $B$ — непорожня підмножина розмитого метричного простору $(X, M, *)$. Для кожних $a \in X$ і $t > 0$, нехай

$$M(a,B,t) = \sup\{M(a,b,t) \mid b \in B\}$$

(див. [7, Definition 2.4]).

Нехай $(X, M, *)$ — розмитий метричний простір. Означимо через $\exp X$ сім'ю всіх непорожніх компактних підмножин в просторі $X$. Як і в статті [7], означимо функцію $M_H$ на $\exp X \times \exp X \to (0,\infty)$ формулою:

$$M_H(A,B,t) = \min\left\{\inf_{a\in A} M(a,B,t), \inf_{b\in B} M(A,b,t)\right\}$$

для всіх $A, B \in \exp X$ і $t > 0$. Основний результат (Теорема 1) статті [7] стверджує, що $(M_H, *)$ — розмита метрика на множині $\exp X$ (*розмита метрика Гаусдорфа*). Більше того, ця розмита метрика породжує топологію Вієторіса на гіперпросторі $\exp X$. Нагадаємо, що база топології Вієторіса складається з множин вигляду

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \cup_{i=1}^n U_i,\ A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всіх } i\},$$

де $U_1, \ldots, U_n$ — відкриті в $X$ множини.

Ми використовуємо позначення $M_H$ замість вжитого в статті [7] позначення $H_M$; це пов'язане з тим, що тоді природно позначати розмиті метрики на ітераціях $\exp^2 = \exp\exp$, $\exp^3$, …функтора $\exp$ через $M_{HH}$, $M_{HHH}$,….

## 3 Розмиті метрики Громова-Гаусдорфа

Нехай $(X_i, M_i, *)$, $i = 1, 2$, — розмиті метричні простори. Розмитою відстанню Громова-Гаусдорфа між ними називаємо число

$$M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t) = \sup\{M_H(F_1(X_1), F_2(X_2), t) \mid F_i \colon X_i \to Z \text{ — ізометричні вкладення в розмитий метричний простір } Z\}.$$

Зауважимо, що число $M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t)$ коректно означене, оскільки ізометричні вкладення у спільний розмитий метричний простір існують для кожних двох розмитих метричних просторів — досить взяти їх букет (див. [8]). Покажемо, що $M_{GH}$ — розмита псевдометрика на множині $\mathrm{FM}(X)$ всіх замкнених підпросторів фіксованого розмитого метричного простору $X$.

Симетричність функції $M_{GH}$ випливає безпосередньо з означення.

Покажемо, що виконується умова (iv) з означення розмитого метричного простору. Нехай $(X_i, M_i, *)$, $i = 1, 2, 3$, — розмиті метричні простори такі, що

$$M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t) = a,$$
$$M_{GH}((X_2, M_2, *), (X_3, M_3, *), s) = b.$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Існують розмиті метричні простори $(Z_i, N_i, *)$, $i = 1, 2$, такі, що $Z_1$ ізометрично містить $X_1, X_2$,а $Z_2$ ізометрично містить $X_2, X_3$, причому $M_H(X_1, X_2, t) > a-\varepsilon$, $M_H(X_2, X_3, s) > a-\varepsilon$. Побудуємо розмитий метричний простір $(Y, K, *)$ наступним способом: $Y = (Z_1 \sqcup Z_2)/\sim$, де $\sim$ — відношення еквівалентності, що склеює $x \in X_2 \subset Z_1$ з $x \in X_2 \subset Z_2$; розмита метрика на $Y$ є метрикою, що утворюється склеюванням розмитих метрик $N_1, N_2$: якщо $x \in Z_1 \setminus Z_2$, $y \in Z_2 \setminus Z_1$, то для кожного $\tau \in (0, \infty)$ приймемо:

$$K(x, y, t) = \sup\{N_1(x, z, t_1) * N(z, y, t_2) \mid z \in Z_2,\ t_1 + t_2 = \tau\}$$

(див., наприклад, [8]). Тепер з умови (iv) для гіперпростору $(\exp K, M_H, *)$ випливає, що

$$M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_3, M_3, *), t+s) \geq K_H(X_1, X_3, t+s)$$
$$\geq M_H(X_1, X_2, t) * M_H(X_2, X_3, s) \geq (a-\varepsilon) * (b-\varepsilon)$$

і з неперервності t-норми $*$ випливає шукана нерівність.

