$\begin{array}{c} \textbf{PROCEEDINGS} \\ \textbf{of the} \\ \textbf{INTERNATIONAL GEOMETRY} \\ \textbf{CENTER} \end{array}$

Volume 2, No. 1, 2009

International Geometry Center



PROCEEDINGS

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 2, No. 1, 2009

Odessa - 2009

Editor-in-Chief: Valentin Lychagin

Deputies of Editor-in-Chief:

Vladislav Goldberg Joseph Krasilshchik Vladimir Sharko

Managing Editors:

Alexei Kushner Viktor Kuzakon

Executive Secretary: Nadezhda Konovenko

Editorial Board:

Dmitry Alekseevsky	Dmitrii Gurevich	Alexander Prishlyak	
Ian Anderson	Izrail Kats	Maido Rahula	
Vladimir Balan	Vadim Kirichenko	Vladimir Roubtsov	
Valentin Diskant	Boris Kruglikov	Alexandra Sergeeva	
Leonid Evtushik	Svyatoslav Leiko	Alexander Shelekhov	
Sergey Fedosov	Grigory Litvinov	Vadim Shurygin	
Anatolii Fomenko	Oleg Mashkov	Eldar Straume	
Valentin Fomenko	Anatolii Milka	Galina Tolstikhina	
Nail Ibragimov	Petr Mormul	Bronislav Yakubchik	
		Wassily Zadorozhnyi	

${\bf Contents}$

В. А. Горькавый, А. Д. Милка, А. Н. Соболева. Линейные изгибания призм с увеличением объема	7
V. V. Lychagin, V. A. Yumaguzhin. Minkowski metrics on solutions of the equation of nonstationary transonic gas flow	27
М. Рахула. Симметрии и интегрирующая матрица	35
А. В. Самохин, Ю. И. Дементьев. О симметриях граничной задачи для уравнения Бюргерса на интервале	55
Г. Б. Шпиз, Г. Л. Литвинов. Аналоги теорем Брауэра и Шаудера о неподвижной точке в тропической математике	81

Линейные изгибания призм с увеличением объема

В. А. Горькавый А. Д. Милка А. Н. Соболева

Аннотация Построены и проанализированы линейные изгибания правильных призм, приводящие к увеличению объема

Ключевые слова Жесткие и изгибаемые полиэдры · Линейные изгибания

УДК 514

Памяти Алексея Васильевича Погорелова

1 Введение

В геометрии рассматриваются два вида изгибаний многогранников — классические, или просто изгибания, при которых грани многогранников перемещаются как твердые пластины, и линейные, при которых грани многогранников при перемещении допускают переламывания по новым, возможно "плывущим" ребрам [1,2]. По теореме Коши замкнутые выпуклые многогранники являются жесткими, т.е. не изгибаются в классе выпуклых многогранников. Пример нежесткого непрерывно изгибаемого многогранника с самопересечениями был построен Брикаром, а Глюк доказал, что нежесткие многогранники — весьма редкое явление. Первый сенсационный пример непрерывно изгибаемого замкнутого без самопересечений многогранника был

построен Коннелли. И по гипотезе Сулливана-Коннелли предполагалось, что при подобных изгибаниях объем многогранника сохраняется; гипотеза была искусно доказана И.Х. Сабитовым – с этими результатами можно ознакомиться в [3,4].

Последовательное изучение линейных изгибаний многогранников было начато в работах А.Д. Милки [5], В.А. Залгаллера и Ю.Д. Бураго [6], D.D. Bleecker [7]. Тематика, избранная авторами, была связана с открытием необычных деформаций многогранников и их моделей — оболочек, а также с изучением глубоких проблем изометрических погружений полиэдральных метрик. В частности, ими инициировалось новое направление геометрических исследований — изометрические деформации замкнутых поверхностей с увеличением объема.

В этом направлении А.Д. Милкой были построены специальные линейные изгибания правильных выпуклых многогранников. Высказывалось предположение, что введенные изгибания испытывают модели — оболочки замкнутых многогранников при потере устойчивости под внутренним или внешним давлением; численные оценки изменений объемов не приводились. Стимулом для построений являлись следующие принципиальные положения, сформулированные А.В. Погореловым в его геометрической теории оболочек [8, с.153–165]:

