ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 2, No. 2, 2009

International Geometry Center

$d\omega$

PROCEEDINGS

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 2, No. 2, 2009

Odessa – 2009

Contents

Samuelson's webs of maximum rank

V. V. Goldberg V. V. Lychagin

Abstract The authors found necessary and sufficient conditions for Samuelson's web to be of maximum rank.

Keywords Samuelson's web · Rank · Maximum rank

Mathematics Subject Classification (2000) 53A60

1 Introduction and Motivations

A planar 3-web W can be defined by three differential 1-forms, say, ω_1, ω_2 and ω_3, where $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, $\omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$ and $\omega_1 \wedge \omega_3 \neq 0$. These forms can be normalized in such a way that $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. They satisfy the following structure equations:

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \gamma, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \gamma, \quad d\gamma = K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

where $\mathcal{K}(W) = d\gamma$ is the *web curvature* 2-*form*, and K is its *scalar curvature*. If $f(x,y)$ is a web function, then (see [2])

$$K = -\frac{1}{f_x f_y}\left(\log\left(\frac{f_x}{f_y}\right)\right)_{xy}.$$

The condition $\mathcal{K}(W) = 0$ is necessary and sufficient for a 3-web to be parallelizable (trivial), i.e., to be equivalent to a 3-web formed by three foliations of parallel lines of an affine plane $\mathbb{A}^2$.

This part of the web theory was used by Gerard Debreu, a Nobel Prize winner in Economics (1983). In [7] Debreu obtained conditions for a preference ordering to be representable by a numerical function. After proving that such a function exists, Debreu in [8] and [9] investigated when it would be additively separable and proved that this question is equivalent to requiring that a planar 3-web given by the level curves of the function, the verticals and the horizontals be equivalent to the trivial 3-web (see a more extensive treatment in [26] and [27]).

This required the satisfaction of the *hexagon condition* [2]. If $\mathcal{K}(W) \neq 0$, then there is an obstruction to triviality of a planar 3-web, i.e., the failure of a hexagon consisting of "threads" of the web to be closed. Russell [18] showed that $\mathcal{K}(W)$ measures the local failure of the hexagon to close (in economic terms, $\mathcal{K}(W)$ is the local failure of the Expected Utility Maximization (EUM) Axioms). As was indicated in [17], this 2-form $\mathcal{K}(W)$ was first identified by Pareto in [16]. The EUM hypothesis with limited experimental data was tested in [6].

Note that Samuelson [22] derived a third-order PDE which is equivalent to the condition $\mathcal{K}(W) = 0$. Economists called this PDE Samuelson's equation. However, in fact this equation is well-known St. Robert equation (see, for example, [1], p. 43).

Another application of the web theory in economics was given by Paul A. Samuelson, a Nobel Prize winner in Economics (1970). Using the web theory terms, we can say that Samuelson asked for an analytic criterium for a certain 2-web to satisfy a certain natural area condition.

In [4] the authors present an overview of this application of the web theory to economics.

If a 2-web is formed by the level sets of two functons $u(x, y) = \text{const}, v(x, y) = \text{const}$, then the area condition is

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \tag{1}$$

where a, b, c, and d are the areas of quadrilaterals bounded by "threads" of the web. We shall call (1) *Samuelson's area condition* (or *S-condition*).

Note that area condition (1) has been used by J. C. Maxwell (see [15]) in his classic work on thermodynamics.

The area condition was studied in detail in [19], [20], [21], [5], and [3].

Hess [12] considered Lagrangian 2-webs under the name of bipolarized symplectic manifolds and introduced a connection which in the planar case measures the failure of the equality $ab = cd$.

For a more detailed discussion of the properties of Hess' connection see [24] and [25].

A bi-Lagrangian manifold is a symplectic manifold endowed with two natural Lagrangian foliations. It was recently investigated in detail in [10]. This manifold admits Hess' connection [12].

In his Nobel lecture [20] Samuelson used the area condition (1) to characterize *profit maximization*. His test for profit maximization is as follows: calculate the areas a, b, c, and d of any four quadrilaterals cut out by the leaves of the demand systems. Then if $ad = bc$, then the firm is maximizing profits.

Tabachnikov has shown in [23] that when the Samuelson area condition is satisfied, the 2-web is trivial under an area preserving transformation. Thus we can calibrate the leaves of the web in such a way that there is unit area between the threads labeled x and $x+1$ and y and $y+1$, for each respective member of the family. In classical thermodynamics this calibration corresponds to the passage from empirical temperature and entropy to absolute temperature and entropy. In economics this recalibration is not possible, so the relevant test for maximization is whether or not the already calibrated 2-web, when trivialized to the horizontal/vertical web, already satisfies the equal area condition.

Tabachnikov [23] gives a further characterization of the profit maximizing condition. If we place the standard area (symplectic) form $\mathbf{dL}_1 \wedge \mathbf{dW}_1$ on $\mathbb{R}^2$, the 2-web of factor demands is a Lagrangian 2-web since all curves on the symplectic plane are Lagrangian submanifolds.

Theorem 0.1 in [23] now applies directly and a symplectic, torsion-free connection (the Hess connection [12]) can be associated with the web. As Tabachnikov shows, when the Samuelson test is satisfied with equality, this connection is flat. This provides an alternative characterization of profit maximizing behavior.

Finally note that if one imposes the standard symplectic form

$$\mathbf{dL}_1 \wedge \mathbf{dW}_1 + \mathbf{dL}_2 \wedge \mathbf{dW}_2$$

on $\mathbb{R}^4$, the 2-dimensional submanifold is a Lagrangian submanifold of $\mathbb{R}^4$. This means that the mapping from $\mathbf{L}_1, \mathbf{W}_1$ to $\mathbf{L}_2, \mathbf{W}_2$ is area preserving and orientation reversing. Since maximizing economic processes take place on Lagrangian submanifolds, economics, too, succumbs to Weinstein's Lagrangian creed. That everything is a Lagrangian submanifold [28].

2 Samuelson's Webs

Let M be a two-dimensional manifold, and let a planar 4-web $< \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 >$ be given on M.

Definition 1 Such a 4-web is said to be the **Samuelson's web**, if the forms $\omega_i, i = 1, 2, 3, 4$, satisfy the following exterior quadratic relation:

$$\omega_3 \wedge \omega_1 + \omega_4 \wedge \omega_2 = 0. \tag{2}$$

In what follows, for brevity we shall call Samuelson's webs *S-webs.*

Consider now the main example of an S-web.

Let $\mathbb{R}^4$ be a four-dimensional symplectic manifold with a structure form $dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2$, and let $M^2 \subset \mathbb{R}^4$ be such a Lagrangian surface on which any pair of the coordinate functions $x_1, x_2, y_1, y_2, x_i, y_j$ is functionally independent. Then the 4-web on this surface defined by the level curves of these functions is an S-web.

Let M be an 2-manifold. In Definition 1 the forms ω_i are defined up to factors λ_i:

$$\omega_i \to \lambda_i \omega_i, \tag{3}$$

which satisfy the following condition:

$$\lambda_3 \lambda_1 = \lambda_4 \lambda_2. \tag{4}$$

Observation (4) allows us to make the following normalization of a 4-web: we can take the factors λ_1, λ_2 and λ_3 in such a way that

$$\omega_3 + \omega_1 + \omega_2 = 0. \tag{5}$$

Under this choice of ω_1, ω_2 and ω_3, taking into account (2), we can prove that the factors λ_i in ω_i in (3) must be equal:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda. \tag{6}$$

By (5), S-condition (2) becomes

$$(\omega_4 + \omega_1) \wedge \omega_2 = 0.$$

It follows that

$$\omega_4 + \omega_1 + b\omega_2 = 0. \tag{7}$$

We shall call the normalization

$$\begin{aligned} &\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \\ &\omega_4 + \omega_1 + b\omega_2 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

canonical.

Let us take

$$\omega_3 = df, \;\; \omega_1 \wedge dx = 0, \;\; \omega_2 \wedge dy = 0.$$

Then the functions x and y can be viewed as coordinates in the plane, and the first equation of (8) gives

$$\omega_3 = df, \;\; \omega_1 = -f_x dx, \;\; \omega_2 = -f_y dy. \tag{9}$$

Let g be another function with $\omega_4 \wedge dg = 0$. Then $\omega_4 = \lambda dg$, and the second equation of (8) gives

$$\lambda dg - f_x dx - f_y dy = 0.$$

Therefore,

$$\lambda g_x = f_x, \;\; \lambda g_y = b f_y,$$

and

$$b = \frac{f_x g_y}{f_y g_x}, \;\; \lambda = \frac{f_x}{g_x}.$$

As a result, we have

$$\omega_4 = \lambda dg = f_x dx + \frac{f_x}{g_x} g_y dy,$$

or

$$\omega_4 = f_x dx + b f_y dy. \tag{10}$$

It is easy to see that by (9) and (10) relation (2) is satisfied:

$$\omega_3 \wedge \omega_1 + \omega_4 \wedge \omega_2 = (f_x dx + f_y dy) \wedge (-f_x dx) + (f_x dx + b f_y dy) \wedge (-f_y dy)$$

$$= f_x f_y dx \wedge dy - f_x f_y dx \wedge dy = 0.$$

3 Structure Equations

As in [11], we denote by γ such 1-form that

$$d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma, \quad i = 1, 2, 3.$$

The form γ defines the Chern connection in the plane. The curvature 2-form of this connection $d\gamma$ is an invariant of the 3-web $< \omega_1, \omega_2, \omega_3 >$.

Moreover, we find that

$$\gamma = H\omega_3, \tag{11}$$

where

$$H = \frac{f_x y}{f_x f_y} \tag{12}$$

and

$$d\gamma = K\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{13}$$

where

$$K = -\frac{1}{f_x} f_y \left(log(\frac{f_x}{f_y}) \right)_{xy} \tag{14}$$

is the *scalar curvature* of the connection (or a 3-web).

Denote by ∂_1 and ∂_2 the basis of vector fields which is dual to the cobasis $\{\omega_1, \omega_2\}$:

$$< \omega_i, \partial_j >= \delta_{ij}, \quad i.j = 1, 2.$$

Then for any function p one has

$$dp = p_1\omega_1 + p_2\omega_2, \tag{15}$$

where $p_1 = \partial_1(p)$ and $p_2 = \partial_2(p)$.

Taking differential of (15), we get

$$\begin{aligned} 0 &= dp_1 \wedge \omega_1 + dp_2 \wedge \omega_2 + p_1\omega_1 \wedge \gamma + p_2\omega_2 \wedge \gamma \\ &= -\partial_2\partial_1(p)\omega_2 \wedge \omega_1 + \partial_1\partial_2(p)\omega_1 \wedge \omega_2 + H(p_1 - p_2)\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

or

$$[\partial_1, \partial_2] = H(\partial_2 - \partial_1). \tag{16}$$

Remark that

$$K = \partial_1(H) - \partial_2(H). \tag{17}$$

In the coordinates (x, y), the vector fields ∂_1 and ∂_2 have the following form:

$$\partial_1 = -\frac{1}{f_x}\partial_x, \quad \partial_2 = -\frac{1}{f_y}\partial_y,$$

and (16) can be verified by direct calculation.

In what follows we shall use the following notation:

$$p_i = \partial_i(p), \;\; p_{ij} = \partial_i\partial_j(p), \;\; \text{etc.}$$

4 Samuelson's Equations

Samuelson's condition (2) means that there are positive factors s_1, s_2, t_1 and t_2 such that the forms $s_1\omega_1, s_2\omega_2, t_1\omega_3$ and $t_2\omega_4$ satisfy (2) and are closed.

These conditions imply the following relations:

$$\begin{cases} d(s_1\omega_1) = d(s_2\omega_2) = d(t_1\omega_3) = d(t_2\omega_4) = 0, \\ s_1 t_1 = s_2 t_2. \end{cases} \tag{18}$$

We derive now an explicit form of Samuelson's equations (18). We have

$$d(s_1\omega_1) = ds_1 \wedge \omega_1 + s_1\omega_1 \wedge \gamma = -s_{1,2}\omega_1 \wedge \omega_2 + Hs_1\omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

It follows that

$$s_{1,2} = Hs_1.$$

Similarly, we have

$$d(s_2\omega_2) = ds_2 \wedge \omega_2 + s_2\omega_2 \wedge \gamma = s_{2,1}\omega_1 \wedge \omega_2 - Hs_2\omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

or

$$s_{2,1} = Hs_2.$$

For the third equation of (18) one has

$$d(t_1\omega_3) = -dt_1 \wedge (\omega_1 + \omega_2) - t_1(\omega_1 + \omega_2) \wedge \gamma = (t_{1,2} - t_{1,1})\omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

or

$$t_{1,2} - t_{1,1} = 0.$$

Similarly, we have

$$d(t_2\omega_4) = -dt_2 \wedge (\omega_1 + b\omega_2) - t_2(d\omega_1 + bd\omega_2 + db \wedge \omega_2)$$

$$= t_{2,2}\omega_1 \wedge \omega_2 - bt_{2,2})\omega_1 \wedge \omega_2 - t_2H\omega_1 \wedge \omega_2 + t_2bH\omega_1 \wedge \omega_2 - t_2b_1\omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

or

$$t_{2,2} - bt_{2,1} - t_2(b_1 - (b-1)H) = 0.$$

Define the new functions σ_i and τ_i, $i = 1, 2$:

$$s_i = \log|\sigma_i|, \quad t_i = \log|\tau_i|. \tag{19}$$

Then the Samuelson equations take the following form:

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = H, \quad \sigma_{2,1} = H, \\ \tau_{1,2} - \tau_{1,1} = 0, \\ b\tau_{2,1} - \tau_{2,2} = (b-1)H - b_1, \end{cases} \tag{20}$$

In addition, the second equation of (18) and (19) imply that

$$\sigma_1 + \tau_1 = \sigma_2 + \tau_2. \tag{21}$$

Taking into account the last equation of (20), representing τ_2 from (21) in the form $\tau_2 = \sigma_1 + \tau_1 - \sigma_2$ and applying (16), we get the final form of Samuelson's equations:

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = H, \quad \sigma_{2,1} = H, \\ \tau_{1,2} - \tau_{1,1} = 0, \\ b\sigma_{1,1} + (b-1)\tau_{1,2} + \sigma_{2,2} = 2bH - b_1. \end{cases} \tag{22}$$

We compute now the first and second prolongations of PDE system (22). For the first equation of (22) we have

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = H, \\ \sigma_{1,12} = H_1, \quad \sigma_{1,22} = H_2, \\ \sigma_{1,112} = H_{11}, \sigma_{1,122} = H_{12}, \sigma_{1,222} = H_{22}. \end{cases} \tag{23}$$

For the second equation of (22) we have

$$\begin{cases} \sigma_{2,1} = H, \\ \sigma_{2,11} = H_1, \quad \sigma_{2,12} = H_2 - H^2 + H\sigma_{2,2}, \\ \sigma_{2,111} = H_{11}, \quad \sigma_{2,112} = H_{12} - 2HH_1 + HH_2 - H^3 + (H^2 + H_1)\sigma_{2,2}, \\ \sigma_{2,122} = 2H\sigma_{2,22} + (H_2 - H^2)\sigma_{2,2} + H_{2,2} - 3HH_2 + H^3. \end{cases} \tag{24}$$

Solving the third equation of (18), we find that

$$\tau_1 = w(f)$$

for some function w.

Remark that by (9), $\partial_i = -1,\ i = 1,2$, and as a result, $\partial_i(w) = -w'$.

Let us rewrite system (18) in the form

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = H, \quad \sigma_{2,1} = H, \\ \tau_{1,2} - \tau_{1,1} = 0, \\ b\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} = B, \end{cases} \tag{25}$$

where

$$B = 2bH - b_1 + (b-1)w'.$$

We shall investigate the solvability of (25) with respect to σ_1 and σ_2.

System (25) is the first-order system of PDE, and its first prolongation has the form

$$\begin{cases} \sigma_{1,12} = H_1, \quad \sigma_{1,22} = H_2, \\ \sigma_{2,11} = H_1, \quad \sigma_{2,21} = H_2, \\ \sigma_{2,11} = R + r\sigma_{1,1}, \\ \sigma_{2,22} = B_2 - bH_1 + bH^2 - (b_1 + bH)\sigma_{1,1}, \end{cases} \tag{26}$$

where

$$R = \frac{b_1 - H_2 + H^2 - HB}{b}, \quad r = H - \frac{b_1}{b}.$$

Note that by (16) the first and the third equations of (26) imply that

$$\sigma_{1,21} = H_1 - H^2 + H\sigma_{1,1}, \quad \sigma_{1,12} = H_2 - H^2 + HB - Hb\sigma_{1,1}. \tag{27}$$

Computing the third derivatives of τ_1 and τ_2, we shall get four relations if we use different ways of finding $\sigma_{1,112}$ and $\sigma_{1,122}$ as well as $\sigma_{2,112}$ and $\sigma_{2,122}$.

Denote PDE system (25) by $\mathfrak{E}_1 \in \mathfrak{J}^1(\pi)$, where $\pi : \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ is the trivial bundle, and denote the first prolongation (26) of (25) by $\mathfrak{E}_1^{(1)} \in \mathfrak{J}^2(\pi)$. Then we get the following tower:

$$\mathbb{R}^2 \overset{\pi}{\leftarrow} \mathfrak{J}^1 \overset{\pi_{1,0}}{\leftarrow} \mathfrak{E}_1 \overset{\pi_{2,1}}{\leftarrow} \mathfrak{E}_1^{(1)}, \tag{28}$$

where the map $\pi_{2,1}$ is the diffeomorphism, and $\pi_{1,0}$ is the one-dimensional bundle with (as we saw) fiberwise coordinate $\sigma_{1,1}$. Therefore, as it follows from [14] and [13], we have the only obstruction for integrability, and this function can be found by different computations of the third derivatives.

In our case two different computations of $\sigma_{1,112}$ give us

$$\sigma_{1,112} = \partial_1(\sigma_{1,12}) = H_{1,1}$$

and

$$\sigma_{1,211} = \partial_2(\sigma_{1,11}) = R_2 + r_2\sigma_{1,11} + r\sigma_{1,21} = R_2 + rH_1 + rH^2 + (r_2 + rH_1)\sigma_{1,1}.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}\sigma_{1,211} &= \sigma_{1,121} + H(\sigma_{1,11} - \sigma_{1,21})\\ &= \sigma_{1,121} + (RH - HH_1 + H^3 + 2H - H^2)\sigma_{1,1}\\ &= \sigma_{1,112} + \partial_1(H(\sigma_{1,11} - \sigma_{1,12})) + (RH - HH_1 + H^3 + 2H - H^2)\sigma_{1,1}\\ &= H_{11} + H^3 - 3HH_1 + 2HR + (H_1 - H^2 + 2H_2)\sigma_{1,1}.\end{aligned}$$

Then the obstruction to the formal integrability of (25) vanishes if and only if the following two conditions are satisfied:

$$R_2 + rH_1 - rH^2 - H_{11} + 3HH_1 - H^3 - 2HR = 0 \tag{29}$$

and

$$r_2 + H^2 - H_1 - rH = 0. \tag{30}$$

Substituting $r = H - \frac{b_1}{b}$ into (30) and applying (17), we find that

$$K = -\delta_2\delta_1 \log b. \tag{31}$$

Definition 1 The rank of the system of equations (29) and (30) is said to be the **rank of Samuelson's web**.

Remark that condition (30) does not contain the function w, and condition (29) can be written in the form

$$T_3w''' + T_2w'' + T_1w + T_0 = 0. \tag{32}$$

Given w, tower (28) shows that we can get a solution space of dimension not exceeding three. In order to get a three-dimensional solution space, we need both conditions (29) and (30). Condition (32) now is a third-order ODE with respect to w. We rewrite (32) in the form

$$w''' + \frac{T_2}{T_3}w'' + \frac{T_1}{T_3}w + \frac{T_0}{T_3} = 0. \tag{33}$$

If the coefficients of (33) depend on f only, we have an extra three-dimensional solution space, and therefore the rank of the Samuelson web equals six. Otherwise, the rank of the Samuelson web is less than six.

Keeping in mind that our second condition (30) has the form (31), we have the following theorem:

Theorem 1 *A Samuelson web has the maximum rank six if and only if the following conditions hold:*

$$\begin{cases} K = -\delta_2\delta_1 \log b, \\ \delta\left(\dfrac{T_2}{T_3}\right) = \delta\left(\dfrac{T_1}{T_3}\right) = \delta\left(\dfrac{T_0}{T_3}\right) = 0, \end{cases}$$

where $\delta = \partial_1 - \partial_2$.

References

1. Akivis, M. A., Shelekhov, A. M.: Geometry and algebra of multidimensional three-webs, translated from the Russian by V. V. Goldberg, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, xvii+358 pp. (1992). MR1196908 (93k:53021); Zbl 771:53001
2. Blaschke, W.: Einführung in die Geometrie der Waben, Birkhäuser-Verlag, Basel-Stutgart, 108 pp. (1955). MR0075630 (**17**, p. 780); Zbl **68**, p. 365
3. Cooper, J. B., Russell, T.: The surprising ubiquity of the Samuelson configuration, in M. Szenberg, L. Ramrattan, and A. A. Gottesman, eds., Samuelsonian Economics and the Twenty First Century, pp. 311–329 (2006).
4. Cooper, J. B., Russell, T.: On Samuelson submanifolds in four-space, in Geometry, topology and their applications, Proceedings of the Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine **6**, no. 2, 264–275 (2009).
5. Cooper, J. B., Russell, T., Samuelson, P. A.: Characterizing an area condition associated with minimizing systems, in Economic Theory Dynamics ans Markets: Essays in Honor of R. Sato, Edited by T. Negishi, R. Ramachandrar and K. Mino, pp. 391–403, Kluwer Acad. Publ., Boston (2001).
6. Cooper, J. B., Russell, T., Samuelson, P. A.: Testing the expected utility maximization hypothesis with limited experimental data, Japan and the World Economy **16**, no. 3, 391–407 (2004).
7. Debreu, G.: Representation of a preference ordering by a numerical function, in R. M. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis, eds., Decision Processes, John Wiley and Sons, New York, pp. 159–165 (1954). Zbl 103:13006
8. Debreu, G.: Cardinal utility for even-chance mixtures of pairs of sure prospects, Review of Economic Studies **71**, 174–177 (1959).
9. Debreu, G.: Topological methods in cardinal utility theory, in Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University Press, Stanford, CA, pp. 16–26 (1960). (MR **22** #11978; Zbl 249:90005); see also in Debreu, G., Mathematical Economics. Twenty Papers of Debreu, pp. 120-132; Econometric Society Monographs in Pure Theory, vol. 4. Cambridge University Press, Cambridge, xii+250 pp. (1983). MR0709766 (84g:90004); Zbl 526:90003

10. Etayo, F., Santamaria, R., Trias, U. R.: The geometry of a bi-Lagrangian manifold, Differ. Geom. Appl. **24**, no. 1, 33–59 (2006). MR2193747 (2006j:53112); Zbl 1101:53047
11. Goldberg, V. V., Lychagin, V. V.: On the Blaschke conjecture for 3-webs, J. Geom. Anal. **16**, no. 1, 69–115 (2006). MR2211333 (2007b:53026); Zbl 1104:53011
12. Hess, H.: Connections on symplectic manifolds and geometric quantization, in Differential geometrical methods in mathematical physics, Proc. Conf. Aix-en-Provence and Salamanca 1979, Lect. Notes Math. **836**, 153–166 (1980). MR0607691 (82j:58056); Zbl 464:58012
13. Kruglikov, B., Lychagin, V.: Geometry of differential equations, in Handbook of global analysis, 725–771, 1214, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam (2008). MR2389645 (2009e:58050)
14. Lychagin, V. V.: Geometric theory of singularities of solutions of nonlinear differential equations, (Russian) Itogi Nauki i Tekhniki, Problems in geometry, Vol. 20 (Russian), 207–247, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow (1988); English translation in J. Soviet Math. **51**, no. 6, 2735–2757 (1990). MR0966202 (89k:58265)
15. Maxwell, J. C.: A treatise on electricity and magnetism, Reprint of the third (1891) edition. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1998), Vol. 1, xxxii+521 pp. MR1673643 (99k:01087a); Zbl 1049:01021; Vol. 2, xxiv+507 pp. MR1669161 (99k:01087b); Zbl 1049:01022
16. Pareto, V.: Ophelemity in non-closed cycles, translated in Chipman, J. S. et al. (Eds.), Preferences, Utility and Demand, Harcourt Brace, pp. 370–385 (1971). Zbl 277:90024
17. Russell, T.: How quasi rational are you?: A behavioral interpretation of a two form which measures non-integrability of a system of demand equations, Economics Letters **56**, no. 2, 181–186 (1997). MR1601475 (90A05 (90D35)); Zbl 896:90062
18. Russell, T.: How quasi rational are you II? Chern curvature measures violation of the expected utility maximization axioms, Economics Letters **81**, no. 3, 379–382 (2003). MR2017012
19. Samuelson, P. A.: Structure of a minimum system, Essays in Economics and Econometrics, in Prouts, P.F. (Ed.), Hotelling Festschrift, The U.N.C. Press, Chapell Hill, NC, pp. 1–33 (1960). MR0124454 (**23** #A1766); reprinted in J. E. Stiglitz, ed., *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, MIT Press, Cambridge, MA, pp. 651–686 (1966).
20. Samuelson, P. A.: Maximum principles in analytical economics, American Economic Review 1972, no. 3, 249–262 (1972).
21. Samuelson, P. A.: Rigorous observational positivism: Klein's envelope aggregation, thermodynamics and economic isomorphisms, in F. C. Adams, B. C. Hickman, eds, Global Econometric: Essays in Honor of Lawrence B. Klein, MIT Press, Cambridge, MA (1983).
22. Samuelson, P. A.: A basic partial differential equation to test the non-intospectively expected (utility) hypothesis, Mimeo (2002).
23. Tabachnikov, S.: Geometry of Lagrangian and Legendrian 2-webs, Differ. Geom. Appl. **3**, no. 3, 265–284 (1993). MR 94j:53023; Zbl 789:53019
24. Vaisman, I.: Symplectic curvature tensors, Monatsh. Math. **100**, no. 4, 299–327 (1985). MR0814206 (87d:53077); Zbl 571:53025
25. Vaisman, I.: Basics of Lagrangian foliations, Publ. Mat. Barc. **33** no. 3, 559–575 (1989). MR1038491 (91b:58080); Zbl 705:58039
26. Vind, K.: Independence, Additivity and Uncertainty, Studies in Economic Theory **14**, Springer, Berlin, xiv+277 pp. (2002). Zbl 1080:91001
27. Wakker, P.: Additive representations of preferences. A new foundation of decision analysis, Theory and Decision Library. Series C: Game Theory, Mathematical Programming and Operations Research. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht x+193 pp. (1989). MR0980482 (90a:90010); Zbl 668:90001
28. Weinstein A.: Symplectic geometry, Bull. Am. Math. Soc. **5**, 1–13 (1981). MR0614310 (83a:58044); Zbl 465:58013

V. V. Goldberg
New Jersey Institute of Technology, Newark, NJ, USA.
E-mail: vladislav.goldberg@gmail.com

V. V. Lychagin
Tromsoe University, Tromsoe, Norway and the Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia.
E-mail: lychagin@yahoo.com

Линейчатые поверхности как псевдосферические конгруэнции

В. А. Горькавый Е. Н. Невмержицкая

Представлено А. Д. Милкой

Аннотация Рассматриваются двумерные линейчатые поверхности в пространствах постоянной кривизны с точки зрения теории псевдосферических конгруэнций. Доказано, что линейчатые поверхности нулевой гауссовой кривизны в сферическом пространстве и только такие линейчатые поверхности представляют собой псевдосферические конгруэнции.