Нехай $M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t) = 1$. Тоді для кожного $r \in (0, 1)$ існує розмитий метричний простір $(Z_r, N_r, *)$ і ізометричні вкладення

$F_i \colon X_i \to Z$ такі, що $M_H(F_1(X_1), F_2(X_2), t) > r$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $Z = X_1 \cup X_2$ і відображення $F_i \colon X_i \to Z$, $i = 1, 2$, є включеннями. Означимо відношення $R_r \subset X_1 \times X_2$ умовою:

$$(x_1, x_2) \in R_r \Leftrightarrow N_r(x_1, x_2, t) \geq r.$$

Нескладно показати, що відношення $R_r$ при $r \to 1$ прямують до множини, що є графіком гомеоморфізму між $X$ та $Y$. Більше того, цей гомеоморфізм є ізометрією.

Неперервність зліва одержаної функції

$$t \mapsto M_{GH}((X_1, M_1, *), (X_2, M_2, *), t)$$

випливає з того, що вказана функція є супремумом монотонно зростаючих неперервних функцій.

Ми одержуємо такий результат. Множина всіх класів еквівалентності компактних GV-розмитих метричних просторів є KM-розмитим метричним простором.

Зауважимо, що аналогічно розмиту метрику Громова-Гаусдорфа можна означити на множині усіх непорожніх обмежених розмитих метричних просторів.

Сім'я скінченних розмитих метричних просторів всюди щільна в утвореному метричному просторі.

*Proof* Нехай $(X, M, *)$ — розмитий метричний KM-простір. Для кожного $t > 0$ розглянемо покриття простору $X$ кулями вигляду $B(x, r, t)$, $x \in X$, $r \in (0, 1)$, $t > 0$. Це покриття містить скінченне підпокриття $\{B(x_i, r, t) \mid i = 1, \dots, k\}$. Тоді за побудовою метричний простір $\{x_1, \dots, x_k\}$ лежить в $r$-околі простору $X$ при $t > 0$.

Нагадаємо, що розмитий метричний простір називається стаціонарним, якщо значення розмитої метрики не залежить від змінної $t$. Нескладно довести такий факт. Відстань Громова-Гаусдорфа між стаціонарними метричними просторами не залежить від змінної $t$.

## 4 Пунктована збіжність Громова-Гаусдорфа

Нижче ми розглядаємо модифікацію простору Громова-Гаусдорфа для некомпактних розмитих KM-просторів. Нехай $((X_i, x_i, M_i, *))_{i=1}^{\infty}$ — послідовність пунктованих розмитих KM-просторів. Кажемо, що ця послідовність збігається до пунктованого розмитого метричного простору

$(X, x, M, *)$, якщо для кожного $r \in (0,1)$ послідовність замкнених $r$-куль $(\bar{B}(x_i)_{i=1}^{\infty}$ з індукованою розмитою метрикою збігається у розмитій метриці Громова-Гаусдорфа до замкненої $r$-кулі $\bar{B}(x)$.

Пунктована збіжність Громова-Гаусдорфа дає змогу означити дотичний розмитий метричний простір в точці до заданого розмитого метричного простору.

## 5 Зауваження

Нехай $(X, M, *)$ — розмитий метричний КМ-простір. Позначаємо через $\exp_{GH}(X, M, *)$ множину всіх компактних непорожніх підпросторів у $X$, наділену розмитою метрикою Громова-Гаусдорфа. У [9] доведено, що гіперпростір Громова-Гаусдорфа одиничного відрізка зі стандартною метрикою гомеоморфний гільбертовому кубу. Ми формулюємо гіпотезу про те, що має місце розмитий аналог цього результату.

Зазначимо, що до недавного моменту теорії GV-розмитих метричних просторів та КМ-метричних просторів розвивалися паралельно. При цьому певна перевага надавалася теорії GV-розмитих метричних просторів, оскільки топологія, породжена розмитою GV-метрикою, метризовна. Результати цієї статті показують, що КМ-метричні простори природно виникають у класі GV-розмитих метричних просторів.