"... Опыт показывает, что выпуклая оболочка вращения под внутренним [или под внешним] давлением давлением может терять устойчивость с образованием системы правильно расположенных эллиптических вмятин вдоль некоторой параллели. Физическая причина такой формы потери устойчивости состоит в том, что для вмятин, вытянутых в направлении меридианов [соответственно — параллелей], при указанной деформации оболочки может иметь место общее увеличение ограничиваемого ею объема, несмотря на продавливание оболочки по системе вмятин внутрь этого объема... При определенном соотношении между главными кривизнами оболочки внутреннее давление [соответственно — внешнее давление] может вызвать появление сжимающих усилий в направлении параллелей [соответственно — в направлении меридианов]. Эти усилия при известной их интенсивности и вызывают потерю устойчивости ... "

Конечно, сформулированные положения правомочны для поверхностей и с другими симметриями. Именно с такой целью А.Д. Милкой и находились специальные линейные изгибания правильных выпук-

лых многогранников, на моделях которых было значительно проще провести технические эксперименты. Возможный эксперимент заинтересовал А.В. Погорелова — обсуждались детали эксперимента, намечалась оснастка, определялось новое лабораторное оборудование, но по объективным причинам планы остались невыполненными. Потенциально рассматривался также жесткий невыпуклый многогранник с богатой симметрией — шеддок A. Douady [5]. Картонная модель этого многогранника, вопреки устоявшимся представлениям геометров и механиков, оказалась свободно изгибаемой без видимого искажения материала. Так было открыто новое физическое явление в физике деформаций оболочек — нежесткая (мягкая или затянутая) потеря устойчивости, демонстрируемая жесткими многогранниками модельными флексорами [9]. Большие, упорядоченные и обратимые изгибания модельных флексоров в закритической стадии, традиционно относившейся к области хаоса, оказались асимптотически точно описываемыми с помощью линейных изгибаний. Открытие модельных флексоров, недоступное классической механике, утвердило геометрические методы А.В. Погорелова в нелинейной теории оболочек как новую, геометрическую теорию устойчивости упругих систем.

Те же специальные линейные изгибания правильных выпуклых многогранников рассматривал D.D. Bleecker. Вопрос об увеличении объема он выделил в самостоятельную математическую проблему и установил некоторые конкретные численные оценки относительного увеличения объема правильных многогранников [7]. Позже его оценки усиливались А.Д. Милкой и В.А. Горькавым с помощью усовершенствованных итерационных линейных изгибаний [11]. Приведем для примера полученные последовательно значения относительного увеличения объема при линейных изгибаниях правильного тетраэдра: 1.37... [7], 1.42... [10], 1.44... [11]. Вопрос об окончательном, оптимальном увеличении объема правильных многогранников с помощью линейных изгибаний остается открытым. В этой связи следует отметить недавний результат Г.А. Самарина: любой замкнутый многогранник допускает линейное изгибание с увеличением объема [12]. Ранее аналогичный результат анонсировался А.Д. Милкой для многогранников, имеющих хотя бы одну выпуклую вершину [10]. Как следствие, поверхность максимально возможного объема, возникающая при линейных изгибания какого-либо многогранника, уже не бу-

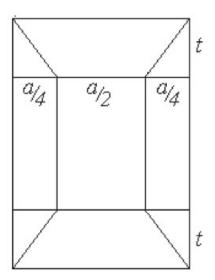


Рис. 1 Дополнительные ребра на боковой грани призмы.

дет многогранником и может иметь достаточно сложную форму, чем обусловлена трудность рассматриваемой проблемы.

Целью работы является построение линейных изгибаний с увеличением объема для правильных выпуклых призм. Каждая правильная призма M характеризуется тремя параметрами: n — количество сторон основания, R — радиус окружности, описанной вокруг основания, H — полувысота. Строится специальное линейное изгибание M: на развертке призмы на каждой из боковых граней одинаковым образом проводятся дополнительные ребра, положение которых зависит от параметра t (см. Рис. 1). Затем по измельченной развертке строится новый невыпуклый многогранник M_t^* (см. Рис. 2 (n=4)).

Разным значениям t отвечают неконгруэнтные друг другу многогранники M_t^* , изометричные призме M. Параметр линейного изгибания t меняется в пределах

$$R\sin^2\frac{\pi}{2n} \le t \le H,$$

что обусловлено геометрией изгибания. Поэтому предложенное линейное изгибание может быть реализовано лишь в случае, когда исходная призма M является достаточно высокой так, что

$$R\sin^2\frac{\pi}{2n} \le H.$$

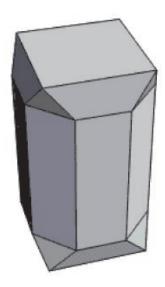


Рис. 2 Линейно изогнутый многогранник.