Ключевые слова Псевдосферические конгруэнции · Линейчатые поверхности

УДК 514

1 Введение

В статье рассматриваются линейчатые поверхности в пространствах постоянной кривизны с точки зрения теории псевдосферических конгруенций и преобразований Беклунда-Бьянки псевдосферических поверхностей.

Следуя стандартному подходу, *псевдосферической конгруэнцией* в пространстве M^n_k постоянной секционной кривизны k называется регулярное отображение $\varphi : F^2 \mapsto \tilde{F}^2$ двумерных поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в M^n_k, обладающее следующими тремя свойствами (ср. [1,2]):

C_1) для любой точки P поверхности F^2 геодезическая γ объемлющего пространства M^n_k, соединяющая точку P с ее образом $\varphi(P) = \tilde{P}$, касается поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$; иначе говоря, касательные векторы геодезической γ в точках P и $\tilde{P}$ лежат в касательных плоскостях поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ соответственно: $\dot{\gamma}_P \in T_P F^2$ и $\dot{\gamma}_{\tilde{P}} \in T_{\tilde{P}} \tilde{F}^2$;

C_2) длина отрезка геодезической γ от точки P до точки $\tilde{P}$ является величиной постоянной, $l\,(\gamma) \equiv l_0 > 0$;

C_3) угол между касательными плоскостями поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в точках P и $\tilde{P}$ является величиной постоянной, $\angle(T_p F^2, T_{\tilde{p}} \tilde{F}^2) \equiv \omega_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Описанная конструкция соответствует классическому понятию псевдосферической конгруэнции для двумерных поверхностей в трехмерных пространствах постоянной кривизны, которое подробно изучалось в работах Бьянки, Беклунда, Дарбу.

Одним из основных результатов классической теории является следующее утверждение: *поверхности в M_k^3, связанные псевдосферической конгруэнцией, являются псевдосферическими, т.е. имеют постоянную отрицательную внешнюю кривизну.* Более того, *для каждой заданной псевдосферической поверхности в M_k^3 можно построить двупараметрическое семейство различных псевдосферических конгруэнций* [1,2].

Сформулированные наблюдения позволили создать содержательную теорию преобразований Бьянки-Беклунда псевдосферических поверхностей в M_k^3 как в рамках теории поверхностей, так и с точки зрения аналитической теории интегрируемых систем.

Классическая теория псевдосферических конгруэнций и преобразований Бьянки-Беклунда успешно обобщалась в работах Ю.А. Аминова, К. Тенеблат, Ч.-Л. Тернг, Л.А. Масальцева на случай n-мерных подмногообразий в $(2n-1)$-мерных пространствах постоянной кривизны [1,2]. В настоящее время актуальным является вопрос о построении аналогичной теории для подмногообразий в пространствах постоянной кривизны при произвольных значениях размерностей, например — для двумерных поверхностей в n-мерных пространствах постоянной кривизны при $n \geq 4$.

Первые результаты в этом направлении были получены в работах Ю.А. Аминова и А. Сыма [3], а затем эти вопросы изучались и в работах В.А. Горькавого [4-6]. В частности, было установлено, что если пара двумерных поверхностей в n-мерном пространстве постоянной кривизны M_k^n, $n \geq 4$, связаны псевдосферической конруэнцией, и при этом хотя бы одна из поверхностей является картановой, т.е. несет однозначно определенную сеть сопряженных линий, то тогда обе поверхности являются псевдосферическими. С другой стороны, в отличии от классического случая, уже не любая псевдосферическая поверхность в M^n_k, $n \geq 4$, допускает псевдосферическую конгруэнцию.

Отметим, что в классической теории имеется более общее понятие *геодезической конгруэнции*, которая определяется как отображение поверхностей, удовлетворяющее только требованию C_1 — условию двойного касания [2]. Кроме того, понятие геодезической конгруэнции часто определялось не как отображение, а как семейство геодезических линий в пространстве M^n_k, а поверхности F^2 и $\tilde{F}^2$ рассматривались как *фокальные поверхности* конгруэнции. С этой точки зрения естественно рассматривать линейчатые поверхности в M^n_k.

Действительно, рассмотрим двумерную ориентированную линейчатую поверхность F^2 в пространстве M^n_k. Зададим на поверхности F^2 некоторую функцию l и рассмотрим отображение $\Phi_l \colon F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на заданное расстояние l.

Легко видеть, что такое отображение удовлетворяет требованию двойного касания. Можно ли добиться выполнения и других требований — о постоянстве расстояния (C_2) и угла (C_3)? Иначе говоря, какие линейчатые поверхности обладают следующим свойством: если каждую точку поверхности сдвинуть вдоль соответствующей образующей на постоянное расстояние l_0, то касательная плоскость поверхности повернется на постоянный угол ω_0?

В нижеследующих разделах мы отдельно рассматриваем двумерные линейчатые поверхности в евклидовом пространстве, в сфере и в пространстве Лобачевского. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1) в евклидовом пространстве E^n и в пространстве Лобачевского H^n линейчатые поверхности не могут представлять собой псевдосферические конгруэнции (Теоремы 1, 3);

2) в сферическом пространстве S^n_R линейчатые поверхности с нулевой гауссовой кривизной, и только такие линейчатые поверхности, могут представлять собой псевдосферическую конгруэнцию, при

этом параметры l_0 и ω_0 связаны между собой соотношением $\cos^2 \frac{l_0}{R} = \cos^2 \omega_0$ (Теорема 2).

Заметим, что внутренне плоские поверхности в S^n_R являются псевдосферическими, их внешняя кривизна постоянна и отрицательна.

Если бы в требовании C_3 из определения псевдосферической конгруэнции мы допустили возможность того, что ω_0 может быть равной нулю, то тогда в пространствах E^n, H^n и S^n дополнительно выделились бы линейчатые поверхности с нулевой внешней кривизной, у которых касательная плоскость стационарна вдоль образующих.

Поскольку картановы поверхности в M^n_k, $n \geq 4$, не являются линейчатыми, доказанные утверждения можно рассматривать как дополнение результатов о картановых поверхностях из [4,6].

2 Линейчатые поверхности в евклидовом пространстве

Рассмотрим линейчатую поверхность F^2 в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Радиус-вектор линейчатой поверхности можно представить локально в виде

$$r(u,v) = r_0(v) + ua(v), \tag{1}$$

здесь вектор-функция $r_0(v)$ представляет собой радиус-вектор направляющей базовой кривой, а $a(v)$ — единичное направляющее векторное поле прямолинейных образующих линейчатой поверхности F^2. Не уменьшая общности будем предполагать, что базовая кривая на поверхности F^2 ортогональна прямолинейным образующим:

$$\langle r_0', a \rangle = 0. \tag{2}$$

Также будем предполагать, не уменьшая общности, что параметр v на базовой кривой выбран натуральным, т.е. $|r_0'| \equiv 1$. В этом случае метрика на F^2 будет иметь вид $ds^2 = du^2 + g_{22}dv^2$, система координат u, v является полугеодезической, координата u является натуральным параметром на каждой из прямолинейных образующих $v = \mathrm{const}$.

Легко проверить, что имеет место следующее

Предложение 1 *Линейчатая поверхность F^2 в E^n имеет постоянную гауссову кривизну тогда и только тогда, когда эта поверхность внутренне плоская, т.е. $K \equiv 0$.*

Линейчатая поверхность F^2 *в* E^n *с радиус-вектором* $r(u,v) = r_0(v) + ua(v)$*, удовлетворяющим условиям* $|a| = |r_0'| \equiv 1$ *и* $\langle r_0', a\rangle = 0$*, имеет нулевую гауссову кривизну тогда и только тогда, когда* $[r_0', a'] = 0$.

Может ли линейчатая поверхность F^2 представлять собой псевдосферическую конгруэнцию? Для ответа на этот вопрос, зафиксируем положительную константу l_0 и и рассмотрим отображение

$$\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2,$$

при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку прямолинейной образующей на заданное расстояние l_0. Отображение Φ_{l_0} представляется радиус-вектором

$$\tilde{r} = r + l_0 a = r_0 + (u + l_0)a. \tag{3}$$

Рассматриваемое отображение удовлетворяет требованиям C_1, C_2 из определения псевдосферической конгруэнции. Проверим возможность выполнения требования C_3. Для этого возьмем произвольную точку P на F^2 и вычислим угол ω между касательными плоскостями поверхности F^2 в точках P и $\tilde{P} = \Phi_{l_0}(P)$.

Напомним, что для пары двумерных подпространств в n-мерном евклидовом пространстве выделяются две угловые величины, характеризующие взаимное расположение подпространств. В случае, когда подпространства пересекаются по прямой линии, один из углов равен нулю, а второй угол определяется как угол между прямыми в подпространствах, ортогональными к прямой пересечения.

Именно такой случай имеет место в рассматриваемой ситуации: касательные плоскости $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ имеют общую прямую — прямолинейную образующую поверхности F^2, проходящую через точки P и $\tilde{P}$.

Касательная плоскость $T_P F^2$ натянута на векторы

$$r_u = (r_0(v) + ua(v))'_u = a, \tag{4}$$

$$r_v = r_0' + ua'. \tag{5}$$

Касательная плоскость $T_{\tilde{P}} F^2$ натянута на векторы

$$\tilde{r}_u = r_u + (l_0 a)_u = a, \tag{6}$$

$$\tilde{r}_v = r_v + (l_0 a)_v = r_0' + ua' + l_0 a' = r_0' + a'(u + l_0). \tag{7}$$

Отметим, что a ортогонален r_v и $\tilde{r}_v$ благодаря сделанному выбору координат.

Прямая $P\tilde{P}$ с направляющим вектором a принадлежит и $T_P F^2$, и $T_{\tilde{P}} F^2$. Поэтому угол ω между $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ определяется углом между векторами $z \in T_P F^2$ и $\tilde{z} \in T_{\tilde{P}} F^2$, ортогональными к a: угол ω будет постоянным, т.е. $\omega \equiv \omega_0$, тогда и только тогда, когда, когда выполнено равенство

$$\langle z, \tilde{z} \rangle^2 = |z|^2 \, |\tilde{z}|^2 \cos^2 \omega_0. \tag{8}$$

В качестве z и $\tilde{z}$ мы можем взять r_v и $\tilde{r}_v$ соответственно. Тогда, принимая во внимание (5) и (7), условие (8) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(1 + A(2u + l_0) + u(u + l_0)B)^2 = \\ &= (1 + 2uA + u^2 B)(1 + 2Au + 2l_0 A + Bu^2 + 2Bl_0 + Bl_0^2) \cos^2 \omega_0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $A(v) = \langle r_0', a' \rangle$, $B(v) = \langle a', a' \rangle$. Приводя подобные слагаемые и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях u в левой и правой частях (9), получаем систему из пяти соотношений:

$$1 + 2Al_0 + A^2 l_0^2 = (1 + 2Al_0 + Bl_0^2) \cos^2 \omega_0, \tag{10}$$

$$4A + 4A^2 l_0 + 2Bl_0 + 2ABl_0^2 = (4A + 4A^2 l_0 + 2Bl_0 + 2ABl_0^2) \cos^2 \omega_0, \tag{11}$$

$$4A^2 + 2B + 6ABl_0 + B^2 l_0^2 = (4A^2 + 2B + 6ABl_0 + B^2 l_0^2) \cos^2 \omega_0, \tag{12}$$

$$4AB + 2B^2 l_0 = (4AB + 2B^2 l_0) \cos^2 \omega_0, \tag{13}$$

$$B^2 = B^2 \cos^2 \omega_0. \tag{14}$$

Если $\cos^2 \omega_0 \neq 1$, то $B = 0$ в виду (14). Тогда (12) примет вид $4A^2 = 4A^2 \cos^2 \omega_0$, откуда вытекает, что $A = 0$. Как следствие, (10) запишется в виде $1 = \cos^2 \omega_0$, что противоречит условию $\omega_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Отметим, что если $\cos^2 \omega_0 = 1$, то все соотношения, за исключением (10), будут выполнены, а (10) перепишется в виде $A^2 = B$, т.е. $\langle r_0', a' \rangle^2 = \langle a', a' \rangle$. Легко проверить, что данное равенство будет выполнено тогда и только тогда, когда $[r_0', a'] = 0$. А это условие в точности характеризует линейчатые поверхности в E^n, гауссова кривизна которых равна нулю. Таким образом, доказана

Предложение 2 *Пусть F^2 — регулярная линейчатая поверхность в E^n. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ — регулярное отображение, при котором* *каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 > 0$. Предположим, что при таком отображении касательная плоскость поверхности F^2 поворачивается на некоторый постоянный угол ω_0. Тогда $\omega_0 = 0$, а поверхность F^2 имеет нулевую гауссову кривизну.*

Имеет место и обратное утверждение.

Предложение 3 *Пусть F^2 — линейчатая поверхность с нулевой гауссовой кривизной в E^n. Касательная плоскость поверхности F^2 стационарна вдоль образующих.*

Действительно, рассмотрим равенство (9), или эквивалентную ему систему (10)–(14), с произвольным переменным l_0. Если предположить, что гауссова кривизна равна нулю, то $B = A^2$ — подставляя в систему (10)–(14), получим, что $\cos^2 \omega_0$ обязан быть равным 1, т.е. $\omega_0 = 0$, что и требовалось доказать. В качестве простейших примеров, иллюстрирующих полученный результат, можно рассмотреть цилиндрические или конические поверхности в E^n — касательные плоскости таких линейчатых поверхностей переносятся параллельно вдоль прямолинейных образующих.

Поскольку в определении псевдосферической конгруэнции параметр ω_0 не может быть нулевым, из Предложения 2 вытекает следующее следствие.

Теорема 1 *Пусть F^2 — регулярная линейчатая поверхность в E^n. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ — регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 > 0$. Тогда отображение Φ_{l_0} не может задавать псевдосферическую конгруэнцию.*

Таким образом, никакая линейчатая поверхность в E^n не может представлять собой псевдосферическую конгруэнцию.

3 Линейчатые поверхности в сферическом пространстве

Рассмотрим ориентированную линейчатую поверхность F^2 в сферическом пространстве S^n_R кривизны $k = \frac{1}{R^2}$. Пространство S^n_R реализуем в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1} как гиперсферу радиуса R с центром в начале координат. Поверхность $F^2 \subset S^n$ также будем рассматривать как поверхность в E^{n+1}. Тогда ее радиус-вектор можно представить в виде

$$r(u,v) = (a(v)\cos(u) + b(v)\sin(u))R, \tag{15}$$

где $a(v)$ и $b(v)$ — это вектор-функции, удовлетворяющие условиям: $|a| = 1$, $|b| = 1$, $\langle a, b\rangle = 0$. При каждом фиксированном v векторы a и b определяют некоторую плоскость E^2_v в E^{n+1}, проходящую через начало координат — это подпространство пересекает сферу S^n_R по большой окружности.

Изменяя параметр v, получаем однопараметрическое семейство больших окружностей, заметающих линейчатую поверхность в S^n_R. Заметим, что “подворачивая” ортонормированный базис a, b в каждом E^2_v, можно добиться того, что

$$\langle a', b\rangle = \langle b', a\rangle = 0. \tag{16}$$

В дальнейшем будем считать, что эти дополнительные условия выполнены.

Благодаря сделанным предположениям, метрика поверхности F^2 будет иметь вид

$$ds^2 = R^2(du^2 + g_{22}dv^2).$$

Система координат (Ru, v) является полугеодезической, координата Ru является натуральным параметром на каждой из геодезических $v = \text{const}$. Учитывая вид метрики, не составляет труда проверить, что имеет место

Предложение 4 *Линейчатая поверхность F^2 в S^n_R имеет постоянную гауссову кривизну тогда и только тогда, когда либо $K \equiv \frac{1}{R^2}$, либо $K \equiv 0$. Линейчатая поверхность F^2 в S^n_R с радиус-вектором $r(u,v) = (a(v)\cos(u) + b(v)\sin(u))R$, удовлетворяющим условиям $|a| = |b| = 1$, $\langle a, b\rangle = 0$ и $\langle a', b\rangle = \langle b', a\rangle = 0$ имеет гауссову кривизну $K \equiv \frac{1}{R^2}$ тогда и только тогда, когда $[a', b'] = 0$, $|a'| + |b'| \neq 0$; при тех же условиях поверхность имеет нулевую гауссову кривизну $K \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $|a'| = |b'|$, $\langle a', b'\rangle = 0$.*

Рассмотрим теперь отображение $\Phi_l : F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей линейчатой поверхности F^2 на заданное расстояние $l(u,v)$. Это отображение представляется в следующем виде:

$$\tilde{r}(u,v) = (a(v)\cos(u+\alpha) + b(v)\sin(u+\alpha))R, \tag{17}$$

где $\alpha = \frac{l}{R}$. Может ли отображение Φ_l представлять собой псевдосферическую конгруэнцию? Требование C_1 очевидно выполнено. Для выполнения C_2 следует положить $l(u,v) \equiv l_0 > 0$, т.е. $\alpha(u,v) \equiv \alpha_0$. Остается проверить, в каких случаях будет выполняться и требование C_3.

Отметим сразу, что если $\alpha_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то каждая точка $P \in F^2$ переходит сама в себя, $\tilde{P} = P$, поэтому требование C_3 будет очевидно выполненным, но при $\omega_0 = 0$. Аналогично, если $\alpha_0 = 2\pi(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, то каждая точка P переходит в диаметрально противоположную точку $\tilde{P}$ на сфере, а значит $\omega_0 = 0$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\alpha_0 \neq \pi k$.

Возьмем произвольную точку $P \in F^2$ и соответствующую ей точку $\tilde{P} \in F^2$. Рассмотрим касательные плоскости $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$. Перенесем $T_P F^2$ параллельно вдоль геодезической γ на сфере S^n, соединяющей точки P и $\tilde{P}$ и являющейся образующей линейчатой поверхности F^2; как результат, получим двумерную плоскость $\widehat{T_P F^2}$ в $T_{\tilde{P}} S^n$.

Поскольку, в силу требования двойного касания C_1, единичные касательные векторы большой окружности γ в точках P и $\tilde{P}$ принадлежат $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ соответственно, а при параллельном переносе $\dot{\gamma}_P$ переходит в $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, то плоскости $\widehat{T_P F^2}$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ в $T_{\tilde{P}} S^n$ пересекаются по прямой η с направляющим вектором $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$.

Вычислим угол ω между $\widehat{T_P F^2}$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ и проанализируем когда этот угол будет постоянным и равным некоторому $\omega_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Для этого рассмотрим прямые $\hat{\zeta} \in \widehat{T_P F^2}$ и $\tilde{\zeta} \in T_{\tilde{P}} F^2$, ортогональные к прямой η — угол между $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$ как раз и будет равен ω. Обозначим $\hat{z}$ и $\tilde{z}$ направляющие векторы прямых $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$.

Поскольку параллельный перенос вдоль большой окружности γ на сфере S^n порождается ортогональным преобразованием в E^{n+1}, сводящимся к повороту в плоскости Π_γ окружности γ и к тождественному отображению в ортогональном дополнении к Π_γ, то легко видеть, что при таком параллельном переносе вектор $\hat{z}$ переносится из точки

$\tilde{P}$ в точку P параллельно как вектор в E^{n+1}. Поэтому для вычисления угла ω вместо $\hat{z}$ мы можем взять вектор $z \in T_P F^2$, ортогональный к $\dot{\gamma}_P$.

Касательная плоскость $T_P F^2$ натянута на векторы

$$r_u = (-a \sin u + b \cos u) R, \tag{18}$$

$$r_v = (a' \cos u + b' \sin u) R. \tag{19}$$

Учитывая ортонормированность a, b, а также равенство (16), видим, что r_v ортогонален к $r_u = R\dot{\gamma}_P$, поэтому можем положить $z = r_v$.

Аналогично, касательная плоскость $T_{\tilde{P}} F^2$ натянута на векторы

$$\tilde{r}_u = (-a \sin(u+\alpha) + b \cos(u+\alpha)) R, \tag{20}$$

$$\tilde{r}_v = (a' \cos(u+\alpha) + b' \sin(u+\alpha)) R. \tag{21}$$

Поскольку $\tilde{r}_v$ ортогонален к $\tilde{r}_u = R\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, можем положить $\tilde{z} = \tilde{r}_v$.

Угол поворота ω будет постоянным, $\omega \equiv \omega_0$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\langle z, \tilde{z}\rangle^2 - |z|^2 \, |\tilde{z}|^2 \cos^2 \omega_0 = 0$. Подставляя выражения для z, $\tilde{z}$ с учетом (19) и (21), получим равенство

$$P_0 + P_1 \cos 2u + P_2 \sin 2u + P_3 \cos 4u + P_4 \sin 4u = 0,$$

где P_i зависят от v, α_0 и ω_0. Это равенство должно выполняться тождественно, поэтому оно распадается в систему из пяти соотношений:

$$\begin{aligned} P_0 =& \frac{1}{8} \sin^2 \omega_0 \left(X^2 + Z^2\right)\left(2\cos^2\alpha + 1\right) + \frac{1}{2} Y^2 \left(1 - \cos^2 \omega_0 \cos 2\alpha\right) + \\ & + \frac{1}{4} XZ \left(2\cos^2\alpha_0 + 2\cos^2\omega_0 \cos^2\alpha_0 - 3\cos^2\omega_0 - 1\right) = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cos\alpha_0 \sin^2\omega_0 (X+Z)\left((X-Z)\cos\alpha_0 + 2Y \sin\alpha\right) = 0, \tag{23}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cos\alpha_0 \sin^2\omega_0 (X+Z)\left(-(X-Z)\sin\alpha_0 + 2Y \cos\alpha\right) = 0, \tag{24}$$

$$P_3 = \frac{1}{8} \sin^2\omega_0 \left(((X-Z)^2 - 4Y^2)\cos 2\alpha_0 + 4(X-Z)Y \sin 2\alpha_0\right) = 0, \tag{25}$$

$$P_4 = \frac{1}{8} \sin^2\omega_0 \left(-((X-Z)^2 - 4Y^2)\sin 2\alpha_0 + 4(X-Z)Y \cos 2\alpha_0\right) = 0, \tag{26}$$

где $X = |a'|^2$, $Y = \langle a', b'\rangle$ и $Z = |b'|^2$.

Из (25)–(26) следует, что либо $\omega_0 = 0$, либо $X = Z$, $Y = 0$. В первом случае (23)–(24) будут выполнены автоматически, а (22) сведется к равенству $(XZ - Y^2)\sin^2\alpha_0 = 0$; поскольку предполагается, что $\alpha_0 \neq \pi k$, получаем $XZ - Y^2 = 0$, т.е. $|a'|^2 |b'|^2 - \langle a', b'\rangle^2 = 0$ — это в точности характеризует линейчатые поверхности в S^n с гауссовой кривизной $K \equiv \frac{1}{R^2}$, т.е. с нулевой внешней кривизной. Во втором случае, при $X = Z$, $Y = 0$, равенства (23)–(24) будут выполнены автоматически, а (22) сведется к

$$\cos^2 \alpha_0 - \cos^2 \omega_0 = 0. \tag{27}$$

Отметим, что условия $X = Z$, $Y = 0$, т.е. $|a'| = |b'|$, $\langle a', b' \rangle = 0$, характеризуют линейчатые поверхности с нулевой гауссовой кривизной в S^n. Таким образом, доказано

Предложение 5 *Пусть F^2 — регулярная линейчатая поверхность в S^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ — регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 \neq R\pi k$.*

Предположим, что при таком отображении касательная плоскость поверхности F^2 поворачивается на некоторый постоянный угол ω_0. Тогда либо $\omega_0 = 0$, а поверхность F^2 имеет гауссову кривизну $K \equiv \frac{1}{R^2}$, либо $\cos^2 \omega_0 = \cos^2 \frac{l_0}{R}$, а поверхность F^2 имеет нулевую гауссову кривизну.

Имеет место и обратное утверждение.