Більшість запитань, аналогічних до тих, ро розглядалися у метричній теорії, залишається відкритими. Зокрема, невідомо, чи гіперпростір Громова-Гаусдорфа повний.

Ще одне запитання: нехай послідовність метричних просторів $(X_i, d_i)$ збігається до $(X, d)$ у метриці Громова-Гаусдорфа. Чи збігається $(X_i, M_{d_i}, *)$ до $(X, M_d, *)$ у розмитій метриці Громова-Гаусдорфа?

## References

1. M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 53, pp. 53–73, 1981.
2. Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 512 стр.
3. M. Gromov, M. Katz, P. Pansu, S. Semmes, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, Birkhäuser (2006). 586 p.
4. A. George, P. Veeramani, On some results in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, Volume 64, Issue 3, 1994, 395-399.
5. J. Kramosil, J. Michalek, *Fuzzy metric and statistical metric spaces.* Kybernetica 11, 326-334 (1975)
6. V. Gregori, S. Romaguera, *Some properties of fuzzy metric spaces*, Fuzzy sets and systems, 115(2000), 485-489.
7. J. Rodríguez-López, S. Romaguera, *The Hausdorff fuzzy metric on compact sets*, Fuzzy Sets and Systems, Volume 147, Issue 2, 273–283.

8. О.Г. Савченко, Розмиті метрики на факторпросторі. - Науковий збірник "Прикладні проблеми механіки і математики", Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009, вип. 7, стор. 74-77.
9. S. Antonyan, The Gromov-Hausdorff hyperspace of the unit interval is a Hilbert cube, Spring Topology and Dynamical Systems Conference 2010, Abstracts.

Proc. Intern. Geom. Center 2010 **3**(4) (52-57) $d\omega$

# Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением тензора Эйнштейна

**В. Киосак Е. Чепурная**

**Abstract** В работі вивчаються голоморфно–проективні відображення келерових просторів, що зберігають тензор Ейнштейна. Отримані основні рівняння теорії вказаних відображень. Розв'язок задачі зведено до вивчення системи лінійних диференціальних рівнянь в коваріантних похідних. Дослідження ведуться локально, в тензорній формі, в класі достатньо гладких функцій, без обмежень на знак та сигнатуру метрик просторів, що вивчаються.

## 1 Келеровы пространства

Келеровым пространством $K_n$ $(n = 2N)$ называется четномерное пространство с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, в котором существует комплексная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая следующим соотношениям [1], [3], [5], [7]:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h; \qquad F_{(ij)} = 0; \qquad F_{i,j}^h = 0, \tag{1}$$

где $F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha$, $(i\ j)$ — симметрирование без деления по $i$ и $j$, запятая ‘,‘ — знак ковариантной производной по связности $K_n$, $\delta_i^h$ — символы Кронекера.

Заметим, что келеровы пространства впервые изучались П.А. Широковым, который назвал их А-пространствами. Затем эти пространства исследовались Э. Келером. В литературе, как правило, такие пространства называют келеровыми.

Для удобства введем в $K_n$ операцию сопряжения:

$$A_{\bar{i}\cdots}^{\cdots} \equiv A_{\alpha\cdots}^{\cdots} F_i^\alpha; \qquad B_{\cdots}^{\bar{i}\cdots} \equiv B_{\cdots}^{\alpha\cdots} F_\alpha^i \tag{2}$$

Здесь $A$ и $B$ произвольные тензоры любой валентности.