Объем $Vol(M_t^*)=V(t;n,R,H)$ рассматривается как функция переменной t с параметрами n,R,H. Анализ показывает, что функция V(t) возрастает на начальном участке интервала $[R\sin^2\frac{\pi}{2n},H]$, всюду является выпуклой вверх и достигает своего максимума при

$$t_m = \frac{3}{2}R \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \lg^2\frac{\pi}{2n}}}.$$

Обратим внимание, что t_m не зависит от H. Как следствие, если призма M является достаточно высокой так, что $t_m < H$, то независимо от высоты M при построении линейного изгибания с максимальным объемом горизонтальные изломы боковых граней располагаются на одном и том же расстоянии t_m от ребер основания.

Подробный анализ максимального объема, достигаемого при описанном линейном изгибании, в сравнении с объемом исходной призмы, позволяет нам предложить следующую деформационную классификацию призм:

- *короткие* призмы допускают предложенное линейное изгибание, но оно не приводит к увеличению объема;
- средние и длинные призмы допускают предложенное линейное изгибание, и это линейное изгибание приводит к увеличению объема исходной призмы (различие между средними и высокими призмами

— в форме многогранника с максимальным объемом, возникающего при линейном изгибании).

Точные оценки относительных размеров, характеризующие каждый из четырех классов, приведены в разделе 2. Как пример, отметим, что при n=3 для достаточно высоких призм при $\frac{R}{H}\to 0$ увеличение объема достигает 50%.

Введенная схема линейного изгибания имеет итерационный характер и позволяет строить итерационные линейные изгибания исходной призмы M, вызывающие на каждом шаге увеличение объема. В пределе, как результат итерационного процесса в случае, когда призма M достаточно высока, получаем изометричную M поверхность. Эта поверхность состоит из двух правильных n-угольных оснований, двух примыкающих к ним бесконечных систем многогранных поясков и промежуточного между системами кругового цилиндра. В разделе 3 проанализирована сходимость итерационного процесса, получены оценки размеров предельной поверхности и, как основной результат, установлены оценки относительного увеличения объема. При n=3 для достаточно высоких призм, когда $\frac{R}{H} \to 0$, увеличение объема достигает более 65%.

Примечательно, что выявленный характер деформаций у призм различается в зависимости от их относительной высоты. В теории оболочек для круговых цилиндров имеется такое же разделение на короткие, средние и длинные по механическим деформационным свойствам. Полученные нами результаты могут иметь прикладное значение, ведь оболочки позволяют моделировать, например, корпуса ракет (длинные цилиндры), подводных лодок (средние цилиндры), авиационных двигателей (короткие цилиндры) [13].

2 Линейное изгибание призмы с увеличением объема

2.1 Линейное изгибание

Пусть M — прямая призма, в основании которой лежит правильный n-угольник. В качестве параметров, характеризующих размеры призмы, возьмем полувысоту H и радиус R окружности, описанной около основания. Длина ребра основания равна $a=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ — циклический центральный угол основания. Объем призмы M очевидно равен $Vol(M)=nHR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

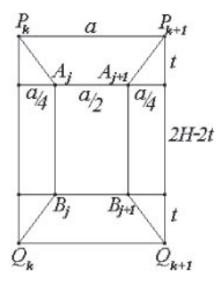


Рис. 3 Измельчение развертки призмы.

При должном выборе декартовых координат, вершины верхнего и нижнего оснований M будут располагаться соответственно в точках

$$P_k = (R\cos k\alpha, R\sin k\alpha, H)$$

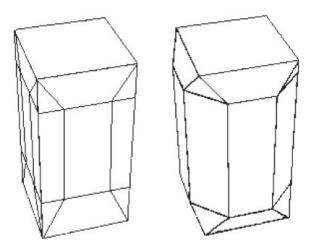
И

$$Q_k = (R\cos k\alpha, R\sin k\alpha, -H),$$

$$k = \overline{0, n - 1}.$$

Построим специальное линейное изгибание призмы M. Для этого рассмотрим развертку призмы M, состоящую из двух правильных n-угольников $P_0 \dots P_{n-1}$ и $Q_0 \dots Q_{n-1}$ и n равных боковых граней — прямоугольников $P_k P_{k+1} Q_{k+1} Q_k$. Измельчим развертку призмы, проведя на каждой из боковых граней новые дополнительные ребра так, как показано на Рис.3. Размеры и положение дополнительных ребер полностью определяются заданием параметра t, очевидно удовлетворяющего условию $0 \le t \le H$.