Предложение 6 *1. Пусть F^2 — линейчатая поверхность с нулевой гауссовой кривизной в S^n_R. Пусть $\Phi_l : F^2 \to F^2$ — регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние l_0. Тогда касательная плоскость поверхности F^2 при таком отображении поворачивается на постоянный угол ω_0 такой, что $\cos^2 \omega_0 = \cos^2 \frac{l_0}{R}$.*

2. Пусть F^2 — линейчатая поверхность с гауссовой кривизной $K \equiv \frac{1}{R^2}$ в S^n_R. Касательная плоскость поверхности F^2 стационарна вдоль образующих.

В доказательстве нуждается лишь вторая часть сформулированного результата. Рассмотрим систему (22)–(26) с произвольным переменным α_0. Поскольку $K \equiv \frac{1}{R^2}$ по предположению, то $[a', b'] = 0$ в силу Предложения 4 — это условие можно переписать в виде $XZ - Y^2 = 0$. Если $\omega_0 \neq 0$, то тогда из (25)–(26) получаем, что $X = Z$, $Y = 0$. Вместе с предположением $XZ - Y^2 = 0$ это приводит к тому, что

$X = Z = Y = 0$, т.е. $|a'| = |b'| = 0$, что противоречит регулярности поверхности F^2.

Подводя итог, можем сделать следующее заключение, вытекающее из Предложения 5.

Теорема 2 *Пусть* F^2 *— регулярная линейчатая поверхность в* S^n_R*. Пусть* $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ *— регулярное отображение, при котором каждая точка* $P \in F^2$ *сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности* F^2 *на некоторое постоянное расстояние* l_0*. Отображение* Φ_{l_0} *задает псевдосферическую конгруэнцию с параметрами* l_0*,* ω_0 *тогда и только тогда, когда поверхность* F^2 *имеет нулевую гауссову кривизну и при этом* $\cos^2\omega_0 = \cos^2\frac{l_0}{R}$.

Таким образом, линейчатая поверхность в сферическом пространстве S^n_R представляет собой псевдосферическую конгруэнцию тогда и только тогда, когда эта поверхность является внутренне плоской, т.е. имеет постоянную отрицательную внешнюю кривизну $K_{ext} = -\frac{1}{R^2}$.

В качестве простейшего примера внутренне плоской линейчатой поверхности в сфере можно рассмотреть стандартный тор Клиффорда в S^3. Содержательный обзор результатов о внутренне плоских поверхностях в сфере можно найти в монографии [7].

4 Линейчатые поверхности в пространстве Лобачевского

Рассмотрим, наконец, ориентированные двумерные линейчатые поверхности в пространстве Лобачевского H^n_R кривизны $k = -\frac{1}{R^2}$. Пространство H^n_R реализуем стандартным образом как гиперповерхность в пространстве Минковского M^{n+1}, заданную в декартовых координатах в M^{n+1} уравнением

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = -R^2, \qquad x^0 > 0.$$

Радиус-вектор произвольной линейчатой поверхности F^2 в $H^n_R \subset M^{n+1}$ можно представить в виде

$$r(u,v) = (a(v)\operatorname{ch} u + b(v)\operatorname{sh} u)R, \tag{28}$$

где вектор-функции $a(v)$ и $b(v)$ удовлетворяют условиям $|a|^2 = -1$, $|b|^2 = 1$, $\langle a, b\rangle = 0$. При каждом фиксированном v векторы a и b

определяют некоторую плоскость M_v^2 в M^{n+1}, проходящую через начало координат; это подпространство пересекает гиперповерхность $H_R^n \subset M^{n+1}$ по геодезической. Изменяя параметр v, получаем однопараметрическое семейство геодезических, заметающих линейчатую поверхность в H_R^n. Заметим, что "подворачивая" базис a, b в каждом M_v^2, можно добиться того, что

$$\langle a', b \rangle = \langle b', a \rangle = 0. \tag{29}$$

Будем предполагать, что эти дополнительные условия выполнены.

Благодаря сделанным предположениям, метрика поверхности F^2 будет иметь вид $ds^2 = R^2(du^2 + g_{22}dv^2)$; система координат (Ru, v) является полугеодезической, координата Ru является натуральным параметром на каждой из геодезических $v = \mathrm{const}$. Учитывая вид метрики, не составляет труда проверить, что имеет место

Предложение 7 *Линейчатая поверхность F^2 в H_R^n имеет постоянную гауссову кривизну тогда и только тогда, когда $K \equiv -\frac{1}{R^2}$. Линейчатая поверхность F^2 в H_R^n с радиус-вектором $r(u,v) = (a(v)\operatorname{ch} u + b(v)\operatorname{sh} u)R$, удовлетворяющим условиям $|a|^2 = -|b|^2 = -1$, $\langle a, b\rangle = 0$ и $\langle a', b\rangle = \langle b', a\rangle = 0$ имеет гауссову кривизну $K \equiv -\frac{1}{R^2}$ тогда и только тогда, когда $|\,[a', b']\,| = 0$.*

Рассмотрим теперь отображение $\Phi_l : F^2 \to F^2$, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей линейчатой поверхности F^2 на заданное расстояние $l(u, v)$. Это отображение представляется в следующем виде:

$$\tilde{r}(u,v) = (a(v)\operatorname{ch}(u+\alpha) + b(v)\operatorname{sh}(u+\alpha))R, \tag{30}$$

где $\alpha = \frac{l}{R}$. Выясним, для каких линейчатых поверхностей выполняются условия C_1-C_3 из определения псевдосферической конгруэнции. Очевидно, что условие C_1 выполнено автоматически, а требование C_2 сводится к постоянству функции $\alpha(u,v)$, поэтому положим $\alpha(u,v) \equiv \alpha_0$.

Проанализируем возможность выполнения требования C_3. Возьмем произвольную точку $P \in F^2$ и соответствующую точку $\tilde{P} \in F^2$. Рассмотрим касательные плоскости $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$. Перенесем $T_P F^2$ параллельно вдоль геодезической γ на H^n, соединяющей точки P и $\tilde{P}$ и являющейся образующей линейчатой поверхности F^2; как результат, получим двумерную плоскость $\widehat{T_P F^2}$ в $T_{\tilde{P}} H^n$.

Поскольку, в силу требования двойного касания C_1, единичные касательные векторы большой окружности γ в точках P и $\tilde{P}$ принадлежат $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ соответственно, а при параллельном переносе $\dot{\gamma}_P$ переходит в $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, то плоскости $\widehat{T_P F^2}$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ в $T_{\tilde{P}} S^n$ пересекаются по прямой η с направляющим вектором $\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$.

Вычислим угол ω между $\widehat{T_P F^2}$ и $T_{\tilde{P}} F^2$ и проанализируем когда этот угол будет постоянным и равным некоторому $\omega_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Для этого рассмотрим прямые $\hat{\zeta} \in \widehat{T_P F^2}$ и $\tilde{\zeta} \in T_{\tilde{P}} F^2$, ортогональные к прямой η; угол между $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$ как раз и будет равен ω. Обозначим $\hat{z}$ и $\tilde{z}$ направляющие векторы прямых $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$.

Поскольку параллельный перенос вдоль геодезической γ на гиперповерхности $H^n \subset M^{n+1}$ порождается псевдоортогональным преобразованием в M^{n+1}, сводящимся к псевдоортогональному преообразованию (“повороту”) в плоскости Π_γ геодезической γ и к тождественному отображению в ортогональном дополнении к Π_γ, то легко видеть, что при таком параллельном переносе вектор $\hat{z}$ переносится из точки $\tilde{P}$ в точку P параллельно как вектор в M^{n+1}. Поэтому для вычисления угла ω вместо $\hat{z}$ мы можем взять вектор $z \in T_P F^2$, ортогональный к $\dot{\gamma}_P$.

Касательная плоскость $T_P F^2$ натянута на векторы

$$r_u = (a \operatorname{sh} u + b \operatorname{ch} u) R, \tag{31}$$

$$r_v = (a' \operatorname{ch} u + b' \operatorname{sh} u) R. \tag{32}$$

Учитывая ортонормированность вектор-функций a, b и равенства (29), легко видеть, что r_v ортогонален к $r_u = R\dot{\gamma}_P$, поэтому можем положить $z = r_v$.

Аналогично, касательная плоскость $T_{\tilde{P}} F^2$ натянута на векторы

$$\tilde{r}_u = (a \operatorname{sh}(u+\alpha) + b \operatorname{ch}(u+\alpha)) R, \tag{33}$$

$$\tilde{r}_v = (a' \operatorname{ch}(u+\alpha) + b' \operatorname{sh}(u+\alpha)) R. \tag{34}$$

Поскольку $\tilde{r}_v$ ортогонален к $\tilde{r}_u = R\dot{\gamma}_{\tilde{P}}$, можем положить $\tilde{z} = \tilde{r}_v$.

Угол поворота ω будет постоянным, т.е. $\omega \equiv \omega_0$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\langle z, \tilde{z} \rangle^2 = |z|^2 \, |\tilde{z}|^2 \cos^2 \omega_0$. Подставляя выражения для z, $\tilde{z}$ с учетом (32) и (34), получим равенство

$$\begin{aligned} \Psi = (X \operatorname{ch} u \operatorname{ch}(u+\alpha) + Y\, (\operatorname{sh}(2u+\alpha)) + Z \operatorname{sh} u \operatorname{sh}(u+\alpha))^2 - \\ - \big(X \operatorname{ch}^2 u + 2Y \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u + Z \operatorname{sh}^2 u\big) \cdot \big(X \operatorname{ch}^2(u+\alpha) + \\ + 2Y \operatorname{ch}(u+\alpha) \operatorname{sh}(u+\alpha) + Z \operatorname{sh}^2(u+\alpha)\big) \cos^2 \omega_0 = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

где снова использованы обозначения $X = |a'|^2$, $Y = \langle a', b' \rangle$ и $Z = |b'|^2$. Данное равенство должно выполняться тождественно: по аналогии со сферическим случаем, можем расписать соотношение $\Psi = 0$, например, по степеням e^u, приравнять к нулю коэффициенты, зависящие от v, α_0, ω_0, и затем проанализировать получившиеся уравнения.

Мы применим иной метод. А именно, рассмотрим асимптотику выражения Ψ при $u \to \pm\infty$: вычисляя пределы

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\Psi}{e^{4u}} \quad \text{и} \quad \lim_{u\to-\infty} \frac{\Psi}{e^{-4u}},$$

которые должны быть равны нулю ввиду (35), получаем:

$$e^{2\alpha_0}(2Y + X + Z)\sin^2\omega_0 = 0, \tag{36}$$

$$e^{-2\alpha_0}(-2Y + X + Z)\sin^2\omega_0 = 0. \tag{37}$$

Как следствие, если (35) выполнено, то тогда либо $\omega_0 = 0$, либо $X = -Z$, $Y = 0$. В первом случае, подставляя $\omega_0 = 0$ в (35), получаем

$$(XZ - Y^2)(\operatorname{ch} 2\alpha - 1) = 0.$$

Условие $XZ - Y^2 = 0$, т.е. $|a'|^2|b'|^2 - \langle a', b'\rangle^2 = 0$, эквивалентно условию $|[a', b']| = 0$, характеризующему линейчатые поверхности в H^n_R с гауссовой кривизной $K \equiv -\frac{1}{R^2}$, т.е. с нулевой внешней кривизной.

Во втором варианте, подставляя $Z = -X$, $Y = 0$ в (35), получаем

$$X^2\left(\operatorname{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\omega_0\right) = 0.$$

Поскольку выражение в скобках является положительным при $\alpha_0 > 0$, мы вынуждены положить $X = 0$, следовательно и $Z = 0$, что вместе с $Y = 0$ будет противоречить регулярности поверхности F^2.

Таким образом, доказано

Предложение 8 *Пусть F^2 — регулярная линейчатая поверхность в H^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ — регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 \neq 0$. Предположим, что при таком отображении касательная плоскость поверхности F^2 поворачивается на некоторый постоянный угол ω_0. Тогда $\omega_0 = 0$, а поверхность F^2 имеет гауссову кривизну $K \equiv -\frac{1}{R^2}$.*

Имеет место и обратное утверждение.

Предложение 9 *Пусть F^2 — линейчатая поверхность с гауссовой кривизной $K \equiv -\frac{1}{R^2}$ в H^n_R. Касательная плоскость поверхности F^2 стационарна вдоль образующих.*

Доказательство Для доказательства, рассмотрим равенство (35) при произвольном переменном α_0. Если воспользоваться условием $[a', b'] = 0$, характеризующим линейчатые поверхности в H^n_R с гауссовой кривизной $K \equiv -\frac{1}{R^2}$, и подставить $Y^2 = XZ$ в (35), получаем равенство, которое будет выполнено либо при $\omega_0 = 0$, либо при $Z = -X$, $XZ = 0$. Второй вариант приводит к $X = Z = 0$, следовательно и $Y = 0$, что противоречит регулярности поверхности F^2. Следовательно, $\omega_0 = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Подводя итог, можем сделать следующее заключение, вытекающее из Предложения 8.

Теорема 3 *Пусть F^2 — регулярная линейчатая поверхность в H^n_R. Пусть $\Phi_{l_0} : F^2 \to F^2$ — регулярное отображение, при котором каждая точка $P \in F^2$ сдвигается вдоль проходящей через эту точку образующей поверхности F^2 на некоторое постоянное расстояние $l_0 > 0$. Тогда отображение Φ_{l_0} не может задавать псевдосферическую конгруэнцию.*

Таким образом, никакая линейчатая поверхность в H^n_R не может представлять собой псевдосферическую конгруэнцию.

Замечание 1 *Как было отмечено Ю.А. Аминовым в ходе обсуждения данной статьи, полученные результаты о линейчатых поверхностях остаются верными, если в определении псевдосферической конгруэнции заменить требования о постоянстве расстояния $l \equiv l_0$ и угла $\omega \equiv \mathrm{const}$ более слабым требованием их постоянства вдоль каждой образующей линейчатой поверхности, т.е. условиями $l = l(v)$ и $\omega = \omega(v)$.*

Замечание 2 *Также Ю.А. Аминовым был указан более простой путь доказательства Теоремы 1, основанный на следующем наблюдении: когда точка P на линейчатой поверхности $F^2 \subset E^3$ убегает вдоль соответствующей прямолинейной образующей на бесконечность, то касательная плоскость $T_P F^2$ будет стремиться к некоторому фиксированному предельному положению, [8].*

Это делает невозможным последовательное движение точки P с шагом l_0 вдоль образующей, при котором касательная плоскость T_PF^2 поворачивалась бы на угол $\omega_0 \in (0, \pi/2]$, поскольку при таком движении касательная плоскость не могла бы принять никакого предельного положения.

Список литературы

1. Аминов, Ю.А.: Геометрия подмногообразий. Київ, “Наукова думка”, 2002, 468 стр.
2. Борисенко, А.А.: Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. М., “Экзамен”, 2003, 672 стр.
3. Tenenblat, K.: Transformations of manifolds and applications to differential equations. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, V.93. Longman, 2000, 210 p.
4. Aminov, Yu., Sym, A.: On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4. Mathematical Physics, Analysis, Geometry **3**(1), 75–89 (2000)
5. Gorkavyy, V.: On pseudo-spherical congruencies in E^4. Математическая физика, анализ, геометрия **10** (4), 498–504 (2003)
6. Горькавый, В.А.: Конгруенции Бьянки двумерных поверхностей в E^4. Математический сборник **196** (10), 79–102 (2005)
7. Горькавый, В.А.: О псевдосферических конгруэнциях в пространствах постоянной кривизны. Доповіді НАН України **6**, 13–18 (2008)
8. Рашевский, П.К.: Курс дифференциальной геометрии. М., Гостехиздат, 1956, 420 стр.

В. А. Горькавый

Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, Украина

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Е. Н. Невмержицкая

Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина НАН Украины, Харьков, Украина

E-mail: ennev@ukr.net

V. Gorkavyy, O. Nevmerzhytska

Ruled surfaces as pseudo-spherical congruences

We consider ruled surfaces in constant curvature spaces from the point of view of the pseudo-spherical congruences theory. It is demonstrated that only ruled surfaces with vanishing Gauss curvature in the sphere may represent pseudo-spherical congruences.

Mathematics Subject Classification (2000) 53A07 · 53B25

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(2) 39–74 $d\omega$

Аффинная геометрия прямой

Н. Г. Коновенко

Аннотация Эта работа является продолжением работы [3]. Здесь мы классифицируем действия двумерной разрешимой алгебры Ли и отвечающие им многомерные аффинные геометрические величины. Для данных действий мы находим алгебры дифференциальных инвариантов и указываем их применение к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова Алгебра Ли · Аффинные геометрические величины · Дифференциальные инварианты

УДК 514.7

1 Введение

Аффинная геометрия на прямой состоит в изучении дифференциальных инвариантов двумерной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{a}$, также называемой алгеброй Ли "$ax + b$". Теорема Ли-Бьянки утверждает, что обыкновенное дифференциальное уравнение допускающее достаточно большую разрешимую алгебру Ли симметрий может быть проинтегрировано в квадратурах [5]. Аффинные геометрические величины это такие величины на которых задано действие аффинной алгебры Ли $\mathfrak{a}$, поэтому если дифференциальное уравнение допускает алгебру Ли $\mathfrak{a}$ в качестве симметрий, то решения этого уравнения следует рассматривать как аффинные геометрические величины. Соответственно, дифференциальные инварианты данных геометрических величин приводят к $\mathfrak{a}$-инвариантным дифференциальным уравнениям.

В этой работе, которая является естественным продолжением работы [3], мы классифицируем аффинные геометрические величины во всех размернорстях. Мы даем классификацию действий алгебры Ли $\mathfrak{a}$, а также вычисляем алгебры дифференциальных инвариантов соответствующих геометрических величин.

Указанные выше соответствия между решениями интегрируемых в квадратурах обыкновенных дифференциальных уравнениях и аффинными геометрическими величинами мы иллюстрируем на примере дифференциальных уравнений вида

$$y'' = y' + f(y),$$

часто встречающимся в биологии и нелинейной теории горения. Мы указываем типы аффинных геометрических величин, участвующих в описании двух классов интегрируемых в квадратурах обыкновенных дифференциальных уравнений, найденных в работе [2].

2 Аффинная алгебра Ли "$ax + b$"

Аффинные преобразования прямой $x \mapsto ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$, образуют группу Ли, алгебра Ли $\mathfrak{a}$ которой порождена векторными полями $X = \partial_x$, $Y = x\partial_x$:

$$\mathfrak{a} = \langle \partial_x, x\partial_x \rangle,$$

удовлетворяющими коммутационному соотношению: $[X, Y] = X$.

Алгебра $\mathfrak{a}$ является 2-мерной разрешимой алгеброй Ли. Ее коммутатор $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ одномерен и порожден векторным полем X:

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \langle \partial_x \rangle.$$

Пусть теперь $\mathfrak{a}$ произвольная 2-мерная разрешимая алгебра Ли, имеющая 1-мерный коммутатор

$$\dim[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1,$$

и пусть A — базисный вектор в $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$.

Тогда легко видеть, что базис A, B в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$[A, B] = A. \tag{1}$$

Действительно, если $\langle A, \widetilde{B} \rangle$ — произвольный базис в $\mathfrak{a}$, то

$$[A, \widetilde{B}] = \lambda A,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, поскольку в противном случае $[A, \widetilde{B}] = 0$ и $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$.

Поэтому, положив $B = \frac{1}{\lambda}\widetilde{B}$ мы получаем (1).

Предположим теперь, что задано транзитивное в окрестности точки $p \in \mathbb{R}$ и эффективное действие разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ на прямой, то есть задан гомоморфизм алгебр Ли

$$\rho : \mathfrak{a} \to D(\mathbb{R}),$$

такой, что в образе $\rho(\mathfrak{a})$ найдется векторное поле, не обращающееся в нуль в точке $p \in \mathbb{R}$, и $\ker \rho = 0$.

Иначе говоря, отождествляя алгебру Ли $\mathfrak{a}$ и ее образ $\rho(\mathfrak{a})$, мы можем рассматривать алгебру $\mathfrak{a}$ как подалгебру Ли алгебры векторных полей на прямой.

В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначения мы не делаем различия между элементами алгебры $\mathfrak{a}$ и их образами при гомоморфизме ρ.

Имея в виду описание локальной структуры таких действий, мы в начале покажем, что при транзитивном (в точке p) действии алгебры Ли $\mathfrak{a}$ ее коммутатор $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, также действует транзитивным образом.

Лемма 1 *При транзитивном и эффективном в точке p действии разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ значение векторного поля A, являющегося базисным $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ в точке p отлично от нуля, $A_p \neq 0$.*

Доказательство Допустим противное и пусть $A_p = 0$. Тогда для указанного выше базиса A, B векторное поле B не обращается в ноль $B_p \neq 0$.

Действительно, если $B_p = 0$, то все векторные поля из образа $\rho(\mathfrak{a})$ будучи линейными комбинациями полей A, B обращаются в нуль в этой точке, что противоречит транзитивности действий. Поэтому $B_p \neq 0$.

Согласно теореме о выпрямлении векторных полей [1] найдется такая координата y, $y(p) = 0$, в окрестности точки p, что $B = \partial_y$ в этой окрестности.

Пусть тогда $A = a(y)\partial_y$ в этих координатах. Тогда условие (1) означает, что $-a' = a$. А поскольку $a(0) = 0$, то и функция a тождественно равна нулю. Следовательно, действие алгебры $\mathfrak{a}$ не является эффективным. $\square$

Итак, пусть задано эффективное и транзитивное действие алгебры $\mathfrak{a}$. Тогда, в силу предыдущей леммы, $A_p \neq 0$ и, следовательно, можно выбрать такую локальную координату z, $z(p) = 0$, в которой векторное поле A будет выпрямлено, то есть $A = \partial_z$.

Пусть $B = b(z)\partial_z$, в этих координатах. Тогда условие (1) означает, что $b_z = 1$ или $b(z) = z + \mathrm{const}$.

Заметим, что поля B и $\widetilde{B} = b + cA$, где $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяют соотношению (1), а пары A, B и A, $\widetilde{B}$ являются базисами в $\mathfrak{a}$.

Поэтому векторное поле B можно считать выбранными таким образом, чтобы

$$B = z\partial_z.$$

Суммируя сказанное выше, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1 *Всякое транзитивное и эффективное действие 2-мерной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ на прямой локально эквивалентно аффинному, то есть для каждой точки $p \in \mathbb{R}$ найдется такая окрестность и такая координата x, $x(p) = 0$, что действие имеет вид:*

$$A = \partial_x, \quad B = x\partial_x.$$

Замечание 1 *В действительности эта теорема носит глобальный характер. Если, скажем действие эффективно и транзитивно во всех точках интервала (α, β) и если $A = a(x)\partial_x$ в стандартной системе координат, то $a(x) \neq 0$ на интервале (α, β). Координата y выпрямляющая векторное поле A, является решением дифференциального уравнения:*

$$A(y) = a(x)y'(x) = 1.$$

Поэтому функция

$$y(x) = \int_p^x \frac{1}{a(s)} ds, \quad p \in (\alpha, \beta)$$

является искомой координатой на интервале (α, β).

3 Аффинная структура на прямой

Пусть $\mathfrak{a}$ — аффинная алгебра Ли, действующая на прямой $\mathbb{R}$ стандартным образом:

$$\mathfrak{a} = \langle \partial_x, x\partial_x \rangle, \tag{2}$$

где $X = \partial_x$, $Y = x\partial_x$.

Координату x, в которой действие $\mathfrak{a}$ имеет вид (2) мы называем *аффинной*.

Рассмотрим диффеоморфизм прямой $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, который сохраняет действие (2), то есть

$$\varphi_*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}, \tag{3}$$

где φ_* — дифференциал отображения φ.
Для любого векторного поля $V = f(x)\partial_x$ на прямой и гладкой функции $g(x)$ имеем:

$$\varphi_*(V)(g) = \Big((\varphi^*)^{-1} \circ V \circ \varphi^*\Big)(g) = (\varphi^*)^{-1}\big(V(\varphi^*(g))\big).$$

Пусть

$$\varphi^*(x) = \varphi(x), \quad (\varphi^{-1})^*(x) = \psi(x).$$

Тогда

$$\varphi(\psi(x)) = x, \quad \varphi'(\psi(x)) = \frac{1}{\psi(x)}.$$

Поэтому

$$\varphi_*(V)(g) = (\varphi^*)^{-1}\Big(V\big(g(\varphi(x))\big)\Big) = (\varphi^*)^{-1}\Big(f(x)\varphi'(x)g'(\varphi(x))\Big) =$$

$$= f(\psi(x))\varphi'(\psi(x))g'(x) = f\big(\psi(x)\big)\frac{g'(x)}{\psi'(x)}.$$

Иначе говоря,

$$\varphi_*(V) = \frac{f(\psi(x))}{\psi'(x)}\partial_x. \tag{4}$$

Пусть теперь выполнено условие (3).Так как

$$\varphi_*([v_1, v_2]) = [\varphi_* v_1, \varphi_* v_2],$$

то дифференциал φ_* сохраняет коммутатор алгебры Ли:

$$\varphi_*\big([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\big) = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}].$$

Следовательно, векторное поле X, как базис в $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, переходит при дифференциале φ_* переходит в пропорциональное векторное поле: $\varphi_*(x) = \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Поэтому, в силу соотношения (4), получаем $\psi'(x) = \lambda^{-1}$. Тем самым $\psi(x) = \frac{1}{\lambda}x + \mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$.

Соответственно для векторного поля Y имеем

$$\varphi_*(Y) = \frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\partial_x = (x + \lambda\mu)\partial_x = Y + \lambda\mu X \in \mathfrak{a}.$$

Окончательно получаем следующий результат.