В силу (1) и (2) имеют место следующие свойства:

$$A_{\bar{\bar{i}}} = -A_i; \qquad B^{\bar{\bar{i}}} = -B^i;$$
$$A_{\bar{\alpha}} B^{\alpha} = A_{\alpha} B^{\bar{\alpha}}; \qquad A_{\bar{\alpha}} B^{\bar{\alpha}} = -A_{\alpha} B^{\alpha}; \tag{3}$$
$$(A_{\bar{i}})_{,\,j} = A_{\bar{i}\,,\,j}; \qquad (B^{\bar{i}})_{,\,j} = B^{\bar{i}}_{\ ,\,j};$$

Метрический тензор и символы Кронекера удовлетворяют соотношениям:

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}; \qquad g_{\bar{i}j} = -g_{i\bar{j}}; \qquad \delta^h_{\bar{i}} = \delta^{\bar{h}}_i = F^h_i; \qquad \delta^{\bar{h}}_{\bar{i}} = -\delta^h_i \tag{4}$$

Тензоры Римана $R^h_{ijk}$ и Риччи $R_{ij}$ обладают дополнительно к известным тождествам, свойствами:

$$R_{\bar{h}\bar{i}jk} = R_{hijk}; \qquad R^{\alpha}_{\bar{\alpha}jk} = 2R_{j\bar{k}}; \qquad R_{\bar{i}\bar{j}} = R_{ij}, \tag{5}$$

где $R_{hijk} = g_{h\alpha} R^{\alpha}_{ijk}$ [4].

В келеровых пространствах $K_n$ определены следующие тензоры:

$$P^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}(\delta^h_{[k} R_{j]i} + \delta^h_{[\bar{k}} R_{\bar{j}]i} + 2\delta^h_{\bar{i}} R_{\bar{j}k}) \tag{6}$$

— тензор голоморфно-проективной кривизны;

$$H^h_{ijk} \equiv R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n+2)}(\delta^h_{[k} g_{j]i} + \delta^h_{[\bar{k}} g_{\bar{j}]i} + 2\delta^h_{\bar{i}} g_{\bar{j}k}) \tag{7}$$

— тензор голоморфно-секционной кривизны $K_n$;

$$\begin{aligned} B^h_{jik} \equiv R^h_{ijk} + (\delta^h_{[j} B_{k]i} + \delta^h_{[\bar{j}} B_{\bar{k}]i} + 2\delta^h_{\bar{i}} B_{\bar{j}k} + \\ + B^h_{[j} g_{k]i} + B^h_{[\bar{j}} g_{\bar{k}]i} + 2B^h_{\bar{i}} g_{\bar{j}k}) \end{aligned} \tag{8}$$

— тензор Бохнера $K_n$, где

$$\begin{aligned} B^h_i &\equiv g^{h\alpha} B_{\alpha i}, \\ B_{ij} &\equiv \frac{1}{n+4}(R_{ij} - \frac{R}{2(n+2)} g_{ij}). \end{aligned} \tag{9}$$

В выше приведенных формулах и в дальнейшем [i, j] обозначает альтернирование без деления, а $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ — скалярная кривизна, $g^{ij}$ — элементы обратной матрицы к $\|g_{ij}\|$.

Для тензора голоморфно-проективной кривизны имеем:

$$P_{hijk} = P_{hi\bar{j}\bar{k}} = P_{\bar{h}\bar{i}jk} = -P_{hikj};$$

$$P_{h(ijk)} = 0; \tag{10}$$

$$P^{\alpha}_{\alpha jk} = P^{\alpha}_{\bar{\alpha}jk} = P^{\alpha}_{jk\alpha} = P^{\alpha}_{jk\bar{\alpha}} = 0;$$

где (i, j, k) - обозначает циклирование по i, j, k. Тензоры голоморфно-секционной кривизны и Бохнера удовлетворяют условиям [9], [10]:

$$\begin{aligned} &H_{hijk} = -H_{ihjk} = H_{jkhi} = H_{\bar{h}\bar{i}jk};\\ &H_{hijk} + H_{hjki} + H_{hkij} = 0;\\ &B_{hijk} = -B_{ihjk} = B_{jkhi} = B_{\bar{h}\bar{i}jk};\\ &B_{hijk} + B_{hjki} + B_{hkij} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

## 2 Основные уравнения голоморфно-проективных отображений келеровых пространств с сохранением тензора Эйнштейна

Аналитически планарной кривой $L$ келерова пространства называется кривая, заданная уравнениями $x^h = x^h(t)$, такая, что выполняются следующие условия:

$$\frac{d\xi^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = \rho_1(t)\xi^h + \rho_2(t)F^h_\alpha\xi^\alpha, \tag{12}$$

где $\xi^h \equiv \frac{dx^h}{dt}$, $\rho_1$, $\rho_2$ - функции аргумента t.