Если теперь из измельченной развертки попробовать "склеить" многогранник, то может получиться исходная призма M, на боковых гранях которой формально проведены дополнительные ребра. Но может получиться и иной многогранник, отличный от призмы M (см. Рис.4, где изображен случай n=4).



 ${\bf Puc.~4}~{\it Д}$ еформация призмы: слева — исходный, справа — изогнутый многогранник.

Опишем этот новый многогранник, который будем обозначать M^* . Основания у M^* такие же, как и у исходной призмы M, т.е. два равных правильных n-угольника. Боковую поверхность M^* удобно разбить на три части. Центральная часть образована из 2n равных прямоугольников со сторонами длины a/2 и 2(H-t). Между центральной частью и основаниями M^* расположены одинаковые многогранники-пояски, каждый из которых составлен из n равных треугольных граней и n равных граней-трапеций.

Найдем координаты вершин многогранника M^* . Вершины верхнего и нижнего основания обозначим соответственно P_k^* и Q_k^* . Тогда

$$P_k^* = (R\cos k\alpha, R\sin k\alpha, h), \quad Q_k^* = (R\cos k\alpha, R\sin k\alpha, -h). \quad (1)$$

Вершины M^* , отвечающие точкам A_j и B_j на измельченной развертке (см. Рис.2), обозначим соответственно и A_j^* и B_j^* . Точки $A_0^* \dots A_{2n-1}^*$ лежат в горизонтальной плоскости z=(H-t) и являются вершинами правильного 2n-угольника со сторонами длины a/2, т.е.

$$A_{j}^{*} = \left(r\cos\left(j\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), r\sin\left(j\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), H - t\right). \tag{2}$$

Аналогично

$$B_j^* = \left(r\cos\left(j\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), r\sin\left(j\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4}\right), -(H - t)\right). \tag{3}$$

Неизвестные величины r и h легко определяются. Действительно, r является радиусом окружности, описанной вокруг правильного 2n-угольника $A_0^* \dots A_{2n-1}^*$ со сторонами длины a/2, поэтому $\frac{a}{2} = 2r \sin \frac{\alpha}{4}$. Подставляя выражение для длины a, находим

$$r = R\cos\frac{\alpha}{4}.\tag{4}$$

В свою очередь, для нахождения величины h воспользуемся, например, равенством $|P_0A_0|=|P_0^*A_0^*|$; значение $|P_0A_0|$ вычисляется по развертке как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длины a/4 и t, а $|P_0^*A_0^*|$ вычисляется через координаты точек P_0^* , A_0^* . Получаем уравнение

$$\frac{a^2}{16} + t^2 = \left(R - r\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \left(r\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2 + (h - (H - t))^2,$$

откуда, подставляя в него выражения для a и r, находим

$$h = H - t + \sqrt{t^2 - R^2 \sin^4 \frac{\alpha}{4}}. (5)$$

Формулы (1)–(5) полностью описывают вершины многогранника M^* .

Разным значениям t отвечают различные многогранники M^* , т.е. речь идет о семействе многогранников M_t^* . Несмотря на различие внешней формы, все M_t^* изометричны исходной призме M.

Обратим внимание, что, ввиду формулы (5), параметр t может изменяться только в интервале

$$R\sin^2\frac{\pi}{2n} \le t \le H. \tag{6}$$

При $t=R\sin^2\frac{\pi}{2n}$ у многогранника M_t^* пояски укладываются в плоскости оснований (см. Рис. 5_1), а при t=H у многогранника M_t^* будет отсутствовать центральная часть (см. Рис. 5_3). Сама же призма M не входит в построенное непрерывное семейство многогранников M_t^* .

Интервал изменения параметра t не должен быть пустым, поэтому в дальнейшем всегда будем предполагать, что исходная призма M удовлетворяет условию

$$R\sin^2\frac{\pi}{2n} < H. \tag{7}$$

 $^{^{1}\,}$ Имеется двупараметрическое непрерывное семейство изометричных многогранников, включающее как M, так и все $M_{t}^{*};$ в данной статье оно не рассматривается.

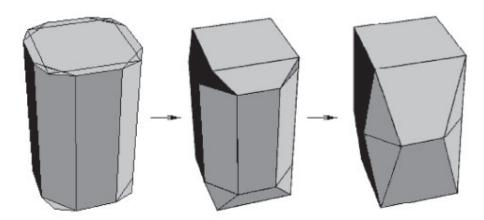


Рис. 5 Семейство изогнутых многогранников.