Теорема 2 *Аффинные преобразования прямой и только они сохраняют действие (2), то есть удовлетворяют условию:*

$$\varphi_*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

Следствие 1 *Аффинная координата на прямой определена с точностью до аффинного преобразования.*

4 Геометрические величины над аффинной прямой

Вначале мы опишем однородные расслоения над аффинной прямой, то есть такие расслоения

$$\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

где $\pi : (y_1, \ldots, y_m, x) \mapsto x$, в которое поднято действие алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

Иначе говоря, на пространстве расслоения π заданы такие векторные поля $\overline{X}$, $\overline{Y}$, называемые поднятиями полей $X, Y \in \mathfrak{a}$, что

$$\pi_*(\overline{X}) = X, \quad \pi_*(\overline{Y}) = Y \tag{5}$$

и $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{X}$.

Сечения расслоения π мы называем *аффинными геометрическими* величинами, а число $m = \dim \pi$ — размерностью геометрической величины.

Отметим, что аффинная алгебра Ли $\mathfrak{a}$ действует естественным образом на аффинных геометрических величинах.

Действительно, пусть $A_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — однопараметрическая группа сдвигов вдоль векторного поля X, а $B_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — однопараметрическая группа сдвигов вдоль Y.

Пусть $\overline{A}_t : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ и $\overline{B}_t : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ — их поднятия в расслоение π, то есть $\overline{A}_t$ — однопараметрическая группа сдвигов вдоль $\overline{X}$, а $\overline{B}_t$ — однопараметрическая группа сдвигов вдоль поля $\overline{Y}$.

Тогда из условия (5) следует, что

$$\pi \circ \overline{A}_t = A_t \circ \pi, \qquad \pi \circ \overline{B}_t = B_t \circ \pi.$$

Пусть теперь $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+1}$ — геометрическая величина. Определим геометрическую величину $s^a_t, \quad t \in \mathbb{R}$, как такую величину, что кривая $s_t(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ является образом кривой $s(\mathbb{R})$ и при преобразовании $\overline{A}_{-t}$:

$$\overline{A}_{-t}\big(s^a(\mathbb{R})\big) = s^a_t(\mathbb{R}).$$

Аналогично определим геометрические величины $s^b_t, \quad t \in \mathbb{R}$, так чтобы

$$\overline{B}_{-t}\big(s^b(\mathbb{R})\big) = s^b_t(\mathbb{R}).$$

Сечения s^b_t и s^a_t могут быть определены следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} s^a_t(x) &= \overline{A}_{-t}\big(s(A_t x)\big), \\ s^b_t(x) &= \overline{B}_{-t}\big(s(B_t x)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Определим теперь действие векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}$ на аффинные геометрические величины следующим образом:

$$\begin{aligned} X(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(s^a_t), \\ Y(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(s^b_t). \end{aligned} \tag{7}$$

Иначе говоря,

$$\begin{cases} s^a_t = s + tX(s) + o(t), \\ s^b_t = s + tY(s) + o(t). \end{cases}$$

Из этих формул и из соотношения (5) следует, что действию коммутатора векторных полей на геометрических величинах отвечает коммутатор действий, то есть

$$[X, Y](s) = X(s),$$

и, тем самым, формулы (6), (7) задают действие алгебры Ли $\mathfrak{a}$ на аффинных геометрических величинах.

Приведем выражения для действия алгебры Ли $\mathfrak{a}$ в координатах. Пусть

$$\begin{cases} \overline{X} = \partial_x + \sum_1^n a_i(x,y)\partial_{y_i}, \\ \overline{Y} = x\partial_x + \sum_1^m b_i(x,y)\partial_{y_i}. \end{cases}$$

Тогда,

$$\overline{A}_t : (y, x) \mapsto (y_1 + ta_1(x,y) + o(t), \ldots, y_m + ta_m(x,y) + o(t), x + t)$$

$$\overline{B}_t : (y, x) \mapsto (y_1 + tb_1(x,y) + o(t), \ldots, y_m + tb_m(x,y) + o(t), x \cdot e^t)$$

и если $s : x \mapsto (s_1(x), \ldots, s_m(x))$, то

$$s_t^a : x \mapsto (s_{1t}(x), \ldots, s_{mt}(x)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} s_t^a(x) =& \overline{A}_{-t}\big(s(x+t)\big) = \overline{A}_t\big(s(x) + ts'(x) + o(t)\big) = \\ =& s(x) + ts'(x) - ta\big(x, s(x)\big) + o(t), \end{aligned}$$

или

$$s_{it}^a(x) = s_i(x) + t\big(s_i'(x) - a_i(x, s(x))\big) + o(t).$$

Таким образом,

$$X(s) = s'(x) - a(x, s(x)).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} s_t^b(x) =& \overline{B}_{-t}\big(s(e^t x)\big) = \overline{B}_{-t}\big(s(x) + xts'(x) + \\ & + o(t)\big) = s(x) + xts'(x) - tb\big(x, s(x)\big) + o(t), \end{aligned}$$

или

$$Y(s) = xs'(x) - b(x, s(x)).$$

Группа послойных автоморфизмов расслоения π, то есть диффеоморфизмов $\mathbb{R}^{m+1}$ вида

$$\varphi : (y, x) \mapsto \big(Y(y, x), x\big),$$

естественным образом действует на геометрические величины.

Образ $\varphi(s)$ сечения s при преобразовании φ определяется как

$$\varphi(s)(x) = \varphi\big(s(x)\big).$$

Аналогично, преобразование φ, при помощи преобразовании φ_* действует и на поднятия векторных полей из $\mathfrak{a}$:

$$\varphi : \overline{X} \mapsto \varphi_*(\overline{X}), \qquad \varphi : \overline{Y} \mapsto \varphi_*(\overline{Y}).$$

Мы скажем, что два поднятия $\big(\overline{X}, \overline{Y}\big)$ и $\big(\widetilde{X}, \widetilde{Y}\big)$ (локально) *эквивалентны*, если существует такой (локальный) послойный автоморфизм φ, что

$$\varphi_*\big(\overline{X}\big) = \widetilde{X}, \qquad \varphi_*\big(\overline{Y}\big) = \widetilde{Y}.$$

Имея в виду локальную классификацию поднятий действия аффинной алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (другими словами, локальную классификацию аффинных геометрических величин), заметим, что векторное поле $\overline{X}$ не обращается в нуль при любом поднятии, поскольку его проекция $\pi_*(\overline{X}) = \partial_x$ не обращается в нуль ни в одной точке на прямой.

Поэтому локально мы можем выбрать m функционально независимых первых интегралов, скажем $u^1, \dots, u^m$, векторного поля $\overline{X}$. Тогда, вместе с аффинной координатой x, их можно принять за локальные координаты в $\mathbb{R}^{m+1}$. В этих координатах

$$\overline{X} = \partial_x,$$

поскольку $\overline{X}(u^i) = 0$, $i = 1, \dots, m$, а

$$\overline{Y} = x\partial_x + \sum_1^m a_i(x, u)\partial_{u^i},$$

для некоторых функций $a_1, \dots, a_m$.

Из условия (5) следует, что

$$\partial_x(a_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Поэтому функции $a_i = a_i(u)$ зависят только от первых интегралов $u^1, \dots, u^m$.

Таким образом, в выбранной системе локальных координат, поднятия $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ имеют следующий вид:

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \sum_1^m a_i(u)\partial_{u^i}.$$

Тем самым, поднятие действия аффинной алгебры $\mathfrak{a}$ полностью задается векторным полем на $\mathbb{R}^m$:

$$W = \sum_1^m a_i(u)\partial_{u^i}.$$

Используя теперь тот факт, что над координатами $u^1, \dots, u^m$ можно производить любые замены, мы можем привести векторное поле W к одному из следующих видов:

1) $W \equiv 0$.

Тогда,

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x.$$

Такое поднятие действия алгебры Ли $\mathfrak{a}$ мы называем *тривиальным*.

2) Векторное поле W не обращается в нуль.

Тогда по теореме о выпрямлении ненулевых векторных полей [1], локальные координаты $u^1, \dots, u^m$ можно выбрать таким образом, чтобы
$W = \partial_{u^1}$.

В этом случае, поднятие действия аффинной алгебры будет иметь следующий вид:

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \partial_{u^1}.$$

3) Векторное поле W в точке $u = 0$ обращается в нуль. Тогда, если спектр линейной части W в точке $u = 0$ не имеет резонансов [7,8], то, в силу теоремы Стернберга о линеаризации, локальные координаты $u^1, \dots, u^m$ можно выбрать так, чтобы

$$W = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} u^i \partial_{u^j},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, m$.

В этом случае, поднятие действия $\mathfrak{a}$ имеет следующий вид:

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} u^i \partial_{u^j}.$$

Такие геометрические величины мы называем *линейными аффинными величинами.*

Суммируя сказанное и замечая, что $a_i(u) = \overline{Y}(u^i)$, мы приходим к следующему результату.

Теорема 3 *Пусть* $\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ *— поднятие действия аффинной алгебры Ли* $\mathfrak{a}$ *в расслоение* π*, и пусть* $u^1, \dots, u^m$ *— функционально независимые первые интегралы векторного поля* $\overline{X}$*. Тогда это поднятие локально эквивалентно одному из следующих*

(1) $\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x$*, если*

$$\left(\overline{Y}(u^1)\right)^2 + \cdots + \left(\overline{Y}(u^m)\right)^2 \equiv 0.$$

(2) $\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \partial_{u^1}$*, если*

$$\left(\overline{Y}(u^1)\right)^2 + \cdots + \left(\overline{Y}(u^m)\right)^2 \neq 0$$

в окрестности рассматриваемой точки.

(3) $\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \sum_1^m a_{ij}u^i\partial_{u^j}$, *если*

$$\left(\overline{Y}(u^1)\right)^2 + \cdots + \left(\overline{Y}(u^m)\right)^2 = 0$$

в точке $u = 0$, *а матрица* $\|a_{ij}\|$, *где*

$$\overline{Y}(u^i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}u^j + o(|u|), \quad i = 1, \ldots, m,$$

не имеет резонансов [7].

5 Одномерные аффинные геометрические величины

В случае одномерных геометрических величин, $m = 1$, мы можем дать более детальное их описание.

Однородные расслоения в этом случае имеют вид:

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

где $\pi : (u, x,) \mapsto x$.

Пусть

$$\overline{X} = \partial_x + A(x, u)\partial_u, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + B(x, u)\partial_u$$

— поднятие действия аффинной алгебры.

Тогда соотношение (5)

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{X}$$

эквивалентно следующему дифференциальному уравнению на функции A и B:

$$-A - xA_x - BA_u + B_x + AB_u = 0.$$

Подстановка $B(x, u) = b(x, u) + xA(x, u)$ приводит это дифференциальное уравнение к следующему дифференциальному уравнению:

$$-A_u b + b_x + Ab_u = 0 \tag{8}$$

относительно функций A и b.

Заметим, что последнее уравнение имеет решение $b \equiv 0$, при произвольной функции $A(x, u)$.

В случае, когда $b \neq 0$, уравнение (8) можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{A}{b}\right)_u + \left(\frac{1}{b}\right)_x = 0.$$

Решения последнего уравнения (в односвязной области $\mathbb{R}^2$) имеют вид:

$$\frac{A}{b} = -\varphi_x, \qquad \frac{1}{b} = \varphi_u,$$

для некоторой гладкой функции $\varphi(x, u)$.

Отсюда

$$A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \qquad B = \frac{1}{\varphi_u} - x\frac{\varphi_x}{\varphi_u}.$$

Суммируя эти вычисления, мы приходим к следующему результату.

Теорема 4 *Одномерные геометрические величины на аффинной прямой делятся на два класса, отвечающие следующим представлениям алгебры* $\mathfrak{a}$*:*

Класс 1.

$$\overline{X} = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u, \qquad \overline{Y} = x\overline{X}.$$

Класс 2.

$$\overline{X} = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u, \qquad \overline{Y} = x\overline{X} + \frac{1}{\varphi_u}\partial_u,$$

где $\varphi(x, u)$ *— произвольная гладкая функция, такая что,* $\varphi_u \neq 0$.

Замечание 2 *Функция* $\varphi(x, u)$*, участвующая в формировке этой теоремы, является первым интегралом векторного поля* $\overline{X}$*. Приняв функции* $(\varphi(x, u), x)$ *за локальную систему координат в пространстве расслоения* $\mathbb{R}^2$*, мы получим следующие два класса аффинных действий:*

1) $\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x$

и

2) $\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \partial_u$.

Линейное действие

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$$

мы получим, если выберем функцию $\varphi = \lambda^{-1}\ln|u|$.

6 Нормальные формы действий аффинной группы на одномерных геометрических величинах

В этом разделе мы опишем локальную классификацию одномерных аффинных геометрических величин относительно псевдогруппы локальных точечных преобразований, то есть послойных преобразований вида

$$(x, u) \longmapsto (x, F(x, u)).$$

Прежде всего, вернемся к конструкции п.1.3 и заметим, что векторное поле $\overline{X}$ трансверсально слоям расслоения π, и, следовательно, (локально) имеет первый интеграл $h(x, u)$, где $h_u \neq 0$.

Выбрав локальный диффеоморфизм $(x, u) \longmapsto (x, h(x, u))$ мы переведем поле $\overline{X}$ в векторное поле ∂_x.

Итак, пусть $\overline{X} = \partial_x$. Тогда из уравнения (8) следует, что $b_x = 0$, и поэтому представление аффинной алгебры имеет вид:

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + b(u)\partial_u. \tag{9}$$

Отметим также, что послойные преобразования, переводящие первые интегралы $\overline{X}$ в первые интегралы $\overline{X}$, имеют вид: $(x, u) \longmapsto (x, F(u))$. Поэтому локальное описание представлений вида (9) эквивалентно локальной классификации векторных полей $b(u)\partial_u$ относительно локальных диффеоморфизмов $u \longmapsto F(u)$.

Как хорошо известно [8], каждое такое ненулевое векторное поле локально (например, в окрестности точки $u = 0$) может быть приведено к одной из следующих нормальных форм:

1) ∂_u,если $b(0) \neq 0$.
2) $\lambda u\partial_u$, если $b(0) = 0, \qquad b'(0) = \lambda \neq 0$.
3) $u^{2k}\partial_u$, если $b(0) = b'(0) = \ldots = b^{(2k-1)}(0) = 0$, но $b^{(2k)}(0) \neq 0$.
4) $u^{2k+1}\partial_u$ или $-u^{2k+1}\partial_u$, если $b(0) = b'(0) = \ldots = b^{(2k)}(0) = 0$, но $b^{(2k+1)}(0) \neq 0$.
5) $\lambda(u)\partial_u$, где $\lambda(u)$ — плоская в нуле функция, то есть $\lambda^{(i)}(0) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots$.

В терминах функции φ, входящей в описание геометрических величин класса (2) в п. 1.4, это означает, что $\varphi = \varphi(u)$ и соответственно,

1) $\varphi = u$,
2) $\varphi = \frac{1}{\lambda} \ln |u|$,
3-4) $\varphi = \frac{\varepsilon}{1-k} u^{1-k}, \qquad k \geq 2, \qquad \varepsilon = \pm 1$.

Суммируя, мы получаем следующий результат.

Пусть $(\overline{X}, \overline{Y})$ — поднятие аффинного действия в 1-мерное расслоение π, и пусть $h(x,u)$ — 1-й интеграл векторного поля $\overline{X}$. Тогда функция $\overline{Y}(h)$ зависит только от h, пусть $\overline{Y}(h) = b(h)$.

В этих обозначениях справедлив следующий результат.

Теорема 5 *Поднятие аффинного действия на* 1*-мерные геометрические величины локально эквивалентно одному из следующего списка:*

Класс 1. $b \equiv 0$.

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x.$$

Класс 2.

2.1 $b(0) \neq 0$*, в рассматриваемой точке* $\mathbb{R}^2$.

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + \partial_u$$

2.2 $b(h) = \lambda h + o(h), \quad \lambda \neq 0$ *в окрестности рассматриваемой точки.*

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$$

2.3 $b(h) = \lambda u^{2k} + o(u^{2k}), \quad \lambda \neq 0, \quad k \geq 1$*, в окрестности рассматриваемой точки.*

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + u^{2k}\partial_u$$

2.4 $b(h) = \lambda u^{2k+1} + o(u^{2k+1}), \quad \lambda \neq 0, \quad k \geq 1$*, в окрестности рассматриваемой точки.*

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x \pm u^{2k+1}\partial_u$$

2.5 $b(h)$ *— плоская в рассматриваемой точке функция.*

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + b(u)\partial_u.$$

Представления из данного списка мы называем *нормальными формами аффинного действия.*

Замечание 3 *Нормальная форма для класса* 1 *отвечает функциям на аффинной прямой. А поднятие* $\overline{X}$ *и* $\overline{Y}$ *суть поднятия базисных полей* X *и* Y *при помощи тривиальной связности.*

Замечание 4 *Нормальная форма* 2.2 *для класса* 2 *отвечает тензорам на аффинной прямой, если* $\frac{1}{k} \in \mathbb{Z}$.

Интегрируя указанные выше нормальные формы представлений аффинной алгебры Ли $\mathfrak{a}$, мы получим соответствующее действие аффинной группы Ли "$ax + b$" на геометрических величинах, отвечающих нормальным формам представлений. А именно, элемент $x \mapsto ax + b$, $a > 0$, аффинной группы действует следующим образом:

Класс 1.

$$f(x) \longmapsto f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Класс 2. Для всех реализаций аффинной алгебры, отвечающим функции $\varphi(u)$, мы получаем следующее действие:

$$f(x) \longmapsto \varphi^{-1}\left(\varphi\left(f\left(\frac{x-b}{a}\right)\right) + \ln a\right).$$

Поэтому, для случая (1), когда $\varphi = u$,

$$f(x) \longmapsto f\left(\frac{x-b}{a}\right) + \ln a;$$

для случая (2), когда $\varphi = \frac{1}{\lambda}\ln|u|$,

$$f(x) \longmapsto a^{\lambda} f\left(\frac{x-b}{a}\right);$$

а для случая (3), когда $\varphi = \frac{\varepsilon}{n}u^n$, $n = 1 - k$

$$f(x) \longmapsto \left[f^n\left(\frac{x-b}{a}\right) + \frac{n\ln a}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

7 Примеры аффинных действий

Опишем вначале общую конструкцию действий векторных полей на сечения расслоения $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, частный случай которой мы рассмотрели выше.

Пусть $V = a(x)\partial_x$ векторное поле на $\mathbb{R}$, и пусть

$$\overline{V} = a(x)\partial_x + \sum_{1}^{m} a_i(x,u)\partial_{u^i}$$

его поднятие в расслоение.

Обозначим через $A_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\overline{A}_t : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ однопараметрические группы сдвигов вдоль векторных полей V и $\overline{V}$ соответственно:

$$A_t : x \mapsto x + ta(x) + o(t),$$

$$\overline{A}_t : (x, u) \mapsto \big(A_t x, u^1 + ta_1(x, u) + o(t), \ldots, u^m + ta_m(x, u) + o(t)\big).$$

Пусть $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+1}$ сечения π, а кривая $s(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — его образ.

Построим семейство кривых

$$s_t(\mathbb{R}) = \overline{A}_{-t}(s(\mathbb{R}))$$

и отвечающее ему семейство сечений

$$s_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+1},$$

где $s_t(x) = \overline{A}_{-t}(s(A_t x))$.

Определим действие векторного поля V на сечение s следующим образом

$$V(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (s_t).$$

Иначе говоря,

$$s_t(x) = s(x) + t\overline{V}(s)(x) + o(t).$$

Вычислим $V(s)$. Для i-й компоненты сечения s_t, которую мы обозначаем через s_{it}, имеем

$$s_{it}(x) = s_i(A_t x) - ta_i(x, s_t(x)) + o(t) = S_i(x + ta(x)) - ta_i(x, s(x)) + o(t) =$$

$$= s_i(x) + t\big(as_i'(x) - a_i(x, s(x))\big) + o(t).$$

Или i-я компонента $V(s)$ равна:

$$V(s)_i = as_i'(x) - a_i(x, s(x)). \tag{10}$$

Рассмотрим теперь несколько приложений этой формулы.

Мы будем рассматривать случай, когда $m = 1$, расслоение π является тензорным расслоением над аффинной прямой, а указанное выше действие — производной Ли.

1) *Функции.*

В этом случае $s = f(x)$, а

$$V(s) = L_V(f) = a(x)f'(x).$$

Поэтому, $\overline{V} = a(x)\partial_x$.

Применяя это соотношение к аффинному действию, получим

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x,$$

что соответствует аффинному действию класса 1.

2) *Ковариантные тензоры.*

В этом случае $s = f(x)(dx)^{\otimes k}$, а

$$V(s) = L_V(s) = af'(dx)^{\otimes k} + kf(da) \otimes (dx)^{\otimes (k-1)} = \big(af' + kfa'\big) \otimes (dx)^{\otimes k}.$$

Поэтому, в силу (10),

$$\overline{V} = a\partial_x - ka'u\partial_u.$$

Применяя это соотношение к аффинному действию, получим

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x - ku\partial_u,$$

что соответствует аффинному действию класса 2.

3) *Контравариантные тензоры.*

В этом случае $s = f(x)(\partial_x)^{\otimes k}$, а

$$V(s) = L_V(s) = [V, s] = \big(af' - kfa\big)(\partial_x)^{\otimes (k)},$$

и следовательно в этом случае

$$\overline{V} = a\partial_x + ka'u\partial_u.$$

Для аффинного действия соответственно получим

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + ku\partial_u,$$

что отвечает аффинному действию класса 2.

8 Аффинные дифференциальные инварианты

Следуя общему определению дифференциального инварианта, мы говорим, что функция $f \in C^\infty\big(J^k\pi\big)$, заданная на пространстве k-джетов $J^k(\pi)$ расслоения аффинных геометрических величин $\pi : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$, является аффинным *инвариантом*, если она инвариантна относительно k-го продолжения действия аффинной алгебры $\mathfrak{a}$, то есть

$$\overline{X}^k(f) = \overline{Y}^k(f) = 0.$$

Здесь $\overline{X}^{(k)}$ и $\overline{Y}^{(k)}$ k-ые продолжения векторных полей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, а векторные поля $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ на пространстве расслоения π, являются поднятиями базисных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}$, задаваемыми данным классом геометрических величин.

Ниже мы приводим описание алгебр дифференциальных инвариантов для заданных выше классов аффинных геометрических величин.

8.1 Геометрические величины класса 1

Здесь, как и выше, в качестве локальных координат в расслоении π мы выберем аффинную координату x, и первые интегралы $u^1, \dots, u^m$ векторного поля $\overline{X}$. Тогда

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x.$$

Пусть теперь

$$x, \quad u = (u^1, \dots, u^m), \quad u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^m), \quad u_k = (u_k^1, \dots, u_k^m)$$

стандартные координаты в пространстве k-джетов $J^k(\pi)$, где u_s^l отвечает s-й производной l-ой компоненты u^l.

Тогда k-ые продолжения векторных полей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ вычисляются на основании формул [4]. В данном случае он имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{X}^k &= \partial_x, \\ \overline{Y}^k &= x\partial_x - u_1\frac{\partial}{\partial_{u_1}} - 2u_2\frac{\partial}{\partial_{u_2}} - \dots - ku_k\frac{\partial}{\partial_{u_k}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Поэтому функция $f \in C^\infty\big(J^k\pi\big)$ является аффинным дифференциальным инвариантом, если

$$f = f\big(u, u_1, \dots, u_k\big),$$

а относительно координат $u, u_1, \dots, u_k$ эта функция является однородной степени 0, при условии, что переменным $u, u_1, \dots, u_k$ предписаны веса $0, 1, \dots, k$ соответственно, то есть

$$u_1\frac{\partial f}{\partial_{u_1}} + 2u_2\frac{\partial f}{\partial_{u_2}} + \dots + ku_k\frac{\partial f}{\partial_{u_k}} = 0.$$

Тем самым:

(1) по построению функции

$$u^1, \dots, u^m$$

являются аффинными дифференциальными инвариантами нулевого порядка,

(2) имеется $(m-1)$ независимый инвариант 1-го порядка, которые порождены функциями

$$\frac{u_1^1}{|u_1|}, \dots, \frac{u_1^m}{|u_1|},$$

где $|u_1| = \sqrt{(u_1^1)^2 + \cdots + (u_1^m)^2}$,

(3) имеется (m) независимых дифференциальных инвариантов в каждом порядке $s \geq 2$,

$$\frac{u_s^1}{|u_1|^s}, \ldots, \frac{u_s^m}{|u_1|^s}.$$

Кроме того, производные Трессе $\frac{D}{Du^i}$, отвечающие дифференциальным инвариантам нулевого порядка, являются $\mathfrak{a}$-инвариантными дифференцированиями:

$$\nabla_i = \frac{D}{Du^i} = \frac{1}{u_1^i}\frac{d}{dx}.$$

Все эти дифференцирования пропорциональны дифференцированию

$$\nabla = \frac{1}{|u_1|}\frac{d}{dx}. \tag{12}$$

Коэффициенты пропорциональности k_i, где $\nabla_i = k_i \nabla$ имеют вид $k_i = \frac{|u_1|}{u_1^i}$, и являются аффинными дифференциальными инвариантами первого порядка. Поэтому ∇ является также $\mathfrak{a}$-инвариантным дифференцированием.

Кроме того, как это видно из приведенного выше описания, инварианты, когда $m \geq 2$, порождены инвариантами нулевого порядка $u^1, \ldots, u^m$ и всеми инвариантными производными $\nabla^s(u^j)$, $s = 0, 1, \ldots,$ $j = 1, \ldots, m$, которые удовлетворяют единственному соотношению (сизигии):

$$\left[\nabla(u^1)\right]^2 + \cdots + \left[\nabla(u^m)\right]^2 = 1. \tag{13}$$

Суммируя указанное выше, мы приходим к следующему результату.