Диффеоморфизм $\gamma$ между точками келеровых пространств $K_n$ и $\bar{K}_n$ называется голоморфно-проективным отображением, если каждая аналитически планарная кривая $K_n$ переходит в аналитически планарную кривую $\bar{K}_n$. Необходимыми и достаточными условиями голоморфно-проективных отображений $K_n$ на $\bar{K}_n$ является выполнение в общей по отображению системе координат условий [1], [6]:

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_{(i}\psi_{j)} - \delta^h_{(\bar{i}}\psi_{\bar{j})},\\ &\bar{F}^h_i = F^h_i, \end{aligned} \tag{13}$$

где по необходимости $\Psi_i \equiv \Psi_{,i}$.

Заметим, что в работах [6], [10] предполагалось априорное сохранение структуры при голоморфно-проективных отображениях. В работе [4] показана необходимость ее сохранения. Голоморфно-проективные отображения $K_n$ на $\bar{K}_n$ называют нетривиальными, если $\psi_i \neq 0$. Случай, когда $\psi_i \equiv 0$, то есть, когда отображение является аффинным, не будем рассматривать. Соотношения (13) эквивалентны уравнениям [3], [4]:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_{(i}\bar{g}_{j)k} + \psi_{(\bar{i}}\bar{g}_{\bar{j})k}, \tag{14}$$

где $\bar{g}_{ij}$ - метрический тензор пространства $\bar{K}_n$. Как известно, из (13) по необходимости следует:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \psi_{ji} - \delta^h_j \psi_{ki} + \delta^h_k \psi_{\bar{j}i} - \delta^h_{\bar{j}} \psi_{\bar{k}i} + 2\delta^h_{\bar{i}} \psi_{\bar{j}k}; \tag{15}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n+2)\psi_{ij}; \tag{16}$$

$$\bar{P}^h_{ijk} = P^h_{ijk}, \tag{17}$$

где $R^h_{ijk}(\bar{R}^h_{ijk})$, $R_{ij}(\bar{R}_{ij})$, $P^h_{ijk}(\bar{P}^h_{ijk})$ - тензоры Римана, Риччи и голоморфно-проективной кривизны $K_n(\bar{K}_n)$

$$\psi_{ij} \equiv \psi_{i,\,j} - \psi_i\psi_j + \psi_{\bar{i}}\psi_{\bar{j}}. \tag{18}$$

По необходимости выполняются соотношения

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} = \psi_{\bar{i}\bar{j}}. \tag{19}$$

С другой стороны, если $K_n$ допускает нетривиальное голоморфно-проективное отображение на $\bar{K}_n$, то в $K_n$ существует решение следующих уравнений:

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{ik} + \lambda_j g_{ik} + \lambda_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} + \lambda_{\bar{j}} g_{\bar{i}k} \tag{20}$$

относительно тензора $a_{ij}$, удовлетворяющего условиям

$$a_{ij} = a_{ji}; \qquad a_{\bar{i}\bar{j}} = a_{ij}, \qquad det a_{ij} \neq 0 \tag{21}$$

и ненулевого вектора $\lambda_i$. Для этого вектора по необходимости выполняются условия:

$$\lambda_{i,\,j} = \lambda_{j,i} = \lambda_{\bar{i},\,\bar{j}}. \tag{22}$$

Решения уравнений (14) и (20) связаны соотношениями:

$$a_{ij} = e^{2\psi}\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta i}; \tag{23}$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi}\bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i}\psi_\beta, \tag{24}$$

где $\left\|\bar{g}^{ij}\right\| = \left\|\bar{g}_{ij}\right\|^{-1}$.