Теорема 6 *Алгебра аффинных дифференциальных инвариантов, для аффинных геометрических величин размерности $m \geq 2$, порождена дифференциальными инвариантами $u^1, \ldots, u^m$ нулевого порядка и инвариантным дифференцированием (12), подчиненным единственному соотношению сизигии (13).*

8.2 Дифференциальные аффинные инварианты класса 1 в размерности 1

В этом параграфе мы рассматриваем отдельно случай аффинных геометрических величин размерности $1, m = 1$. Как и выше, дифференциальные инварианты порождены:

1) u — дифференциальным инвариантом порядка 0,

2) $\frac{u_2}{u_1^2}$ — дифференциальным инвариантом порядка 2, и

3) $\frac{u_s}{u_1^s}$ -дифференциальным инвариантом порядка s, при $s \geq 3$.

Производная Трессе, как и выше, $\nabla = \frac{1}{u_1}\frac{d}{dx}$ является инвариантным дифференцированием.

Тем самым, алгебра аффинных дифференциальных инвариантов в размерности 1, порождена двумя базисными дифференциальными инвариантами

$$J_0 = u, \quad J_2 = \frac{u_2}{u_1^2},$$

и всеми производными Трессе

$$J_{k+2} = \nabla^k(J_2), \quad k = 1, \dots .$$

Соотношение сизигии (13), в данном случае выглядит следующим образом:

$$\nabla(J_0) = 1.$$

В случае, когда 1-й интеграл векторного поля $\overline{X}$ задается функцией $\varphi(x,u) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, и $\varphi_u \neq 0$, то точечное преобразование

$$(x,u) \mapsto \big(x, \varphi(x,u)\big)$$

переводит векторные поля ∂_x и $x\partial_x$ в поля:

$$\overline{X} = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u \partial_u}, \quad \overline{Y} = x\overline{X}.$$

Следовательно, это преобразование переводит дифференциальные инварианты, отвечающие нормальной форме аффинного действия, в дифференциальные инварианты геометрических величин класса 1, отвечающих функции φ. В итоге, мы получаем следующий результат.

Теорема 7 *Дифференциальные инварианты для аффинных геометрических величин класса* 1 *и размерности* 1 *имеют два базисных инварианта:*

-нулевого порядка

$$J_0 = \varphi(x, u),$$

и

-второго порядка

$$J_2 = \frac{\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2},$$

а все остальные инварианты порождаются базисными и их производными Трессе $J_{k+2} = \frac{D^k J_2}{D J_0^k}$.

8.3 Геометрические величины класса 2, $m \geq 2$

Как и в предыдущем параграфе мы выберем локальные координаты $(x, u^1, \ldots, u^m)$ в пространстве расслоения π таким образом, чтобы

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x\partial_x + \partial_{u^1}.$$

Вычисляя продолжения этих векторных полей в пространство k-джетов, получаем:

$$\overline{X}^{(k)} = \partial_x,$$

$$\overline{Y}^{(k)} = x\partial_x + u_1\frac{\partial}{\partial_{u^1}} - 2u_2\frac{\partial}{\partial_{u^2}} - \cdots ku_k\frac{\partial}{\partial_{u^k}}.$$

Поэтому функция $f \in C^\infty(J^k\pi)$ является аффинным дифференциальным инвариантом для геометрических величин класса 2, если $f = f(u, u_1, \ldots, u_k)$ и

$$\frac{\partial f}{\partial u^1} = u_1\frac{\partial f}{\partial u_1} + \cdots + ku_k\frac{\partial f}{\partial u_k}. \tag{14}$$

Будем искать решения этого уравнения в виде:

$$f = e^{u^1} g(u', u_1, \ldots, u_k),$$

где через u' мы обозначили группу переменных $u^2, \ldots, u^m$. Тогда для функции g мы получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$g = u_1\frac{\partial g}{\partial u_1} + \cdots + ku_k\frac{\partial g}{\partial u_k}.$$

Таким образом, функция g является однородной степени 1, если мы припишем переменным $u_1, \ldots, u_k$ веса $1, \ldots, k$ соответственно.

Следовательно, аффинные дифференциальные инварианты в данном случае порождены:

1) инвариантами нулевого порядка: $u^2, \ldots, u^m$,
2) инвариантами первого порядка: $e^{u^1} u_1^1, \ldots, e^{u^1} u_1^m$,
3) инвариантами k-го порядка: $e^{ku^1} u_k^1, \ldots, e^{ku^1} u_k^m$.

Лемма 2 *Дифференцирование*

$$\nabla = e^{u^1} \frac{d}{dx}$$

является $\mathfrak{a}$*-инвариантным для геометрических величин класса* 2.

Доказательство Производные Трессе

$$\nabla_i = \frac{D}{Du^i} = \frac{1}{u_1^i} \frac{d}{dx}, \quad i = 2, \ldots, m,$$

являются $\mathfrak{a}$-инвариантными дифференцированиями. Умножая их на дифференциальные инварианты $e^{u^1} u_1^i$ мы получим инвариантное дифференцирование ∇. $\square$

Суммируя сказанное, мы получаем следующее описание алгебры аффинных дифференциальных инвариантов.

Теорема 8 *Алгебра аффинных дифференциальных инвариантов для геометрических величин класса* 2 *и размерности* $m \geq 2$*, порождена дифференциальными инвариантами нулевого порядка*

$$u^2, \ldots, u^m,$$

дифференциальным инвариантом первого порядка

$$e^{u^1} u_1^i$$

и всеми производными вдоль ∇.

8.4 Геометрические величины класса 2, $m = 1$

В этом случае продолжения векторных полей $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ имеют следующий вид:

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + \partial_u - u_1 \partial_{u_1} - 2u_2 \partial_{u_2} - \cdots - k u_k \partial_{u_k}.$$

Поэтому, как и выше, функция $f \in C^\infty(J^k\pi)$ является дифференциальным инвариантом, если $f = f(u, u_1, \dots, u_k)$, и

$$\frac{\partial f}{\partial u} = u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \dots + k u_k \frac{\partial f}{\partial u_k}.$$

Поэтому $f = e^u g$, где g — однородная функция степени 1, относительно переменных $u_1, \dots, u_k$, веса которых равны $1, \dots, k$ соответственно.

Таким образом, дифференциальные инварианты в данном случае порождены функциями:

$$e^u u_1, e^{2u} u_2, \dots, e^{ku} u_k.$$

Для нахождения инвариантных дифференцирований нам понадобится следующий результат:

Лемма 3 *Дифференцирование*

$$\nabla = \lambda \frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty\pi) \longrightarrow C^\infty(J^\infty\pi),$$

где $\lambda \in C^\infty(J^k(\pi))$, *является* $\mathfrak{a}$-*инвариантным, тогда и только тогда, когда функция* λ *удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\overline{X}^k(\lambda) = 0, \qquad \overline{Y}^k(\lambda) = \lambda. \tag{15}$$

Доказательство Пусть V векторное поле на R^2, $\quad V = A\partial_x + B\partial_u$ и $\psi = B - Au_1$ его производящая функция, тогда его k-ое продолжение имеет вид [4], [6]:

$$V^{(k)} = \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \frac{d^k\psi}{dx^k}\frac{\partial}{\partial u_k} + A\left(\frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k}\right).$$

Мы рассмотрим бесконечное продолжение векторного поля V, как формальное дифференцирование вида

$$V^\bullet = \varTheta_\psi + A\frac{d}{dx} : C^\infty(J^\infty\pi) \longrightarrow C^\infty(J^\infty\pi),$$

где

$$\varTheta_\psi = \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + \frac{d^k\psi}{dx^k}\frac{\partial}{\partial u_k} + \dots$$

— эволюционное дифференцирование [4]. Тогда $V^\bullet(F) = V^k(F)$, если $F \in C^\infty(J^k)$.

Прямое вычисление показывает, что

$$\left[\lambda\frac{d}{dx}, V^{\bullet}\right] = \left(V^{\bullet}(\lambda) - \lambda\frac{dA}{dx}\right)\frac{d}{dx}.$$

Иначе говоря, дифференцирование $\lambda\frac{dA}{dx}$ коммутирует с бесконечным продолжением $V^{\bullet}$ тогда и только тогда, когда $V^{\bullet}(\lambda) = \lambda\frac{dA}{dx}$. Выбрав в качестве векторного поля V наши поля $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ мы получим утверждение леммы. □

Решим систему уравнений (15), предполагая, что функция λ зависит только от u. Тогда,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \lambda$$

и следовательно, мы можем считать, что

$$\lambda = e^{u}.$$

Предложение 1 *Дифференцирование*

$$\nabla = e^{u}\frac{d}{dx}$$

является $\mathfrak{a}$*-инвариантным для аффинных геометрических величин класса* 2 *и размерности* 1.

Таким образом, для геометрических величин класса 2 и размерности 1 описание алгебры дифференциальных инвариантов имеет следующий вид:

Теорема 9 *Алгебра аффинных дифференциальных инвариантов для геометрических величин класса* 2 *и размерности* 1, *порождена дифференциальным инвариантом*

$$J_1 = e^{u}u_1$$

и всеми инвариантными производными

$$J_{k+1} = \nabla^{k}(J_1), \quad k = 1, \ldots.$$

Пусть теперь (x, u) — произвольная система координат на $J^0(\pi) = \mathbb{R}^2$, а $\varphi(x, u)$ — первый интеграл векторного поля $\overline{X}$, так что

$$\overline{X} = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u, \qquad \overline{Y} = x\overline{X} + \frac{1}{\varphi_u}\partial_u.$$

Тогда, применяя точечное преобразование $(x, u) \mapsto (x, \varphi(x, u))$, мы приходим к следующему общему результату.

Теорема 10 *Алгебра аффинных дифференциальных инвариантов для геометрических величин класса* 2 *и размерности* 1, *порождена дифференциальным инвариантом первого порядка*

$$J_1 = e^{\varphi} \frac{d\varphi}{dx},$$

и всеми инвариантными производными

$$J_{k+1} = \nabla^{k+1}(J_1), \quad k = 1, \ldots,$$

где $\nabla = e^{\varphi} \frac{d}{dx}$ — $\mathfrak{a}$*-инвариантное дифференцирование.*

Пример 1 *Инварианты порядка* ≤ 2 *порождены следующим дифференциальным инвариантом*

$$e^{\varphi} \frac{d\varphi}{dx}, \quad e^{2\varphi}\left(\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right).$$

Пример 2 *Найдем дифференциальные инварианты тензоров на аффинной прямой. Для них* $\varphi = -\frac{\ln|u|}{k}$, *где* $k > 0$ *для контравариантных и* $k < 0$ *для ковариантных тензоров. Следовательно,*

$$\nabla = \frac{1}{u^{\frac{1}{k}}} \frac{d}{dx}, \quad J = -\frac{u_1}{k u^{1+\frac{1}{k}}}.$$

8.5 Линейные аффинные величины

Под линейными аффинными геометрическими величинами мы понимаем сечения таких однородных расслоений, в которых действие алгебры Ли $\mathfrak{a}$ имеет следующий вид:

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = x\partial_x + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} u^i \frac{\partial}{\partial_{u^j}}. \tag{16}$$

Более того, здесь мы будем предполагать матрицу $\|a_{ij}\|$ — невырожденной, а координаты $u^1, \ldots, u^m$ собственными, то есть

$$a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus 0$, $i = 1, \ldots, m$, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Рассмотрим вначале случай одномерных геометрических величин. Здесь, чтобы получить действие (16), функцию $\varphi(x, u)$ нужно выбрать в виде

$$\varphi(x, u) = \frac{\ln|u|}{\lambda}.$$

В этом случае алгебра дифференциальных инвариантов порождена базисным инвариантом первого порядка
$$J_1 = u^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot u_1$$
и инвариантным дифференцированием
$$\nabla = u^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d}{dx}.$$
В общем случае, продолжения векторных полей $\overline{X}$, $\overline{Y}$ имеют вид:
$$\overline{X}^{(k)} = \partial_x,$$
$$\overline{Y}^{(k)} = x\partial_x + \sum_{s=0}^{k} \sum_{s=1}^{m} (\lambda_i - s) u_s^i \frac{\partial}{\partial u_s^i}.$$

Поэтому функция $f \in C^\infty(J^k\pi)$ является $\mathfrak{a}$-дифференциальным инвариантом, если $f = f(u, u_1, \ldots, u_k)$, и если эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению:
$$\sum_{s=0}^{k} \sum_{s=1}^{m} (\lambda_i - s) u_s^i \frac{\partial f}{\partial u_s^i} = 0.$$
Иначе говоря, если мы припишем переменным u_s^i веса $\lambda_i - s$, то функция f должна быть однородной степени нуль.

Для описания таких функций введем следующие обозначения
$$\lambda = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i, \qquad \lambda_{\overline{i}} = \prod_{i \neq j} \lambda_j.$$
Тогда функция
$$h = \left(\sum_{i=1}^{m} (u^i)^{\lambda_{\overline{i}}} \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$
является однородной степени 1.

Поэтому мы имеем $(m-1)$ независимых дифференциальных инвариантов порядка нуль, и в качестве образующих можем выбрать функции
$$J^1 = \frac{u^1}{h^{\lambda_1}}, \ldots, J^m = \frac{u^m}{h^{\lambda_m}}.$$
Заметим, что эти функции не являются функционально независимыми, а удовлетворяют соотношению
$$\left(J^1\right)^{\lambda_{\overline{1}}} + \cdots + \left(J^m\right)^{\lambda_{\overline{m}}} = 1.$$

Соответственно, в порядке 1, в качестве базисных инвариантов можно выбрать функции

$$J_1^1 = \frac{u_1^1}{h^{\lambda_1 - 1}}, \dots, J_1^m = \frac{u_1^m}{h^{\lambda_m - 1}},$$

а в порядке k соответственно:

$$J_k^1 = \frac{u_k^1}{h^{\lambda_1 - k}}, \dots, J_k^m = \frac{u_k^m}{h^{\lambda_m - k}}. \tag{17}$$

Теорема 11 *Алгебра дифференциальных инвариантов для линейных аффинных геометрических величин порождена функциями J_s^i, $i = 1, \dots, m$, $s = 0, 1, \dots$.*

А именно, каждый дифференциальный инвариант порядка $\leq k$ локально представим в виде:

$$F\Big(J_1, \dots, J_m, \dots, J_k^1, \dots, J_k^m\Big),$$

для некоторой функции F.

9 Приложение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Применение изложенной выше аффинной геометрии прямой к дифференциальным уравнениям основывается на следующих наблюдениях:

1) Если обыкновенное дифференциальное уравнение допускает в качестве симметрий 2-х мерную разрешимую алгебру $\mathfrak{a}$, являющуюся поднятием некоторого действия на прямой, то это означает, что на данной прямой задана аффинная структура, а решения данного уравнения являются аффинными геометрическими величинами.

2) Если дифференциальный оператор, задающий дифференциальное уравнение сохраняется при действии $\mathfrak{a}$, то данное уравнение может быть записано через дифференциальные инварианты, отвечающие данному классу геометрических величин, и наконец,

3) Аффинная алгебра $\mathfrak{a}$ является разрешимой алгеброй Ли размерности 2, а поэтому, в силу теоремы Ли-Бьянки [5], данное дифференциальное уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах, если его порядок не превосходит 2, а соответствующая геометрическая величина одномерна.

В качестве иллюстрации к указанной схеме, мы рассмотрим следующий пример.

9.1 Примеры аффинных структур, ассоциированных с дифференциальными уравнениями

Дифференциальные уравнения вида (см. [5], [2])

$$y'' = y' + f(y),$$

допускающие алгебру точечных симметрий $\mathfrak{a}$ и тем самым интегрируемые в квадратурах, делятся на два класса:

(I) $\quad f = a(y+b)^c - \frac{2c+2}{(c+3)^2}(y+b),$

где $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq -3$, и

(II) $\quad f = ae^{by} - \frac{2}{b},$

где $a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0$.

В начале, мы рассмотрим класс (I) и пусть

$$f = ay^c - \frac{2x+2}{(c+3)^2}y.$$

Тогда уравнение

$$y'' = y' + ay^c - \frac{2x+2}{(c+3)^2}y \tag{18}$$

допускает алгебру точечных симметрий $\mathfrak{a}$ с образующими:

$$A = \partial_x, \qquad B = e^{kx}\partial_x + \frac{k+1}{2}e^{kx}u\partial_u,$$

где $k = \frac{1-c}{3+c}$.

Векторные поля A и B удовлетворяют коммутационному соотношению:

$$[A, B] = kB.$$

Поэтому, положив

$$X = e^{kx}\partial_x, \qquad Y = -\frac{1}{k}\partial_x, \tag{19}$$

мы получим, что

$$A = -k\overline{Y}, \qquad B = \overline{X}$$

и

$$[X, Y] = X, \qquad [\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{X}.$$

Таким образом, алгебра симметрий является поднятием аффинного действия (19).

Аффинный параметр, который мы обозначим через t, находится из соотношения: $X(t) = 1$. Откуда получаем, что

$$t = -\frac{1}{k}e^{-kx}.$$

В качестве второй координаты v на плоскости $\mathbb{R}^2$, мы выберем теперь первый интеграл векторного поля $\overline{X} = B$.

Соотношения $B(v) = 0$ дает дифференциальное уравнение

$$v_x + \alpha u v_u = 0,$$

где $\alpha = \frac{k+1}{2}$. Поэтому, в качестве второй координаты, мы можем выбрать функцию

$$v = e^{-x}u^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Мы имеем,

$$A(t) = -kt, \quad A(v) = -v$$

$$B(t) = 1, \quad B(v) = 0.$$

Поэтому, в координатах (t, v), алгебра симметрий порождена векторными полями

$$\overline{X} = \partial_x, \qquad \overline{Y} = t\partial_t + \frac{1}{k}v\partial_v.$$

Таким образом, решения дифференциального уравнения (18), является линейными аффинными геометрическими величинами размерности 1. Учитывая (1.6), их следует рассматривать как тензоры вида

$$h(t)\big(\partial_x\big)^{\otimes\frac{1}{k}},$$

если $\frac{1}{k} \in \mathbb{N}$.

Для уравнений класса (II):

$$y'' = y' + ae^{by} - \frac{2}{b} \tag{20}$$

алгебра точечных симметрий порождена векторными полями:

$$A = \partial_x, \qquad B = e^{-x}\partial_x + \frac{2}{b}e^{-x}u\partial_u,$$

удовлетворяющим коммутационному соотношению: $[A, B] = -B$.

Положим,

$$X = e^{-x}\partial_x, \qquad Y = \partial_x.$$

Тогда, как и выше,

$$A = \overline{Y}, \qquad B = \overline{X},$$

и

$$[X, Y] = X.$$

В качестве аффинного параметра, в данном случае, мы выберем функцию

$$t = e^x,$$

а в качестве первого интеграла v функцию

$$v = e^{-x} u^{\frac{b}{2}}.$$

Тогда,

$$A(t) = t, \quad A(v) = -v$$

$$B(t) = 1, \quad B(v) = 0.$$

Поэтому,

$$\overline{X} = \partial_t,$$

$$\overline{Y} = t\partial_t - v\partial_v,$$

в координатах (t, v).

Таким образом, (см. 1.6), решения дифференциального уравнения (20) являются дифференциальными формами на аффинной прямой.

9.2 Дифференциальные уравнения и аффинные геометрические величины класса 1

В этом параграфе мы рассматриваем одномерные аффинные геометрические величины и ассоциированные с ними обыкновенные дифференциальные уравнения.

В этом случае каждый аффинный дифференциальный инвариант может быть записан в виде:

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \ldots, \frac{D^k J}{DI^k}\right), \tag{21}$$

где

$$I = \varphi(x, u), \quad , J = \frac{d^2\varphi}{dx^2} / \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2,$$

базисные инварианты, а $\varphi(x, u)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\varphi_u \neq 0$, (см. п. 1.7).

Дифференциальный инвариант (21) в свою очередь определяет обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \ldots, \frac{D^k J}{DI^k}\right) = 0, \tag{22}$$

порядка $k+2$, которое допускает алгебру Ли $\mathfrak{a}$ симметрий с образующими:

$$\overline{X} = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u, \quad \overline{Y} = x\overline{X}.$$

Аффинная алгебра $\mathfrak{a}$ — это разрешимая алгебра Ли размерности 2, а поэтому, в силу теоремы Ли-Бьянки, всякое уравнение вида (22) при $k = 0$ может быть явно проинтегрировано в квадратурах [5], [2]).

Пусть теперь $k \geq 1$, и предположим, что уравнение (22), рассматриваемое как дифференциальное уравнение в производных Трессе, может быть проинтегрировано.

Тогда решения

$$J = f(I) \tag{23}$$

этого уравнения, рассматриваемые как обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, интегрируются в квадратурах.

Рассмотрим, например, когда (22) является линейным дифференциальным уравнением 1-ого порядка относительно производной Трессе, то есть,

$$\frac{DJ}{DI} + A(I)J = B(I). \tag{24}$$

Отметим, что в обычных производных уравнение (24) отвечает обыкновенному дифференциальному уравнению 3-го порядка.

Решая уравнение (24), мы находим 1-параметрическое семейство решений

$$J = F(c, I), \tag{25}$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = F(c,\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$

где c — некоторая постоянная.

Уравнения (25) являются уже дифференциальными 2-ого порядка, допускающими 2-мерную разрешимую алгебру симметрий, и следовательно интегрирующимися в квадратурах.

В качестве другого примера рассмотрим дифференциальные уравнения 4-ого порядка, отвечающие линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами. Например:

$$\frac{D^2J}{DI^2} + p\frac{DJ}{DI} + qJ = H(I),$$

где p, q — некоторые постоянные.

Общее решение этого уравнения в случае различных характеристических корней, как хорошо известно, имеет вид

$$J = K_1(I, C_1, C_2)e^{\lambda_1 I} + K_2(I, C_1, C_2)e^{\lambda_2 I}, \tag{26}$$

где функции K_1 и K_2 явно вычисляются через функцию H. Так например, для гармонического осциллятора,

$$\frac{D^2J}{DI^2} + \omega^2 J = 0,$$

$$J = C_1\cos(\omega I) + C_2\sin(\omega I), \tag{27}$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (26) и (27), как и выше интегрируются в квадратурах.

Пример 3 *Дифференциальные уравнения вида:*

$$u_4 - 7u_1^{-1}u_2u_3 + 8u_2^2 + W(u)u_2 = A(u)u_1^2 \tag{28}$$

допускают аффинную алгебру симметрий $\mathfrak{a}$ *с* $\varphi = u$*, для произвольных функций* A *и* W*.*

Будучи записанными в дифференциальных инвариантах, они приводят к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\frac{D^2J}{DI^2} + W(I)J = A(I).$$

Если потенциал $W(I)$ *интегрируем в смысле [5], то уравнение (28) может быть интегрировано в квадратурах, для произвольной функции* A*.*

Например, это так, когда

$$W(u) = Cu^{-2},$$

или

$$W(u) = C(u^2 + pu + q)^2,$$

или $W(u)$ *является решением стационарного уравнения Кортвега-де Вриза, или его высших аналогов (см. [5]).*

Пример 4 *Дифференциальные уравнения вида:*

$$u_1^2 u_4 - 7u_1 u_2 u_3 + 8u_2^2 - u_1^3 u_3 + 2u_1^2 u_2^2 = a\frac{u_2^k}{u_1^{2k-6}} - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2} u_1^4 u_2 \qquad (29)$$

допускают аффинную алгебру симметрий $\mathfrak{a}$ *с* $\varphi = u$.
Записав (29) в дифференциальных инвариантах, мы приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{D^2 J}{DI^2} = \frac{DJ}{DI} + aJ^k - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2} J,$$

которое интегрируется в квадратурах ([2], [5]), и тем самым (29) также интегрируется в квадратурах.
Примерами уравнений вида (29) являются следующие уравнения:

$k = a = 2:$

$$u_1^2 u_4 - 7u_1 u_2 u_3 + 8u_2^3 - u_1^3 u_3 + \frac{6}{25} u_1^4 u_2 = 0,$$

$k = 3, a = 8:$

$$u_1 u_4 - 7u_2 u_3 - u_1^2 u_3 + 2u_1 u_2^2 + \frac{2}{9} u_1^2 u_2 = 0.$$

9.3 Дифференциальные уравнения и аффинные геометрические величины класса 2

Здесь мы рассматриваем дифференциальные уравнения, ассоциированные с аффинными геометрическими величинами класса 2. Каждый дифференциальный инвариант для этих величин представим в виде

$$F\left(J, \nabla J, \ldots, \nabla^k J\right), \qquad (30)$$

где $J = e^{\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$ — базисный дифференциальный инвариант первого порядка, $\nabla = e^{\varphi} \frac{d}{dx}$ инвариантное дифференцирование, а $\varphi = \varphi(x, u)$ — гладкая функция, такая, что $\varphi_u \neq 0$.

Дифференциальный инвариант (30) порождает обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $k + 1$

$$F\left(J, \nabla J, \nabla^2 J, \ldots, \nabla^k J\right) = 0, \qquad (31)$$

для которого аффинная алгебра Ли $\mathfrak{a}$ является алгеброй точечных симметрий, и

$$\overline{X} = \partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u, \qquad \overline{Y} = x\overline{X} + \frac{1}{\varphi_u}\partial_u.$$

В случае, когда $k=1$, в силу теоремы Ли-Бьянки, дифференциальные уравнения 2-го порядка

$$F\bigg(J, \nabla J\bigg) = 0$$

интегрируются в квадратурах.

Случай, когда $k=2$, и дифференциальное уравнение

$$F\bigg(J, \nabla J, \nabla^2 J\bigg) = 0, \tag{32}$$

является уравнением третьего порядка, может быть проинтегрировано в квадратурах, если известен первый интеграл (32), рассматриваемого как уравнения 2-го порядка относительно дифференцирования ∇.

А именно, если $H(J, \nabla J)$ такой интеграл, то есть $\nabla\big(H(J, \nabla J)\big)$ пропорционально $F\bigg(J, \nabla J, \nabla^2 J\bigg)$, то интегрирование (32) эквивалентно интегрированию уравнений

$$H(J, \nabla J) = \mathrm{const},$$

которое можно проделать в квадратурах.

Например, уравнение гармонического осциллятора, относительно ∇ (которое является обыкновенным дифференциальным уравнением 3−его порядка)

$$\nabla^2 J + J = 0, \tag{33}$$

имеет первый интеграл

$$H = \frac{(\nabla J)^2}{2} + \frac{J^2}{2} \tag{34}$$

и, тем самым, интегрирование уравнения (33) сводится к интегрированию 1-параметрического семейства уравнений второго порядка

$$H = \frac{(\nabla J)^2}{2} + \frac{J^2}{2} = \mathrm{const},$$

которые могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Общая схема интегрирования уравнений типа (32) выглядит следующим образом: введя формальную переменную s, которую мы будем называть аффинным параметром, так чтобы $\nabla = \frac{d}{ds}$, или $s' = e^{-\varphi}$, мы можем рассматривать уравнение (32), как уравнение относительно функции $J = J(s)$. Тогда решение этого уравнения $J = f(s)$, после применения оператора ∇ дает пару уравнений:

$$J = f(s)$$

$$\nabla J = f'(s).$$

Исключая s, когда это возможно, из этой системы, мы приходим к соотношению вида:

$$G(J, \nabla J) = 0,$$

то есть к уравнению второго порядка, которое, как мы видели, интегрируется в квадратурах.

Пример 5 *Пусть*

$$\varphi = \ln|u|, \qquad \nabla = u\frac{d}{dx}, \qquad J = u_1.$$

Дифференциальное уравнение 3-го порядка

$$u^2u_3 + uu_1u_2 - uu_2 = au_1^k - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2}u_1 \tag{35}$$

допускает аффинную алгебру (с $\varphi = \ln|u|$) симметрий, и, будучи записанным в дифференциальных инвариантах, приводит к уравнению вида:

$$\nabla^2 J = \nabla J + aJ^k - \frac{2(k+1)}{(k+3)^2}J.$$

Последнее уравнение имеет первый интеграл [2], [5], и тем самым уравнение (35) интегрировано в квадратурах.

Список литературы

1. Арнольд, В.И.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., “Наука”, 1971, 239 стр.
2. Dushin, S.V. Lychagin V.V.: Symmetries of distributions and quadrature of ordinary differential equctions. Acta Appl. Math. **24**(1), 29–57 (1991)
3. Коновенко, Н. Г.: Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на афінній прямій. Вісник Київського національного університету. Серія:фіз.–мат.науки. № 2, 9–16 (2008)
4. Виноградов, А.М., Красильщик, И.С., Лычагин, В.В.: Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М., “Наука”, 1986, 336 стр.

5. Kushner, A., Lychagin, V., Rubtsov, V.: Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Ser: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, No. 101, Cambridge UP, 2007, xxii+496 pp.
6. Olver, P.: Applications of Lie groups to differential equations. Graduate Texts in Mathematics, **107**, Springer-Verlag, New York, 1986.
7. S.Sternberg, S.: On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space. Amer. J. Math. **80**,623–631 (1958)
8. Хартман, Ф.: Обыкновенные лдифференциальные уравнения. М., “Мир”, 1970, 720 стр.

Н. Г. Коновенко
Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса, Украина.
E-mail: konovenko@ukr.net

N. Konovenko

Affine Geometry of Straight Line

In this paper we classify actions of the solvable 2-dimensional Lie algebra and corresponding affine geometrical quantities. We describe structures of the differential invariant algebras and indicate their applications to differential equations.

Mathematics Subject Classification (2000) 53A15

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(2) 75–84 $d\omega$

О движениях в обобщенных финслеровых пространствах с специальными метриками

В. И. Паньженский О. П. Сурина

Представлено А. Г. Кушнером

Аннотация Исследуются движения в обобщенных финслеровых пространствах $\mathcal{F}^n$, которые характеризуются тем, что метрика их касательных пространств реализуется либо на n-мерном круговом конусе, либо является конформно евклидовой. Доказано, что в первом случае максимальная размерность группы Ли движений пространства $\mathcal{F}^n$ равна $n(n+1)/2$, а во втором $n(n-1)/2+1$.

Ключевые слова Финслерово пространство · Обобщенное финслерово пространство · Движения · Производная Ли

УДК 514.16

1. Одним из естественных обобщений римановых и финслеровых пространств является пространство линейных элементов с непотенциальной метрикой или обобщенное финслерово пространство $\mathcal{F}^n = (M, g)$, метрическая структура которого определяется заданием дважды ковариантного симметричного положительно определенного тензорного поля g, компоненты которого $g_{ij}(x, v)$ являются функциями однородными нулевой степени по координатам касательного вектора. Длина s кривой $c : x = x(t)$ базисного многообразия M вдоль векторного поля $v = v(t)$ определяется интегралом

$$s = \int \sqrt{g_{ij}(x(t), v(t))\dot{x^i}\dot{x^j}}dt. \tag{1}$$

Если, в частности, если $v(t) = \dot{x}(t)$, то формула (1) определяет длину базисной кривой, которая, в силу однородности нулевой степени функций $g_{ij}(x, \dot{x})$ по $\dot{x}$, не зависит от выбора параметризации этой кривой.

Финслерова связность на M — это отображение

$$\nabla : \mathrm{Sec}\ T(TM) \times \mathrm{Sec}\ \pi^*(TM) \to \mathrm{Sec}\ \pi^*(TM), \tag{2}$$

которое каждому векторному полю X на касательном расслоении TM и финслерову векторному полю $Y \in \mathrm{Sec}\ \pi^*(TM)$ ставит в соответствие финслерово векторное поле $Z = \nabla_X Y$ (ковариантная производная от Y вдоль X). При этом требуется, чтобы отображение ∇ обладало известными свойствами определения линейной связности по Кошулю. В формуле (2) через $\mathrm{Sec}\ \pi^*(TM)$ обозначено множество гладких финслеровых векторных полей на M, т.е. гладких сечений векторного расслоения

$$\pi^*(TM) = \bigcup_{z \in TM} T_{\pi(z)}M.$$

Здесь $\pi : TM \to M$ — каноническая проекция касательного расслоения.

Пусть на TM задана инфинитезимальная связность, т.е. распределение $H : z \to H_z$ горизонтальных площадок и $\delta_i = \partial_i - H_i^k \dot{\partial}_k$ — локальный базис векторных полей этого распределения ($\partial_i = \partial/\partial x^i, \dot{\partial}_i = \partial/\partial v^i$). Если (F_{ij}^k, C_{ij}^k) — коэффициенты связности ∇, определяемые разложением

$$\nabla_i \partial_j \equiv \nabla_{\delta_i} \partial_j = F_{ij}^k \partial_k, \qquad \dot{\nabla}_i \partial_j \equiv \nabla_{\dot{\partial}_i} \partial_j = C_{ij}^k \partial_k, \tag{3}$$

то потребовав, чтобы $F_{ij}^k = F_{ji}^k$, $C_{ij}^k = C_{ji}^k$ и $\nabla_X g = 0$ для всех $X \in \mathrm{Sec}\ T(TM)$, находим:

$$F_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_s g_{ij}), \tag{4}$$

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} (\dot{\partial}_i g_{sj} + \dot{\partial}_j g_{is} - \dot{\partial}_s g_{ij}). \tag{5}$$

Построенная так связность называется *метрической финслеровой связностью.*

Векторное поле X на TM называется *горизонтальным*, если $\nabla_X v = 0$, где $v = v^i \partial_i$ — фундаментальное финслерово векторное поле.

Если отображение, которое каждой точке $z \in TM$, ставит в соответствие множество всех горизонтальных векторов в этой точке, является инфинитезимальной связностью, то связность ∇ называется *регулярной*. Коэффициентами такой связности являются функции $F^k_{i0} = F^k_{ij} v^j$, а условием регулярности является невырожденность матрицы $M^k_i = \delta^k_i + C^k_{i0}$.

Регулярная финслерова связность ∇ называется *связностью Картана*, если $H^k_i = F^k_{i0}$, т.е. исходная инфинитезимальная связность совпадает с инфинитезимальной связностью, порожденной регулярной связностью ∇.

Коэффициенты метрической связности Картана, как и в финслеровом случае, обозначаются через Γ^{*k}_{ij}, а для их вычисления, в соответствии с (4), имеем

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \{{}^{k}_{ij}\} - \frac{1}{2} g^{kp} (\dot\partial_s g_{pi} \Gamma^{*s}_{j0} + \dot\partial_s g_{jp} \Gamma^{*s}_{i0} - \dot\partial_s g_{ij} \Gamma^{*s}_{p0}), \tag{6}$$

где $\{{}^{k}_{ij}\}$ — символы Кристофеля метрического тензора.

Свернув (6) с v^j, получим:

$$H^{km}_{li} \Gamma^{*l}_{m0} = \{{}^{k}_{i0}\}, \tag{7}$$

где

$$H^{km}_{li} = \delta^k_l \delta^m_i + \frac{1}{2} g^{kp} \dot\partial_l g_{sp} v^s \delta^m_i + \frac{1}{2} g^{kp} \dot\partial_l g_{ip} v^m - \frac{1}{2} g^{km} \dot\partial_l g_{si} v^s. \tag{8}$$

Для того чтобы система (7) имела единственное решение и, следовательно, существовала единственная связность Картана, необходимо и достаточно, чтобы матрица H^{km}_{li} была невырожденной. Для явного выражения Γ^{*k}_{i0} (и, следовательно, Γ^{*k}_{ij}) надо иметь матрицу $\widetilde{H}^{pi}_{kq}$ обратную к H^{km}_{li}: $\widetilde{H}^{pi}_{kq} H^{km}_{li} = \delta^p_l \delta^m_q$. Пространство $\mathcal{F}^n$, для которого матрица H^{km}_{li} является невырожденной называют *пространством с регулярной метрикой*. Обобщенное финслерово пространство $\mathcal{F}^n$ с регулярной связностью и регулярной метрикой называется регулярным.

2. Векторное поле $X = \xi^k \partial_k$ на M является инфинитезимальным движением обобщенного финслерова пространства $\mathcal{F}^n = (M, g)$, если производная Ли вдоль X от метрического тензора g обращается в нуль. Имеет место

Теорема 1 *Множество всех инфинитезимальных движений регулярного обобщенного финслерова пространства $\mathcal{F}^n$ является алгеброй Ли конечной размерности $r \leq n(n+1)/2$.*

Если функция $F = g_{ij}v^i v^j$ задает финслерову структуру на M, то любое движение обобщенного финслерова пространства $\mathcal{F}^n$ является движением и ассоциированного финслерова пространства $F^n = (M, F)$. Поэтому размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений также не превосходит $n(n+1)/2$. Как следует из теоремы Ванга [2], если финслерово пространство F^n допускает группу движений максимальной размерности $n(n+1)/2$, то оно является римановым пространством постоянной секционной кривизны.

Поэтому возникает естественный вопрос: *существуют ли пространства $\mathcal{F}^n$, отличные от римановых, с группой движений максимальной размерности?* Впервые на возможность существования таких пространств указал А. Моор [3]. Положительное решение гипотезы А. Моора дано в работе [1].

3. Естественным обобщением максимально подвижных пространств $\mathcal{F}^n$ являются локально конические пространства K^n, введенные в работе [4]. Такие пространства характеризуются тем, что метрика их касательных римановых пространств реализуется на n-мерном круговом конусе, вложенном в $(n+1)$-мерное евклидово или псевдоевклидово пространство. Метрика локально конического пространства K^n имеет вид:

$$ds^2 = \gamma_{ij}(x)dx^i dx^j + a(x)\frac{[\gamma_{ij}(x)v^i dx^j]^2}{\gamma_{ij}(x)v^i v^j}, \tag{9}$$

где $\gamma_{ij}(x)$ — компоненты (псевдо)риманова метрического тензора γ, $a(x) \neq -1$ — скалярная функция. определяющая "угол раствора" касательного конуса в точке $x \in M$. Пространства K^n являются регулярными обобщенными финслеровыми пространствами.

Явное выражение коэффициентов связности Картана и ее тензорной части имеют вид (см. [4]):

$$\mathit{\Gamma}^{*k}_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{kp}(\partial_i\gamma_{pj}+\partial_j\gamma_{ip}-\partial_p\gamma_{ij})+\frac{1}{2(a+1)u_p v^p}(v^k u_j\partial_i a+v^k u_i\partial_j a-u_i u_j\gamma^{kp}\partial_p a), \tag{10}$$

и

$$C^k_{ij} = \frac{a}{a+1}\left(\frac{v^k\gamma_{ij}}{u_p v^p} - \frac{v^k u_i u_j}{(u_p v^p)^2}\right) \tag{11}$$

соответственно. Здесь $u_i = \gamma_{ip} v^p$.

Теорема 2 *Векторное поле* $X = \xi^i \partial_i$ *является инфинитезимальным движением локально конического пространства* K^n *тогда и только тогда, когда метрический тензор* $\gamma(\gamma_{ij})$ *и скалярная функция* $a(x)$ *базисного многообразия* M *являются инвариантными относительно* X.

Доказательство Умножая метрический тензор

$$g_{ij} = \gamma_{ij} + a\frac{u_i u_j}{u_p v^p} \tag{12}$$

пространства K^n на $v^i v^j$ и суммируя, находим метрическую функцию ассоциированного финслерова пространства F^n:

$$F = (a+1)\gamma_{ij} v^i v^j \tag{13}$$

и метрический тензор f этого пространства

$$f_{ij} = \frac{1}{2}\dot{\partial}^2_{ij} F = (a+1)\gamma_{ij}. \tag{14}$$

Пусть теперь X — инфинитезимальное движение пространства K^n, т.е. производная Ли от метрического тензора (12) равна нулю: $\mathcal{L}_X g = 0$. Так как $\mathcal{L}_X v = 0$, то $\mathcal{L}_X F = 0$ и $\mathcal{L}_X f = 0$. Метрический тензор пространства K^n выразим через метрический тензор f ассоциированного финслерова пространства F^n. Для этого умножим (12) на $(a+1)$. В результате получим:

$$(a+1)g_{ij} = f_{ij} + a\frac{f_{ip} f_{js} v^p v^s}{f_{ps} v^p v^s}. \tag{15}$$

Беря от обеих частей (15) производную Ли вдоль X, получим:

$$g_{ij}\mathcal{L}_X a = \frac{(a+1)\gamma_{ip}\gamma_{js} v^p v^s}{\gamma_{ps} v^p v^s}\mathcal{L}_X a, \tag{16}$$

или

$$\left(\gamma_{ij} + a\frac{\gamma_{ip}\gamma_{js} v^p v^s}{\gamma_{ps} v^p v^s}\right)\mathcal{L}_X a = \frac{(a+1)\gamma_{ip}\gamma_{js} v^p v^s}{\gamma_{ps} v^p v^s}\mathcal{L}_X a. \tag{17}$$

Откуда следует, что

$$(\gamma_{ij}\gamma_{ps} - \gamma_{ip}\gamma_{js}) v^p v^s \mathcal{L}_X a = 0. \tag{18}$$

Умножая (18) на γ^{ij} и суммируя, получим:

$$(n-1)\gamma_{ps} v^p v^s \mathcal{L}_X a = 0, \tag{19}$$

откуда $\mathcal{L}_X a = 0$, а значит и $\mathcal{L}_X \gamma = 0$.

Обратно, из последних двух условий следует $\mathcal{L}_X g = 0$. □

Если группа движений пространства K^n транзитивна и $X_i = \xi_i^p \partial_p$ — n линейно независимых операторов сдвига этой группы, то из равенства $\xi_i^p \partial_p a = 0$ следует, что $a = \mathrm{const}$, так как $\mathrm{rang}||\xi_i^p|| = n$. Очевидно, что имеет место

Теорема 3 *Локально коническое пространство K^n допускает группу движений максимальной размерности $n(n+1)/2$ тогда и только тогда, когда риманово пространство $V^n = (M, \gamma)$ имеет постоянную секционную кривизну и $a(x) = \mathrm{const}$.*

4. Рассмотрим теперь обобщенное финслерово пространство $\mathcal{F}^n = (M, g)$ с метрикой [5]

$$g_{ij}(x,v) = e^{2\sigma(x,v)}\gamma_{ij}(x), \tag{20}$$

где $\gamma_{ij}(x)$ — компоненты риманова метрического тензора базисного многообразия M, $\sigma(x,v)$ — скалярная функция на касательном расслоении TM, однородная нулевой степени по координатам касательного вектора: $v^k \dot{\partial}_k \sigma = 0$.

Указанный класс пространств характеризуется тем, что их касательные римановы пространства являются конформно-евклидовыми. В работе [6] доказано, что обобщенное финслерово пространство с метрикой (20) является регулярным и найдено явное выражение коэффициентов евклидовой связности Картана.

Уравнения движений для пространств $\mathcal{F}^n$ с метрикой (20) имеют вид

$$\xi^k \partial_k \gamma_{ij} + 2(\xi^p \partial_p \sigma + y^p \partial_p \xi^k \dot{\partial}_k \sigma)\gamma_{ij} + \partial_i \xi^k \gamma_{kj} + \partial_j \xi^k \gamma_{ik} = 0. \tag{21}$$

Дифференцируя (21) по v^l и учитывая, что ξ^i и γ_{ij} не зависят от координат касательного вектора, получим:

$$\xi^p \partial_p \dot{\partial}_l \sigma + \partial_l \xi^k \dot{\partial}_k \sigma + v^p \partial_p \xi^k \dot{\partial}^2_{kl} \sigma = 0. \tag{22}$$

Уравнения (22) являются дифференциальными следствиями уравнений движений (21) и связывают компоненты ξ^k векторного поля инфинитезмального движения и скалярную функцию $\sigma(x,v)$.

Уравнения (21) запишем в виде:

$$\mathcal{L}_X \gamma_{ij} = -2\mathcal{L}_X \sigma \cdot \gamma_{ij}, \tag{23}$$

а уравнения (22) представим так:

$$\dot{\partial}_k(\mathcal{L}_X\sigma) = 0. \tag{24}$$

Из формулы (24) следует, что $\mathcal{L}_X\sigma$ не зависит от координат касательного вектора. Обозначив $-2\mathcal{L}_X\sigma = \varphi_X(x)$, уравнения (23) примут вид:

$$\mathcal{L}_X\gamma_{ij} = \varphi_X(x)\gamma_{ij}. \tag{25}$$

Уравнения (25) при $\varphi_X(x) = 0$ являются уравнениями движений риманова пространства $V^n = (M, \gamma)$, при $\varphi_X(x) = \mathrm{const} \neq 0$ — уравнениями подобных преобразований, а при $\varphi_X(x) \neq \mathrm{const}$ — уравнениями конформных преобразований этого пространства. Таким образом справедлива

Теорема 4 *Множество всех инфинитезимальных движений обобщенного финслерова пространства $\mathcal{F}^n = (M, g)$ с метрикой (20) является алгеброй Ли конечной размерности и любое движение этого пространства является либо движением, либо гомотетией, либо конформным преобразованием пространства $V^n = (M, \gamma)$.*

5. Пусть функция $F = e^{2\sigma}\gamma_{ij}v^iv^j$ определяет финслерову структуру, присоединенную к обобщенному финслерову пространству $\mathcal{F}^n$ с метрикой (20). Тогда имеет место

Теорема 5 *Размерность группы Ли G^r движений обобщенного финслерова пространства $\mathcal{F}^n$ с метрикой (20) не превосходит*

$$n(n-1)/2 + 1, \ \ (n > 2, n \neq 4).$$

Доказательство Так как любое движение пространства $\mathcal{F}^n$ является движением и ассоциированного финслерова пространства F^n, то как следует из доказательства теоремы Ванга [2] группа изотропий, действующая в T_xM является компактной и, следовательно, ортогональной. Известно, что не существует подгрупп ортогональной группы n-мерного векторного пространства $(n > 2, n \neq 4)$ размерности $r' > (n-1)(n-2)/2$, поэтому не существует и пространств $\mathcal{F}^n$ с группой движений размерности r, где $n(n-1)/2 + 1 < r < n(n+1)/2$. Следовательно, если $r > n(n-1)/2+1$, то $r = n(n+1)/2$. Но все обобщенные финслеровы пространства $\mathcal{F}^n$, допускающие группы движений размерности $n(n+1)/2$ были найдены в [4]. Для таких пространств необходимо должно выполняться равенство $v^p v^s \dot{\partial}_k g_{ps} = 0$. Но как легко проверить это равенство для метрики (20) не выполняется. Действительно, $\dot{\partial}_k g_{ps} = 2\dot{\partial}_k \sigma \cdot e^{2\sigma}\gamma_{ps}$ и $v^p v^s \dot{\partial}_k g_{ps} = 2v^p v^s e^{2\sigma}\gamma_{ps}\dot{\partial}_k \sigma \neq 0$, т.к. если $\dot{\partial}_k \sigma = 0$, то $\sigma = \sigma(x)$ и мы имеем риманово пространство. Таким образом, $r \leq n(n-1)/2 + 1$. $\square$

Теорема 6 *Максимальная размерность группы Ли движений G^r пространства $\mathcal{F}^n$ с метрикой (20) равна* $n(n-1)/2 + 1$.

Доказательство Рассмотрим обобщенное финслерово пространство с метрикой следующего вида

$$g_{ij} = e^{2\ln\sqrt{\frac{{y^2}^2 + \cdots + {y^n}^2}{{y^1}^2}}}\delta_{ij}.$$

Интегрируя уравнения движений для данной метрики, находим компоненты вектора инфинитезимального движения и базисные операторы

$$X_i = \partial_i, X_{\alpha\beta} = -x^\beta \partial_\alpha + x^\alpha \partial_\beta \; (\alpha, \beta = 2, \ldots, n; \alpha > \beta),$$

откуда следует, что $r = n(n-1)/2 + 1$. $\square$

Список литературы

1. Паньженский, В.И. О группах изометрий метрических пространств линейных элементов/ В.И. Паньженский// Пенз.гос.пед.ин-т. – Пенза, 1981. – 16с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 29.04.81. Деп.
2. Wang, H.S. On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing/ H.S. Wang// I.London Math Soc. – 1947. – 22. – pp.5-9.
3. Moor, A. Entwicklung einer Geometrie der allgemeiner metrischen Linienelement räume/ A.Moor// Acta scint.math. – 1956. – 17, N.1-2. – pp.85-120.
4. Паньженский, В.И. Некоторые вопросы геометрии метрических пространств линейных элементов/ В.И. Паньженский// Ленингр.гос.пед.ин-т. – Л., 1984. – 32с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 11.12.84. - N. 8179-84 Деп.
5. Watanabe, S. On metrical Finsler connections of generalised Finsler metric $g_{ij} = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$/ S.Watanabe, S.Ikeda, F.Ikeda// Tensor. – 1983. – 40. – pp.97-102.
6. Паньженский, В.И. К геометрии обобщенного финслерова пространства со спецальной метрикой/ В.И. Паньженский, О.П. Сурина// Изв.вузов. Математика. – 1996, N.2.– с.30-34.

В. И. Паньженский

Пензенский государственный педагогический университет, Пенза, Россия.

E-mail: sorokina_m@list.ru

О. П. Сурина
Пензенский государственный педагогический университет, Пенза, Россия.
E-mail: sorokina_m@list.ru

V. Panjenskiy, O. Surina

On motions in general Finsler spaces with special metrics

We investigate motions of the generalized Finsler spaces $\mathcal{F}^n$, for which metrics of the tangent spaces either are realized on n-dimensional circular cone or are conformly Euclidian. It is proved that maximal dimension of the Lie group of motions is equal $n(n+1)/2$ in first case and $n(n-1)/2+1$ in second one.

Mathematics Subject Classification (2000) 53B40 · 53C60 · 58J60

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(2) 85–102 $d\omega$

О вложении три-ткани, образованной слоениями разных размерностей, в три-ткань $W(r, r, r)$

Г. А. Толстихина

Аннотация Для три-ткани $W(r, r, r)$, образованной на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ тремя гладкими r-мерными слоениями, определено понятие подткани $\tilde{W}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, которая образована на некотором гладком подмногообразии $\tilde{V}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ размерности $\rho_1 + \rho_2$ тремя слоениями, вообще говоря, *разных* размерностей, $(\rho_3 \leq \rho_1 \leq \rho_2)$. Понятие подткани $\tilde{W}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ является обобщением понятия подткани $\tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$, слои которой высекаются слоями ткани $W(r, r, r)$ на трансверсальном подмногообразии $V^{2\rho}$ размерности 2ρ, $(\rho \leq r)$ [3].

Ключевые слова Три-ткань · Подткань · Трансверсальное подмногообразие

УДК 514.7

1 Введение

Согласно [3] гладкое 2ρ-мерное подмногообразие $V^{2\rho}$ многообразия $\mathcal{M}$, несущего ткань $W(r, r, r)$, называется *трансверсальным подмногообразием*, если у каждой точки p из $V^{2\rho}$ существует такая достаточно малая окрестность U_p в $\mathcal{M}$, в которой многообразие $V^{2\rho}$ пересекает каждый слой ткани $W(r, r, r)$, имеющий с $V^{2\rho}$ хотя бы одну общую точку, по подмногообразию размерности ρ. Слои ткани $W(r, r, r)$ высекают на трансверсальном подмногообразии $V^{2\rho}$ три-ткань $\tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$, образованную тремя слоениями ρ-мерных слоев. Эта три-ткань называется *подтканью* три-ткани $W(r,r,r)$. Заметим, что произвольная ткань $W(r,r,r)$ не обладает, вообще говоря, трансверсальными подмногообразиями и, следовательно, подтканями. Локальные условия их существования найдены в [3], см. также [4].