Из (16) для тензоров Эйнштейна келеровых пространств $K_n$ и $\bar{K}_n$, определяемых, как [2]

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}, \tag{25}$$

получим

$$\bar{E}_{ij} - E_{ij} + \frac{\bar{R}}{n}\bar{g}_{ij} = \frac{R}{n} + (n+2)\psi_{ij}. \tag{26}$$

Если при голоморфно-проективных отображениях сохраняется тензор Эйнштейна, то есть

$$\bar{E}_{ij} = E_{ij}, \tag{27}$$

то уравнения (26) принимают вид

$$B\bar{g}_{ij} = Bg_{ij} + \psi_{ij}, \tag{28}$$

где $B = \dfrac{R}{n(n+2)}$.

Подставляя (28) в (15) и группируя с учетом (7) убедимся, что

$$\bar{H}^h_{ijk} = H^h_{ijk}, \tag{29}$$

С другой стороны, если выполняются условия (29), то, сворачивая, получим (27) и, таким образом, доказана теорема:

**Theorem 1** *Для того, чтобы при голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств сохранялся тензор Эйнштейна необходимо и достаточно, чтобы при этом отображении сохранялся тензор голоморфно-проективной кривизны.*

Ковариантно дифференцируя (24), учитывая (23) и (28), получим

$$\lambda_{i\,,\,j} = \mu g_{ij} + Ba_{ij}. \tag{30}$$

Изучая условия интнгрируемости (30), убедимся, что

$$\mu_{,\,i} = 2B\lambda_i. \tag{31}$$

Таким образом, доказана:

**Theorem 2** *Если келерово пространство $K_n$ допускает голоморфно-проективные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то в нем, по необходимости, имеет решение система уравнений* (20), (30), (31) *относительно тензора $a_{ij}$, вектора $\lambda_i$ и инварианта $\mu$.*

Келеровы пространства, в которых вектор $\lambda_i$ удовлетворяет условиям (30) обозначают $K_n(B)$ [4] в них, по необходимости, $B = const$.

Учитывая определение постоянной $B$, убедимся в справедливости следствия:

**Corollary 1** *Если келерово пространство* $K_n$ *допускает нетривиальные голоморфно-проективные отображения с сохранением тензора Эйнштейна, то* $K_n$ *— пространство постоянной скалярной кривизны.*

Таким образом, методы, разработанные в теории диффеоморфизмов римановых пространств, перенесены в теорию голоморфно-проективных отображений келеровых пространств [8].

## References


1. Беклемишев Д. В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой// Итоги науки и техн. Геометрия. 1963, - М.: ВИНИТИ, 1965. — С. 165-212
2. Петров А. 3. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966. — 495 с.
3. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979. — 255 с.
4. Синюков Н. С., Курбатова И. Н., Микеш Й. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств. - Одесса: Одесск. ун-т, 1985. - 69 с.
5. Широков П. А. Избранные работы по геометрии. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966. — 432 с.
6. Couty R. Transformations projectives sur un espace d'Emstem complect// C. R. Acad. Sci. — 1961. — 252, 8. — С. 1096-1097
7. Kahler E. Uber eine bemerkenswerte Hermitische Metrik// Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. — 1933. — 9. — С. 173-186
8. Kiosak V., Mikes J., Chepurna O. Conformal mappings of riemannian spaces which preserve the Einstein tensor//Journal of Applied Math., vol.III, №1, 2010, P. 253–258
9. Mikes J., Kiosak V., Vanzurova A. Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection. Olomouc.:UP.— 2008. — 220p.
10. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces. — Oxford: Pergamon Press, 1965. — 326 с.

**Праці міжнародного геометричного центру**
Том.3, No.4, 2010. Одеса-2010, 58с.

**Труды международного геометрического центра**
Том.3, No.4, 2010. Odessa-2010, 58с.

**Proceedings of the International Geometry Center**
Vol.3, No.4, 2010. Odessa-2010, 58 P.

Засновники (співзасновники):
Благодійний фонд наукових досліджень "Наука",
Одеська національна академія харчових технологій

Зареєстровано Міністерством юстиції України 19.11.2007

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793 Р

Рекомендовано до друку вченою радою одеської національної академії харчових технологій від 3.09.2010 протокол №1.

Адреса редакції: Одеська національна академія харчових технологій,
кафедра вищої математики,
вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net
website: http://www.onaft.edu.ua/?view=journal4


Наклад 300 примірників