В п. 1 настоящей статьи мы определяем подткани $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ ткани $W(r,r,r)$, образованные тремя гладкими слоениями, вообще говоря, *разных* размерностей. При этом слои размерности ρ_α $(\alpha = 1,2,3)$ высекаются слоями слоения λ_α три-ткани $W(r,r,r)$ на подмногообразии $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3) \subset \mathcal{M}$ размерности $\rho_1+\rho_2$, которое является обобщением 2ρ-мерного трансверсального подмногообразия $V^{2\rho}$ ткани $W(r,r,r)$.

Уравнения вложения подмногообразия $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ в многообразие $\mathcal{M}$, несущее ткань $W(r,r,r)$, и уравнения слоений подткани $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ найдены в п. 2. Они обобщают уравнения слоений подткани $\tilde{W}(\rho,\rho,\rho)$ на трансверсальном подмногообразии $V^{2\rho}$, которое, как показано в [3], является *вполне геодезическим* в канонической аффинной связности $\mathit{\Gamma}$, индуцируемой на $\mathcal{M}$ тканью $W(r,r,r)$.

В п. 3 показано, что в случае $\rho_2 = r$ выполняется условие $\rho_1 = \rho_3 \equiv \rho$. Для подткани $\tilde{W}(\rho,r,\rho)$ мы находим структурные уравнения в некотором кобазисе, адаптированном к вложению трансверсального подмногообразия $\tilde{V}(\rho,r,\rho)$ в многообразие $\mathcal{M}$ (Предложение 3). В качестве примера рассмотрена групповая ткань $GW(2,2,2)$, порождаемая двумерной некоммутативной группой Ли G, и найдены уравнения всех ее подтканей типа $\tilde{W}(1,2,1)$.

В п. 3 показано также, что подмногообразие $\tilde{V}(\rho,r,\rho)$, в отличие от $V^{2\rho}$, не является, вообще говоря, вполне геодезическим в связности $\mathit{\Gamma}$. Условия, при которых $\tilde{V}(\rho,r,\rho)$ будет вполне геодезическим подмногообразием, найдены в п. 4, (см. Предложение 4). Приведен пример шестимерной левой ткани Бола $B_l(3,3,3)$, для которой существуют пятимерные вполне геодезические трансверсальные подмногообразия $\tilde{V}(2,3,2)$ и подткани типа $\tilde{W}(2,3,2)$.

1. Пусть $W(r,r,r)$ — три-ткань, образованная тремя гладкими r-мерными слоениями λ_1, λ_2 и λ_3 r-мерных слоев общего положения на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$.

Определение 1 *Подмногообразие $V^{\rho_1+\rho_2}$ размерности $\rho_1+\rho_2$ многообразия $\mathcal{M}$, несущего три-ткань $W(r,r,r)$, образованную слоени-*

ями λ_1, λ_2 *и* λ_3, *назовем* трансверсальным подмногообразием *этой ткани, если у каждой точки* p *из* $V^{\rho_1+\rho_2}$ *существует такая окрестность* U_p *в* $\mathcal{M}$, *в которой подмногообразие* $V^{\rho_1+\rho_2}$ *пересекает слои* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ *ткани* $W(r,r,r)$, $\mathcal{F}_1 \in \lambda_1$ *и* $\mathcal{F}_2 \in \lambda_2$, *имеющие с* $V^{\rho_1+\rho_2}$ *хотя бы одну общую точку, по подмногообразиям* $V_1^{\rho_1}$ *и* $V_2^{\rho_2}$ *размерности* ρ_1 *и* ρ_2 *соответственно.*

Будем считать, для определенности, что $\rho_1 \le \rho_2$, поэтому в общем случае

$$1 \le \rho_1 \le \rho_2 \le r. \qquad (1.1)$$

Найдем условия, при которых в окрестности U_p трансверсальное подмногообразие $V^{\rho_1+\rho_2}$ пересекает каждый слой $\mathcal{F}_3$ третьего слоения λ_3 ткани $W(r,r,r)$, имеющий с $V^{\rho_1+\rho_2}$ хотя бы одну общую точку, по некоторому подмногообразию $V_3^{\rho_3}$ размерности ρ_3.

Следуя [1], обозначим через T касательное пространство к многообразию $\mathcal{M}$ в точке p, а через T_1, T_2 и T_3 — касательные пространства к слоям $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$, проходящим через точку p. Касательное пространство к подмногообразию $V^{\rho_1+\rho_2}$ в точке p обозначим через $T^{\rho_1+\rho_2}$ ($\dim T^{\rho_1+\rho_2} = \rho_1+\rho_2$) и назовем его *трансверсальным* $(\rho_1+\rho_2)$-*подпространством.*

Обозначим через $T_1^{\rho_1}$ и $T_2^{\rho_2}$ касательные пространства к подмногообразиям $V_1^{\rho_1}$ и $V_2^{\rho_2}$ в точке p, $\dim T_1^{\rho_1} = \rho_1$, $\dim T_2^{\rho_2} = \rho_2$. Очевидно, что $T_1^{\rho_1} = T^{\rho_1+\rho_2} \cap T_1$, $T_2^{\rho_2} = T^{\rho_1+\rho_2} \cap T_2$.

Согласно [3] всякое подпространство T_α^ρ размерности ρ пространства T_α $(\alpha = 1,2,3)$ однозначно определяет 2ρ-мерное трансверсальное подпространство, которое обозначим $H(T_\alpha^\rho)$. Оно пересекает пространства T_β и T_γ также по ρ-мерным подпространствам T_β^ρ и T_γ^ρ соответственно ($\beta,\gamma = 1,2,3$, $\alpha \ne \beta \ne \gamma$), так что $H(T_\alpha^\rho) \equiv H(T_\beta^\rho) \equiv H(T_\gamma^\rho)$. При этом T_β^ρ получается проектированием пространства T_α^ρ на пространство T_β параллельно пространству T_γ.

Определенные выше касательные пространства $T_1^{\rho_1}$ и $T_2^{\rho_2}$ порождают трансверсальные подпространства $H(T_1^{\rho_1})$ и $H(T_2^{\rho_2})$ соответственно, которые, вообще говоря, не совпадают.

Лемма 1 *Трансверсальное подпространство* $T^{\rho_1+\rho_2}$ *касательного пространства* T *к многообразию* $\mathcal{M}$, *несущему три-ткань* $W(r,r,r)$, *пересекает касательное пространство* T_3 *по* ρ_3*-мерному подпространству* $T_3^{\rho_3}$, $(\rho_3 \ge 1)$, *в том и только в том случае, если*

$$H(T_3^{\rho_3}) = H(T_1^{\rho_1}) \cap H(T_2^{\rho_2}). \qquad (1.2)$$

Доказательство Пусть $T^{\rho_1+\rho_2}$ пересекает T_3 по некоторому подпространству $T_3^{\rho_3}$ размерности ρ_3. Последнее определяет в T $2\rho_3$-мерное трансверсальное подпространство $H(T_3^{\rho_3})$. Покажем, что

$$H(T_3^{\rho_3}) \subseteq H(T_1^{\rho_1}) \cap H(T_2^{\rho_2}). \tag{1.3}$$

Рассмотрим в $T^{\rho_1+\rho_2}$ подпространство T_{23}, натянутое на плоскости $T_2^{\rho_2}$ и $T_3^{\rho_3}$. Оно имеет размерность $\rho_2+\rho_3$ и пересекает $T_1^{\rho_1}$ по ρ_3-мерному подпространству, которое обозначим $T_1^{\rho_3}$, ($\dim T_1^{\rho_3} = \rho_2+\rho_3+\rho_1-(\rho_1+\rho_2) = \rho_3$). Теперь рассмотрим в T_{23} подпространство размерности $2\rho_3$, натянутое на $T_1^{\rho_3}$ и $T_3^{\rho_3}$. Оно пересекает $T_2^{\rho_2}$ также по ρ_3-мерному подпространству $T_2^{\rho_3}$, ($\dim T_2^{\rho_3} = 2\rho_3+\rho_2-(\rho_2+\rho_3) = \rho_3$). Итак, мы получили, что ρ_3-мерные пространства $T_1^{\rho_3}$, $T_2^{\rho_3}$ и $T_3^{\rho_3}$ лежат в одном $2\rho_3$-мерном подпространстве, которое пересекает каждое из пространств T_α по ρ_3-мерному подпространству $T_\alpha^{\rho_3}$. Отсюда вытекает, что $H(T_1^{\rho_3}) = H(T_2^{\rho_3}) = H(T_3^{\rho_3})$. Так как $T_1^{\rho_3}$ лежит в $T_1^{\rho_1}$, то $H(T_1^{\rho_3})$ будет подпространством в $H(T_1^{\rho_1})$, значит, $H(T_3^{\rho_3}) \subseteq H(T_1^{\rho_1})$. С другой стороны, $H(T_3^{\rho_3}) \subseteq H(T_2^{\rho_2})$, поскольку $H(T_3^{\rho_3}) = H(T_2^{\rho_3})$, а $T_2^{\rho_3}$ лежит в $T_2^{\rho_2}$. Поэтому верно (1.3).

Обратно, пусть $H(T_1^{\rho_1})$ и $H(T_2^{\rho_2})$ пересекаются по некоторому подпространству $\tilde{H}$ размерности $2\tilde{\rho}$. Тогда $\tilde{H}$ пересекает $T_1^{\rho_1}$, $T_2^{\rho_2}$ и T_3 по подпространствам одинаковой размерности $\tilde{\rho}$, обозначим их $T_1^{\tilde{\rho}}$, $T_2^{\tilde{\rho}}$ и $T_3^{\tilde{\rho}}$ соответственно. При этом $H(T_1^{\tilde{\rho}}) = H(T_2^{\tilde{\rho}}) = H(T_3^{\tilde{\rho}}) = \tilde{H}$. Поскольку $\tilde{H}$ лежит в $T^{\rho_1+\rho_2}$, то $T_3^{\tilde{\rho}}$ лежит в $T_3^{\rho_3}$, где $T_3^{\rho_3} = T^{\rho_1+\rho_2} \cap T_3$. Поэтому $H(T_3^{\tilde{\rho}})$ — подпространство в $H(T_3^{\rho_3})$. Так как $H(T_3^{\tilde{\rho}}) = \tilde{H} = H(T_1^{\rho_1}) \cap H(T_2^{\rho_2})$, то получаем

$$H(T_1^{\rho_1}) \cap H(T_2^{\rho_2}) \subseteq H(T_3^{\rho_3}). \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует равенство (1.2). $\square$

Следствие 1 *Пусть* $\dim T_3^{\rho_3} > 0$, *тогда трансверсальные подпространства* $H(T_1^{\rho_1})$, $H(T_2^{\rho_2})$ *и* $H(T_3^{\rho_3})$ *касательного пространства* T *три-ткани* $W(r,r,r)$ *пересекают касательное пространство* T_α ($\alpha = 1,2,3$) *по подпространствам* $T_\alpha^{\rho_1}$, $T_\alpha^{\rho_2}$ *и* $T_\alpha^{\rho_3}$ *соответственно, причем*

$$T_\alpha^{\rho_3} = T_\alpha^{\rho_1} \cap T_\alpha^{\rho_2}. \tag{1.5}$$

Из (1.5) с учетом (1.1) следует, что размерности ρ_1, ρ_2 и ρ_3 подпространств $T_\alpha^{\rho_1}$, $T_\alpha^{\rho_2}$ и $T_\alpha^{\rho_3}$ удовлетворяет условиям:

$$\rho_3 \le \rho_1 \le \rho_2 \le r, \quad \rho_3 \le \rho_1+\rho_2-\rho_3 \le r.$$

Отметим, что при $\rho_3 = \rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ получается 2ρ-мерное трансверсальное подпространство $H(T^\rho_\alpha) \equiv T^{2\rho}$ [3].

Далее предполагаем, что $\rho_3 \geq 1$, то есть $T^{\rho_1+\rho_2}$ пересекает T_3, по крайней мере, по прямой. В этом случае на всяком трансверсальном подмногообразии $V^{\rho_1+\rho_2}$ (если оно существует) слои третьего слоения ткани $W(r,r,r)$ высекают слои размерности ρ_3, обозначим их $V_3^{\rho_3}$. Такие подмногообразия $V^{\rho_1+\rho_2}$ будем обозначать $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, так что $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3) \cap \mathcal{F}_3 = V_3^{\rho_3}$. Согласно определению 1,

$$\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3) \cap \mathcal{F}_1 = V_1^{\rho_1}, \quad \tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3) \cap \mathcal{F}_2 = V_2^{\rho_2}.$$

Слоения подмногообразий $V_1^{\rho_1}$, $V_2^{\rho_2}$ и $V_3^{\rho_3}$ размерности ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно на трансверсальном подмногообразии $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ обозначим через $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ соответственно. Согласно [2] (см. также [7]), эти слоения образуют некоторую три-ткань, обозначим ее $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$.

Таким образом, верно

Предложение 1 *На всяком трансверсальном подмногообразии $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ размерности $\rho_1+\rho_2$ (если оно существует) слои ткани $W(r,r,r)$ высекают три-ткань $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, образованную слоениями $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$.*

Определение 2 *Назовем три-ткань $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$* подтканью *три-ткани $W(r,r,r)$.*

В случае $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \equiv \rho$ получаем 2ρ-мерное трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(\rho,\rho,\rho) \equiv V^{2\rho}$ ткани $W(r,r,r)$, на котором слоями ткани высекается подткань $\tilde{W}(\rho,\rho,\rho)$ [3]. В частности, при $\rho = 1$ получается криволинейная подткань $\tilde{W}(1,1,1)$ на двумерном подмногообразии V^2, см. о ней в [1].

2. Допустим, что на ткани $W(r,r,r)$ существует трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$. Найдем уравнения его вложения в многообразие $\mathcal{M}$, несущее ткань $W(r,r,r)$, и уравнения слоений соответствующей подткани $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$.

Пусть векторы $\{\underset{1}{e}_i,\ \underset{2}{e}_i\}$, $i = \overline{1,r}$, образуют базис касательного пространства T, причем $\underset{1}{e}_i \in T_1$, $\underset{2}{e}_i \in T_2$, $\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i = \underset{3}{e}_i \in T_3$. В T_1, T_2 и T_3 рассмотрим подпространства $T_1^{\rho_1}$, $T_2^{\rho_2}$ и $T_3^{\rho_3}$, которые высекаются на них трансверсальным подпространством $T^{\rho_1+\rho_2}$. Обозначим их базисы через $\underset{1}{\xi}_a$ $(a = \overline{1,\rho_1})$, $\underset{2}{\xi}_\mu$ $(\mu = \overline{1,\rho_2})$ и $\underset{3}{\xi}_s$ $(s = \overline{1,\rho_3})$ соответственно.

Тогда
$$\underset{1}{\xi}_a = \underset{1}{\xi}{}^i_a \underset{1}{e}_i, \quad \underset{2}{\xi}_\mu = \underset{2}{\xi}{}^i_\mu \underset{2}{e}_i, \quad \underset{3}{\xi}_s = \xi^i_s(\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i), \tag{2.1}$$
причем $\operatorname{rank}(\underset{1}{\xi}{}^i_a) = \rho_1$, $\operatorname{rank}(\underset{2}{\xi}{}^i_\mu) = \rho_2$, $\operatorname{rank}(\xi^i_s) = \rho_3$. Так как по Лемме 1 векторы $\underset{3}{\xi}_s$ лежат в пересечении трансверсальных подпространств $H(T_1^{\rho_1})$ и $H(T_2^{\rho_2})$, то из (2.1) следует, что векторы $\xi^i_s \underset{1}{e}_i$ лежат в $T_1^{\rho_1}$, а $\xi^i_s \underset{2}{e}_i$ — в $T_2^{\rho_2}$. Включим эти векторы в базисы соответствующих пространств, тогда $(\underset{1}{\xi}_a) = (\xi_s, \underset{1}{\xi}_{\bar a})$, $(\underset{2}{\xi}_\mu) = (\xi_s, \underset{2}{\xi}_{\bar\mu})$, где
$$\underset{1}{\xi}_s = \xi^i_s \underset{1}{e}_i, \quad \underset{1}{\xi}_{\bar a} = \underset{1}{\xi}{}^i_{\bar a} \underset{1}{e}_i; \quad \underset{2}{\xi}_s = \xi^i_s \underset{2}{e}_i, \quad \underset{2}{\xi}_{\bar\mu} = \underset{2}{\xi}{}^i_{\bar\mu} \underset{2}{e}_i, \tag{2.2}$$
$\bar a = \overline{\rho_3 + 1, \rho_1}$, $\bar\mu = \overline{\rho_3 + 1, \rho_2}$.

Таким образом, в любой точке $p \in \mathcal{M}$ семейство трансверсальных подпространств $T^{\rho_1+\rho_2}$, каждое из которых пересекает пространство T_3 по ρ_3-мерной плоскости $T_3^{\rho_3}$, зависит от $(\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)r$ параметров ξ^i_s, $\underset{1}{\xi}{}^i_{\bar a}$, $\underset{2}{\xi}{}^i_{\bar\mu}$. В случае $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \equiv \rho$ получаем семейство трансверсальных подпространств $T^{2\rho}$, которое зависит от ρr параметров ξ^i_s [3], а при $\rho = 1$ — от r параметров ξ^i [1].

Следуя [1], зададим слоения λ_1, λ_2 и λ_3 ткани $W(r, r, r)$ соответственно уравнениями:
$$\lambda_1 : \ \underset{1}{\omega}{}^i = 0, \quad \lambda_2 : \ \underset{2}{\omega}{}^i = 0, \quad \lambda_3 : \ \underset{3}{\omega}{}^i \overset{def}{\equiv} \underset{1}{\omega}{}^i + \underset{2}{\omega}{}^i = 0. \tag{2.3}$$
Формы $\{\underset{1}{\omega}{}^i, \underset{2}{\omega}{}^i\}$ образуют на $\mathcal{M}$ кобазис, дуальный базису $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_i\}$, и удовлетворяют следующим структурным уравнениям [1]:
$$d\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k, \ d\underset{2}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k, \tag{2.4}$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}{}^k \wedge \underset{2}{\omega}{}^l \tag{2.5}$$
(здесь и всюду далее $i, j, k, ... = \overline{1, r}$). Величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани $W(r, r, r)$.

Пусть ξ — произвольный вектор из касательного пространства T точки $p \in \mathcal{M}$. Из (2.3) следует, что этот вектор может быть записан в виде
$$\xi = \underset{1}{\omega}{}^i \underset{2}{e}_i - \underset{2}{\omega}{}^i \underset{1}{e}_i. \tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим касательное пространство $T^{\rho_1+\rho_2}$ к трансверсальному подмногообразию $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ три-ткани $W(r,r,r)$ в точке $p\in\mathcal{M}$. Пусть, как и выше, базис в $T^{\rho_1+\rho_2}$ образуют векторы $\underset{1}{\xi}_a$ и $\underset{2}{\xi}_\mu$, $(a=\overline{1,\rho_1},\ \mu=\overline{1,\rho_2})$. Тогда для любого вектора $\xi\in T^{\rho_1+\rho_2}$ имеем:

$$\xi=\underset{1}{\Theta}{}^\mu\underset{2}{\xi}_\mu-\underset{2}{\Theta}{}^a\underset{1}{\xi}_a, \tag{2.7}$$

где формы $\underset{1}{\Theta}{}^\mu$ и $\underset{2}{\Theta}{}^a$ образуют кобазис на $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, дуальный базису $\underset{2}{\xi}_\mu$, $\underset{1}{\xi}_a$. Из уравнений (2.6) и (2.7) с учетом (2.1) и в силу независимости векторов $\underset{1}{e}_i$, $\underset{2}{e}_i$ получаем уравнения

$$\underset{1}{\omega}{}^i=\underset{2}{\xi}{}^i_\mu\,\underset{1}{\Theta}{}^\mu,\quad \underset{2}{\omega}{}^i=\underset{1}{\xi}{}^i_a\,\underset{2}{\Theta}{}^a. \tag{2.8}$$

Так как $(\underset{1}{\xi}{}^i_a)=(\xi^i_s,\underset{1}{\xi}{}^i_{\bar{a}})$, $(\underset{2}{\xi}{}^i_\mu)=(\xi^i_s,\underset{2}{\xi}{}^i_{\bar{\mu}})$, то справедлива

Лемма 2 *Вложение любого трансверсального подмногообразия $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ размерности $\rho_1+\rho_2$ три-ткани $W(r,r,r)$ (если оно существует) в многообразие $\mathcal{M}$ размерности $2r$ может быть задано уравнениями*

$$\underset{1}{\omega}{}^i=\xi^i_s\underset{1}{\Theta}{}^s+\underset{2}{\xi}{}^i_{\bar{\mu}}\underset{1}{\Theta}{}^{\bar{\mu}},\quad \underset{2}{\omega}{}^i=\xi^i_s\underset{2}{\Theta}{}^s+\underset{1}{\xi}{}^i_{\bar{a}}\underset{2}{\Theta}{}^{\bar{a}}, \tag{2.9}$$

где $rank(\xi^i_s)=\rho_3$, $rank(\underset{2}{\xi}{}^i_{\bar{\mu}})=\rho_2-\rho_3$, $rank(\underset{1}{\xi}{}^i_{\bar{a}})=\rho_1-\rho_3$.

Согласно Предложению 1 на всяком трансверсальном подмногообразии $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ слои первого, второго и третьего слоений ткани $W(r,r,r)$ высекают подткань $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, образованную слоями размерностей ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно. Из (2.3) и (2.9) вытекает

Предложение 2 *На трансверсальном подмногообразии $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ слоения подткани $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ определяются уравнениями:*

$$\begin{aligned}&\tilde{\lambda}_1:\ \underset{1}{\Theta}{}^s=0,\ \underset{1}{\Theta}{}^{\bar{\mu}}=0;\quad \tilde{\lambda}_2:\ \underset{2}{\Theta}{}^s=0,\ \underset{2}{\Theta}{}^{\bar{a}}=0;\\ &\tilde{\lambda}_3:\ \underset{1}{\Theta}{}^s+\underset{2}{\Theta}{}^s=0,\ \underset{1}{\Theta}{}^{\bar{\mu}}=0,\ \underset{2}{\Theta}{}^{\bar{a}}=0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Условия существования подткани $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ равносильны условиям существования подмногообразия $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, то есть условиям интегрируемости системы (2.9). Отметим, что если уравнения (2.9) вполне интегрируемы на всем многообразии $\mathcal{M}$, то на $\mathcal{M}$ возникает слоение подмногообразий $\tilde{V}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

В случае $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \equiv \rho$ уравнения (2.9) вложения 2ρ-мерного трансверсального подмногообразия $V^{2\rho}$ в многообразие $\mathcal{M}$ принимают вид:

$$\underset{1}{\omega}^i = \xi_a^i \underset{1}{\Theta}^a, \quad \underset{2}{\omega}^i = \xi_a^i \underset{2}{\Theta}^a, \quad a = \overline{1, \rho}, \tag{2.11}$$

а слои подткани $\tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$, высекаемой на $V^{2\rho}$ слоями три-ткани $W(r, r, r)$, будут определяться уравнениями

$$\underset{1}{\Theta}^a = 0, \quad \underset{2}{\Theta}^a = 0, \quad \underset{1}{\Theta}^a + \underset{2}{\Theta}^a = 0 \tag{2.12}$$

(см. [3]). Согласно [3], структурные уравнения подткани $\tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\Theta}^a &= \underset{1}{\Theta}^b \wedge \Theta_b^a + \tilde{a}_{bc}^a \underset{1}{\Theta}^b \wedge \underset{1}{\Theta}^c, \\ d\underset{2}{\Theta}^a &= \underset{2}{\Theta}^b \wedge \Theta_b^a - \tilde{a}_{bc}^a \underset{2}{\Theta}^b \wedge \underset{2}{\Theta}^c, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$d\Theta_b^a = \Theta_b^c \wedge \Theta_c^a + \tilde{b}_{bcd}^a \underset{1}{\Theta}^c \wedge \underset{2}{\Theta}^d, \tag{2.14}$$

где $a, b, c, \dots = \overline{1, \rho}$, а величины $\tilde{a}_{bc}^a$ и $\tilde{b}_{bcd}^a$ являются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани $\tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$.

Дифференциальные следствия уравнений (2.11) приводятся в [3] к виду:

$$\nabla \xi_a^i \equiv d\xi_a^i + \xi_a^j \omega_j^i = \xi_b^i \Theta_a^b, \tag{2.15}$$

$$a_{jk}^i \xi_b^j \xi_c^k = \xi_a^i \tilde{a}_{bc}^a. \tag{2.16}$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в канонической аффинной связности Γ, определяемой согласно [1] на многообразии $\mathcal{M}$ формами $\omega^I = (\underset{1}{\omega}^i, \underset{2}{\omega}^i)$ и

$$\omega_J^I = \begin{pmatrix} \omega_j^i & 0 \\ 0 & \omega_j^i \end{pmatrix}, \ I, J = \overline{1, 2r}.$$

Из уравнений (2.11) и (2.15) следует, что трансверсальное подмногообразие $V^{2\rho}$ многообразия $\mathcal{M}$ является вполне геодезическим подмногообразием в связности Γ [3]. При этом слои подткани $\tilde{W}(\rho, \rho, \rho)$ также являются вполне геодезическими подмногообразиями, поскольку они получаются пересечением вполне геодезических подмногообразий: слоев ткани $W(r, r, r)$ и ее трансверсального подмногообразия $V^{2\rho}$.

3. Вернемся к рассмотрению трансверсальных подмногообразий общего вида $\tilde{V}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$. Пусть $\rho_2 = r$. Тогда из (1.5) находим:

$$T_\alpha^{\rho_3} = T_\alpha^{\rho_1} \cap T_\alpha^{\rho_2} = T_\alpha^{\rho_1} \cap T_\alpha^{r} = T_\alpha^{\rho_1},$$

поэтому $\rho_3 = \rho_1 \equiv \rho$. В этом случае получаем трансверсальное подмногообразие типа $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$. Согласно определению 1,

$$\tilde{V}(\rho, r, \rho) \cap \mathcal{F}_1 = V_1^\rho,\ \tilde{V}(\rho, r, \rho) \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2,\ \tilde{V}(\rho, r, \rho) \cap \mathcal{F}_3 = V_3^\rho,$$

поэтому $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ представляет собой ρ-параметрическое семейство r-мерных слоев $\mathcal{F}_2$ второго слоения три-ткани $W(r, r, r)$. Из уравнений (2.9) вложения подмногообразия $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ в многообразие $\mathcal{M}$ останется только вторая серия уравнений, которая теперь запишется так:

$$\underset{2}{\omega}^i = \xi_a^i \underset{2}{\Theta}^a, \quad a = \overline{1, \rho}, \tag{3.1}$$

причем $\operatorname{rank}(\xi_a^i) = \rho$.

Внешнее дифференцирование уравнений (3.1) приводит к уравнениям

$$(d\xi_a^i + \xi_a^j \omega_j^i - a_{jk}^i \xi_a^j \xi_b^k \underset{2}{\Theta}^b) \wedge \underset{2}{\Theta}^a + \xi_a^i d\underset{2}{\Theta}^a = 0, \tag{3.2}$$

$a, b, c, \dots = \overline{1, \rho}$. Отсюда следует, что на $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ выполняются равенства

$$d\underset{2}{\Theta}^a = \underset{2}{\Theta}^b \wedge \Theta_b^a, \tag{3.3}$$

где Θ_b^a— некоторые дифференциальные формы. Подставляя (3.3) в (3.2) и применяя лемму Картана, получим уравнения

$$d\xi_a^i + \xi_a^j \omega_j^i - \xi_b^i \Theta_a^b = (a_{jk}^i \xi_a^j \xi_b^k + \lambda_{ab}^i) \underset{2}{\Theta}^b, \tag{3.4}$$

где $\lambda_{ab}^i = \lambda_{ba}^i$. Эти уравнения могут быть записаны также в виде

$$\nabla \xi_a^i \equiv d\xi_a^i + \xi_a^j \omega_j^i = \xi_b^i \Theta_a^b + (a_{jk}^i \xi_a^j \xi_b^k + \lambda_{ab}^i) \underset{2}{\Theta}^b. \tag{3.5}$$

Из (3.5) видно, что трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$, в отличие от $\tilde{V}(\rho, \rho, \rho) \equiv V^{2\rho}$, не является, вообще говоря, вполне геодезическим в связности Γ (сравни с (2.15)).

Согласно Предложению 1 слои ткани $W(r, r, r)$ высекают на подмногообразии $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ подткань $\tilde{W}(\rho, r, \rho)$, слоения которой в силу (2.3) и (3.1) определяются уравнениями:

$$\tilde{\lambda}_1 :\ \underset{1}{\omega}^i = 0; \quad \tilde{\lambda}_2 :\ \underset{2}{\Theta}^a = 0; \quad \tilde{\lambda}_3 :\ \underset{3}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^i + \xi_a^i \underset{2}{\Theta}^a = 0. \tag{3.6}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти уравнения являются вполне интегрируемыми на подмногообразии $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ в силу (2.4), (3.3) и (3.5). Доказана

Лемма 3 *На трансверсальном подмногообразии* $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$, *заданном уравнениями (3.1), слои ткани* $W(r, r, r)$ *высекают подткань* $\tilde{W}(\rho, r, \rho)$, *образованную слоениями (3.6).*

Найдем уравнения подмногообразия $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ и уравнения слоений подткани $\tilde{W}(\rho, r, \rho)$ в некотором специальном корепере дифференциальных 1-форм на многообразии $\mathcal{M}$. Для этого введем формы $\underset{2}{\Theta}^a$ в кобазис форм на многообразии $\mathcal{M}$, то есть положим $\underset{2}{\omega}^a = \underset{2}{\Theta}^a$. Тогда из уравнений (3.1) получим соотношения $\xi_a^b = \delta_a^b$, при этом (3.1) примут вид: $\underset{2}{\omega}^u = \xi_a^u \underset{2}{\omega}^a$. Теперь включим в кобазис на $\mathcal{M}$ формы $\underset{2}{\omega}^u - \xi_a^u \underset{2}{\omega}^a$, тогда в новом корепере $\xi_a^u = 0$ и подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ будет задано на $\mathcal{M}$ уравнениями

$$\underset{2}{\omega}^u = 0. \tag{3.7}$$

Кобазис дифференциальных 1-форм на многообразии $\mathcal{M}$, в котором подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ задается уравнениями (3.7), назовем адаптированным к вложению в $\mathcal{M}$ подмногообразия $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$.

В адаптированном кобазисе уравнения (3.5) принимают вид:

$$\omega_a^b = \Theta_a^b + (a_{ac}^b + \lambda_{ac}^b)\underset{2}{\omega}^c, \quad \omega_a^u = (a_{ab}^u + \lambda_{ab}^u)\underset{2}{\omega}^b. \tag{3.8}$$

С учетом (3.8) перепишем структурные уравнения (2.4) три-ткани $W(r, r, r)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^a + a_{jk}^a \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\
d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^a \wedge ((a_{ab}^u + \lambda_{ab}^u)\underset{2}{\omega}^b) + \underset{1}{\omega}^v \wedge \omega_v^u + a_{jk}^u \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\
d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^a - a_{jk}^a \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\
d\underset{2}{\omega}^u &= \underset{2}{\omega}^v \wedge (\omega_v^u - 2a_{va}^u \underset{2}{\omega}^a - a_{vw}^u \underset{2}{\omega}^w).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Уравнения (3.6) слоений подткани $\tilde{W}(\rho, r, \rho)$ приводятся в адаптированном кобазисе к виду:

$$\tilde{\lambda}_1 : \ \underset{1}{\omega}^i = 0; \quad \tilde{\lambda}_2 : \ \underset{2}{\omega}^a = 0; \quad \tilde{\lambda}_3 : \ \underset{3}{\omega}^a = \underset{1}{\omega}^a + \underset{2}{\omega}^a = 0, \ \underset{3}{\omega}^u = \underset{1}{\omega}^u = 0. \tag{3.10}$$

Структурные уравнения подткани $\tilde{W}(\rho, r, \rho)$ получаются подстановкой (3.7) в (3.9):

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^a + a_{jk}^a \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^a \wedge ((a_{ab}^u + \lambda_{ab}^u)\underset{2}{\omega}^b) + \underset{1}{\omega}^v \wedge \omega_v^u + a_{jk}^u \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^b \wedge \omega_b^a - a_{bc}^a \underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Доказано

Предложение 3 *В адаптированном кобазисе трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ задается уравнениями (3.7), слоения подткани $\tilde{W}(\rho, r, \rho)$ определяются уравнениями (3.10), а ее структурные уравнения приводятся к виду (3.11).*

Пример 1 *Найдем уравнения подткани $\tilde{W}(1, 2, 1)$ четырехмерной групповой три-ткани $GW(2, 2, 2)$, порождаемой двумерной некоммутативной группой Ли G. Структурный тензор последней приводится к виду [5]: $c_{12}^1 = 1$, $c_{12}^2 = 0$. Согласно [1], структурные уравнения ткани $GW(2, 2, 2)$ на четырехмерном многообразии $\mathcal{M} = G \times G^{-1}$ могут быть записаны так:*

$$\begin{aligned} &d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2, \; d\underset{2}{\omega}^1 = -\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2, \\ &d\underset{1}{\omega}^2 = 0, \qquad\quad d\underset{2}{\omega}^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$\underset{1}{\omega}^1 = e^{-u^2} du^1, \; \underset{1}{\omega}^2 = du^2, \; \underset{2}{\omega}^1 = e^{v^2} dv^1, \; \underset{2}{\omega}^2 = dv^2, \tag{3.13}$$

где u^1, u^2, v^1, v^2 — локальные координаты на $\mathcal{M}$. Подставляя (3.13) в (2.3), найдем уравнения слоений три-ткани $GW(2, 2, 2)$:

$$\begin{gathered} \lambda_1 : \; du^1 = 0, \; du^2 = 0; \quad \lambda_2 : \; dv^1 = 0, \; dv^2 = 0; \\ \lambda_3 : \; e^{-u^2} du^1 + e^{v^2} dv^1 = 0, \; du^2 + dv^2 = 0. \end{gathered}$$

Интегрируя последние, находим:

$$\begin{gathered} \lambda_1 : \; u^1 = x^1, \; u^2 = x^2; \quad \lambda_2 : \; v^1 = y^1, \; v^2 = y^2; \\ \lambda_3 : \; e^{-z^2} u^1 + v^1 = z^1, \; u^2 + v^2 = z^2; \end{gathered} \tag{3.14}$$

где (x^1, x^2), (y^1, y^2) и (z^1, z^2) — постоянные интегрирования — параметры слоев ткани. Исключая из уравнений (3.14) локальные координаты u^1, u^2, v^1, v^2 и полагая

$$e^{-x^2} x^1 = \tilde{x}^1, \tag{3.15}$$

получим уравнения три-ткани $GW(2,2,2)$ в виде:

$$z^1 = e^{-y^2}\tilde{x}^1 + y^1, \quad z^2 = x^2 + y^2. \tag{3.16}$$

Допустим, что на ткани $GW(2,2,2)$ существует трехмерное трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(1,2,1)$. Уравнения его вложения в многообразие $\mathcal{M}$ получаются из (3.1) при $\rho = 1$, $r = 2$ и имеют вид:

$$\underset{2}{\omega}^1 = \xi_1^1 \underset{2}{\Theta}^1, \quad \underset{2}{\omega}^2 = \xi_1^2 \underset{2}{\Theta}^1, \tag{3.17}$$

где ξ_1^1 и ξ_1^2 не равны нулю одновременно.

1) Пусть $\xi_1^1 \neq 0$. Положим $\lambda = \xi_1^2/\xi_1^1$ и исключим из системы (3.17) форму $\underset{2}{\Theta}^1$. Получим уравнение $\underset{2}{\omega}^2 = \lambda \underset{2}{\omega}^1$, или, с учетом (3.13),

$$dv^2 = \lambda e^{v^2} dv^1. \tag{3.18}$$

Дифференцируя, имеем: $d\lambda \wedge dv^1 = 0$, поэтому $\lambda = \lambda(v^1)$. Интегрируя (3.18), найдем:

$$v^2 = -\ln\left(\int \lambda(v^1)dv^1 + \lambda_0\right), \quad \lambda_0 = const.$$

Отсюда с учетом (3.14) получаем уравнение трансверсального подмногообразия $\tilde{V}(1,2,1)$ в виде:

$$y^2 = -\ln\left(\int \lambda(y^1)dy^1 + \lambda_0\right) \equiv \varphi(y^1). \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.16), найдем уравнения подткани $\tilde{W}(1,2,1)$ в виде:

$$\begin{aligned} z^1 &= e^{-\varphi(y^1)}\tilde{x}^1 + y^1, \\ z^2 &= x^2 + \varphi(y^1). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Покажем, что подткань $\tilde{W}(1,2,1)$ не является, вообще говоря, групповой в смысле работы [6]. Для этого найдем ее структурные уравнения. Продифференцируем уравнения (3.20) и положим:

$$\underset{1}{\theta}^1 = e^{-\varphi(y^1)} d\tilde{x}^1, \quad \underset{1}{\theta}^2 = dx^2, \quad \underset{2}{\theta}^1 = (1 - \tilde{x}^1 e^{-\varphi(y^1)}\varphi'(y^1))dy^1. \tag{3.21}$$

Дифференцируя (3.21), получим:

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\theta}^1 = \underset{1}{\theta}^1 \wedge \theta_1^1, \quad d\underset{1}{\theta}^2 = 0, \quad d\underset{2}{\theta}^1 = \underset{2}{\theta}^1 \wedge \theta_1^1, \\ d\theta_1^1 = b_{111}^1 \underset{1}{\theta}^1 \wedge \underset{2}{\theta}^1, \end{gathered} \tag{3.22}$$

где обозначено:

$$\theta^1_1 = \frac{\varphi'(y^1)}{1 - \tilde{x}^1 e^{-\varphi(y^1)}\varphi'(y^1)}(\underset{1}{\theta^1} + \underset{2}{\theta^1}), \tag{3.23}$$

$$b^1_{111} = \frac{(\varphi'(y^1))^2 - \varphi''(y^1)}{(1 - \tilde{x}^1 e^{-\varphi(y^1)}\varphi'(y^1))^3}. \tag{3.24}$$

Здесь величина $b^1_{111} \equiv b$ *является единственной ненулевой компонентой тензора кривизны подткани* $\tilde{W}(1,2,1)$*, см. [6]. Согласно [6] ткань* $\tilde{W}(1,2,1)$ *будет групповой в том и только в том случае, если* $b = 0$*. Так как, вообще говоря,* $b \neq 0$ *(см. (3.24)), то подткань* $\tilde{W}(1,2,1)$*, вообще говоря, групповой не является.*

Найдем вид функции φ*, для которой* $b = 0$*. Из (3.24) получим равенство:*

$$\varphi''(y^1) = (\varphi'(y^1))^2.$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi(y^1) = -\ln(-C_1 y^1 - C_2), \quad C_1 = const, \quad C_2 = const. \tag{3.25}$$

Таким образом, подткань $\tilde{W}(1,2,1)$ *будет групповой в том и только в том случае, если в ее уравнениях (3.20) функция* φ *имеет вид (3.25).*

Подставим (3.25) в (3.20) и в полученных уравнениях положим:

$$\begin{array}{l} \tilde{x}^1 = e^{\bar{x}^1} + 1/C_1, \quad x^2 = -\ln \bar{x}^2 - \bar{x}^1, \\ y^1 = -e^{\bar{y}^1}/C_1 - C_2/C_1, \\ z^1 = e^{\bar{z}^1} - C_2/C_1, \quad z^2 = -\ln \bar{z}^2 - \bar{z}^1. \end{array} \tag{3.26}$$

Этим изотопическим преобразованием уравнения групповой подткани
$\tilde{W}(1,2,1)$ *приведутся к виду*

$$\bar{z}^1 = \bar{x}^1 + \bar{y}^1, \quad \bar{z}^2 = \bar{x}^2. \tag{3.27}$$

Выясним геометрический смысл условия $b = 0$*. Сначала покажем, что в этом (и только в этом) случае величина* λ *в уравнении (3.18) постоянна. Из (3.19) находим, что* $\lambda = -e^{-\varphi(y^1)}\varphi'(y^1)$*. Дифференцируя, получаем*

$$d\lambda = e^{-\varphi(y^1)}((\varphi'(y^1))^2 - \varphi''(y^1))dy^1.$$

Сравнивая с (3.24), видим, что $b = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda = const$*. Но при* $\lambda = const$ *уравнение (3.18) выделяет подгруппу* *группы* $G \times G^{-1}$, *поскольку формы* $\underset{2}{\omega}^1$ *и* $\underset{2}{\omega}^2$, *входящие в уравнение (3.18), являются инвариантными формами этой группы, см. [5].*

Таким образом, подткань $\tilde{W}(1,2,1)$ *будет групповой в том и только в том случае, если трансверсальное подмногообразие* $\tilde{V}(1,2,1)$, *несущее эту подткань, является подгруппой группы* $G \times G^{-1}$.

2) В случае $\xi_1^1 = 0$ *из (3.17), (3.13) и (3.14) получаем уравнение трансверсального подмногообразия* $\tilde{V}(1,2,1)$ *в виде:*

$$y^1 = y_0^1 = const.$$

Подставляя последнее в (3.16) и полагая $(z^1 - y_0^1)e^{z^2} = \bar{z}^1$, $\tilde{x}^1 e^{x^2} = \bar{x}^1$, *найдем уравнения другой подткани типа* $\tilde{W}(1,2,1)$:

$$\bar{z}^1 = \bar{x}^1, \quad z^2 = x^2 + y^2. \tag{3.28}$$

Заметим, что уравнения (3.28) определяют (с точностью до обозначений) ту же подткань, что и уравнения (3.27).

Таким образом, любая подткань типа $\tilde{W}(1,2,1)$ *четырехмерной групповой три-ткани (3.16) задается на трехмерном трансверсальном подмногообразии (3.19) уравнениями (3.20).*

4. Как уже было сказано (см. п. 3), трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$, в отличие от $\tilde{V}(\rho,\rho,\rho)$, не является, вообще говоря, вполне геодезическим в канонической аффинной связности Γ, индуцируемой на многообразии $\mathcal{M}$ три-тканью $W(r,r,r)$.

Предложение 4 *Трансверсальное подмногообразие* $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ *три-ткани* $W(r,r,r)$ *будет вполне геодезическим в связности* Γ *на многообразии* $\mathcal{M}$ *в том и только в том случае, если в адаптированном кобазисе на* $\mathcal{M}$ *выполняются равенства:*

$$\omega_a^u = 0, \tag{4.1}$$

$a = \overline{1, \rho}$, $u = \overline{\rho + 1, r}$.

Доказательство Пусть подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ задано на $\mathcal{M}$ уравнениями (3.1):

$$\underset{2}{\omega}^i = \xi_a^i \underset{2}{\Theta}^a.$$

Внешнее дифференцирование последних приводит к уравнениям (3.5):

$$\nabla \xi_a^i \equiv d\xi_a^i + \xi_a^j \omega_j^i = \xi_b^i \Theta_a^b + (a_{jk}^i \xi_a^j \xi_b^k + \lambda_{ab}^i)\underset{2}{\Theta}^b,$$

(здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности $\mathit{\Gamma}$, см. п. 2). Подмногообразие $\tilde{V}(\rho, r, \rho)$ будет вполне геодезическим в связности $\mathit{\Gamma}$ в том и только в том случае, если выполняются равенства:

$$\nabla\xi^i_a = \xi^i_b \tilde{\Theta}^b_a, \tag{4.2}$$

где $\tilde{\Theta}^b_a$ — некоторые дифференциальные формы. Из (3.5) и (4.2) получаем:

$$\xi^i_b \Theta^b_a + (a^i_{jk}\xi^j_a\xi^k_b + \lambda^i_{ab})\underset{2}{\Theta}^b = \xi^i_b\tilde{\Theta}^b_a. \tag{4.3}$$

Так как в адаптированном кобазисе $\xi^b_a = \delta^b_a$, $\xi^u_a = 0$, то из (3.5) и (4.3) соответственно находим:

$$\Theta^b_a = \omega^b_a - (a^b_{ac} + \lambda^b_{ac})\underset{2}{\omega}^c, \quad \omega^u_a = (a^u_{ab} + \lambda^u_{ab})\underset{2}{\omega}^b,$$

$$\tilde{\Theta}^b_a = \Theta^b_a + (a^b_{ac} + \lambda^b_{ac})\underset{2}{\omega}^c, \quad a^u_{ab} = 0, \quad \lambda^u_{ab} = 0.$$

Отсюда следуют равенства (4.1). □

Пример 2 *Рассмотрим шестимерную левую ткань Бола (три-ткань $B_l \equiv B_l(3,3,3)$), определяемую уравнениями [8]:*

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = (x^2 - x^3x^1)e^{2y^1} + y^2 + x^3(x^1 + 2y^1), \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases} \tag{4.4}$$

Слоения этой ткани задаются уравнениями:

$$\lambda_1 : \ x^i = c^i_1, \quad \lambda_2 : \ y^i = c^i_2, \quad \lambda_3 : \ z^i = c^i_3,$$

где $i = 1, 2, 3$, а c^i_1, c^i_2, c^i_3 — постоянные. Найдем структурные уравнения рассматриваемой ткани. Продифференцируем уравнения (4.4) и положим:

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\omega}^1 = dx^1, \\ &\underset{1}{\omega}^2 = x^3(1 - e^{2y^1})dx^1 + e^{2y^1}dx^2 + (x^1 + 2y^1 - x^1e^{2y^1})dx^3, \\ &\underset{1}{\omega}^3 = dx^3, \\ &\underset{2}{\omega}^1 = dy^1, \\ &\underset{2}{\omega}^2 = 2(x^2e^{2y^1} - x^3x^1e^{2y^1} + x^3)dy^1 + dy^2, \\ &\underset{2}{\omega}^3 = dy^3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Теперь продифференцируем (4.5) внешним образом и сравним полученные уравнения с (2.4); в результате находим:

$$\begin{aligned}
&\omega^1_j = \omega^3_j = 0,\\
&\omega^2_1 = 2x^3(\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) - 2\underset{1}{\omega}^2 + 2(x^1 + 2y^1 - 1)\underset{1}{\omega}^3,\\
&\omega^2_2 = -2\underset{2}{\omega}^1, \quad \omega^2_3 = 2(x^1 + 2y^1 - 1)\underset{2}{\omega}^1,\\
&a^1_{jk} = a^3_{jk} = 0, \quad a^2_{12} = -a^2_{21} = 1,\\
&a^2_{13} = -a^2_{31} = 1 - x^1 - 2y^1.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

С учетом (4.6) запишем структурные уравнения рассматриваемой шестимерной ткани B_l в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^2_1 + 2a^2_{[21]}\underset{1}{\omega}^2 \wedge (\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1) + 2a^2_{[31]}\underset{1}{\omega}^3 \wedge (\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1),\\
&d\underset{1}{\omega}^3 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^2_1,\\
&d\underset{2}{\omega}^3 = 0.
\end{aligned}$$

Уравнение

$$\underset{2}{\omega}^3 = 0 \tag{4.7}$$

является вполне интегрируемым и определяет пятимерное трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(2,3,2)$ с базисными формами $\underset{1}{\omega}^1$, $\underset{1}{\omega}^2$, $\underset{1}{\omega}^3$, $\underset{2}{\omega}^1$, $\underset{2}{\omega}^2$. Это подмногообразие является вполне геодезическим, так как в силу (4.6) выполняются условия (4.1), которые при $\rho = 2$, $r = 3$ имеют вид: $\omega^3_1 = \omega^3_2 = 0$. Из (4.7) с учетом (4.5) получаем уравнение подмногообразия $\tilde{V}(2,3,2)$ в виде $y^3 = y^3_0 = const$. Подставляя последнее в (4.4) и полагая $\tilde{z}^3 = z^3 - y^3_0$, найдем уравнения подткани $\tilde{W}(2,3,2)$, высекаемой слоями ткани B_l на подмногообразии $\tilde{V}(2,3,2)$, в следующем виде:

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = (x^2 - x^3x^1)e^{2y^1} + y^2 + x^3(x^1 + 2y^1), \quad \tilde{z}^3 = x^3.$$

Аналогично, вполне интегрируемое уравнение $\underset{2}{\omega}^1 = 0$ определяет другое пятимерное трансверсальное подмногообразие $\tilde{V}(2,3,2)$, которое также является вполне геодезическим, поскольку $\omega^1_2 = \omega^1_3 = 0$. В силу (4.5) это подмногообразие задается уравнением $y^1 = y^1_0 = const$, подставляя которое в (4.4) и полагая $\tilde{x}^2 = (x^2 - x^3x^1)e^{2y^1_0} + x^3(x^1 +$

$2y_0^1$), $\tilde{z}^1 = z^1 - y_0^1$, получим уравнения соответствующей подткани $\tilde{W}(2,3,2)$ в виде:

$$\tilde{z}^1 = x^1, \quad z^2 = \tilde{x}^2 + y^2, \quad \tilde{z}^3 = x^3 + y^3.$$

Очевидно, что эта подткань является групповой [6].

Список литературы

1. Акивис, М.А.: О три-тканях многомерных поверхностей. Тр. геом. сем. ВИНИТИ АН СССР, **2**, 7–31 (1969)
2. Акивис, М.А., Гольдберг, В.В.: О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей. Тр.геом.сем. ВИНИТИ, **4**, 179–204 (1973)
3. Акивис, М.А., Шелехов А.М.: Подткани многомерных три-тканей. Сиб. мат. журн. 1985. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 10.09.85 № 7130-В.
4. Akivis, M.A., Shelekhov, A.M.: Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1992. xvii+358 pp.
5. Васильева, М.В.: Группы Ли преобразований. М., Моск. гос. пед. ин-т, 1969, 175 стр.
6. Гольдберг, В.В.: Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей. Сб. статей по дифферен. геом. Калинин, 52–64 (1974)
7. Толстихина, Г.А.: Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. **32**, 29–116 (2005)
8. Толстихина, Г.А.: О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой тканью Бола $B_l(p,q,q)$. Тезисы докладов международной конференции “Геометрия в Одессе-2008”, Одесса, 19 – 24 мая 2008 г., 137–138.

Г. А. Толстихина
Тверской государственный университет, Тверь, Россия.
E-mail: tga_56@mail.ru

G. Tolstikhina

On Embedding of Three-Webs, Generated by Multidimensional Foliation, Into Three-webs $W(r,r,r)$

For three-webs $W(r,r,r)$, established on $2r$-dimensional differentiated $\mathcal{M}$ by three smooth r-covered foliation, the notion of the sub-web $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ which is based on certain smooth submanifold $\tilde{V}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ of $\rho_1+\rho_2$ dimension by three foliations of different dimensions, $(\rho_3 \le \rho_1 \le \rho_2)$ was determined. The notion of sub-web $\tilde{W}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ is the generalization of the notion of sub-web $\tilde{W}(\rho,\rho,\rho)$, which foliations are indented by foliations of web $W(r, r, r)$ on transversal submanifold of $V^{2\rho}$ dimension 2ρ, $(\rho \leq r)$ [3].

Mathematics Subject Classification (2000) 53A60