2.2 Объем изогнутых многогранников

Основной интерес представляет вопрос об оценке объема многогранников M_t^* в сравнении с объемом исходной призмы M. Для вычисления объема $Vol(M_t^*)$ триангулируем грани M_t^* , затем разобьем тело, ограниченное M_t^* , соответствующими треугольными пирамидами с вершиной в центре многогранника и с основаниями в гранях триангуляции. Суммарный объем пирамид и даст нам $Vol(M_t^*)$. Принимая во внимание формулы (1)–(5), находим:

$$Vol(M_t^*) = \frac{1}{3}R^2 \sin\frac{\pi}{n} \left(3H - 3t + 2\sqrt{t^2 - R^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}} + \cos\frac{\pi}{n} \left(3H - 3t + 4\sqrt{t^2 - R^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}} \right) \right).$$
 (8)

Мы видим, что объем многогранников M_t^* существенно зависит от t. Будем рассматривать $Vol(M_t^*)$ как функцию V(t) переменной t с "управляющими" параметрами $n,\ R,\ H$. Областью определения функции V(t) является множество $t \geq R \sin^2 \frac{\pi}{2n}$, но нам следует учитывать ограничение (6), вытекающее из предложенной геометрии деформации. Поэтому дальнейший анализ мы будем проводить в предположении, что $t \in [R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H]$.

Предложение 1 Функция V(t) обладает следующими свойствами:

1.
$$\lim_{t \to R \sin^2 \frac{\pi}{2n}} V' = +\infty;$$

- 2. $V''(t) < 0 \quad \forall t \in (R \sin^2 \frac{\pi}{2n}, H];$
- 3. V'=0 тогда и только тогда, когда $t=\frac{3}{2}R\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6-tg^2\frac{\pi}{2n}}}$.

Доказательство проводится элементарными средствами.

Как следствие, когда t пробегает интервал $[R\sin^2\frac{\pi}{2n},H]$, возможны два варианта:

- 1. если $H \leq \frac{3}{2}R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6- \lg^2 \frac{\pi}{2n}}}$, то V(t) строго возрастает, достигая максимального значения при t=H;
- мального значения при t=H; 2. если $\frac{3}{2}R\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6-t}\mathrm{g}^2\frac{\pi}{2n}}< H,$ то V(t) строго возрастает, достигает максимального значения при

$$t_m = \frac{3}{2}R \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \lg^2\frac{\pi}{2n}}} \tag{9}$$

и затем убывает.

Поэтому максимальное значение V_{max} функции V(t) на интервале $[R\sin^2\frac{\pi}{2n},H]$ может быть представлено следующим образом.

Предложение 2

$$V_{max} = \begin{cases} V(H), & ecnu \ H \le \frac{3}{2}R \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - tg^2 \frac{\pi}{2n}}} \\ V(t_m), & ecnu \ \frac{3}{2}R \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - tg^2 \frac{\pi}{2n}}} < H \end{cases}$$
(10)

Явное представление для V_{max} получается с учетом формул (8), (9) и представляет собой весьма громоздкое выражение, зависящее от n, R и H.

2.3 Относительное увеличение объема

Рассмотрим отношение Θ максимального объема V_{max} , представленного в Предложении 2, к объему V_0 исходной призмы M. Ясно, что Θ зависит от n, R и H. Оказывается, и в этом не сложно убедиться, что Θ зависит не от R и H, а только от их отношения R/H. Иначе говоря, $\Theta = \Theta(u,\alpha)$, где u = R/H, $\alpha = 2\pi/n$. С учетом (6), параметр u изменяется в пределах $(0,\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{4}})$, а $\alpha \in (0,\frac{2\pi}{3}]$. Выражение для $\Theta(u,\alpha)$ весьма громоздкое. График этой функции приведен на Рис.6. Выделенная на графике кривая Γ является линией пересечения графика с плоскостью $\Theta = 1$.

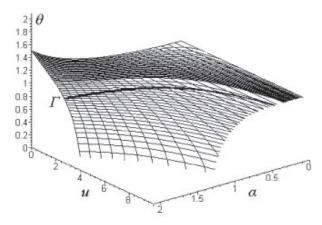


Рис. 6 Относительное увеличение объема Θ .

Удобно рассмотреть на плоскости параметров (u,α) область $\Omega=\left\{(u,\alpha)|0< u<\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}), 0<\alpha\leq\frac{2\pi}{3}\right\}$, в точках которой и рассматривается функция $\Theta(u,\alpha)$. На Рис. 7 в области Ω выделены кривая γ_1 , вдоль которой $t_m=H$, и кривая γ_2 , вдоль которой $\Theta(u,\alpha)=1$. С учетом $(9),\ \gamma_1$ задается равенством $u=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. В свою очередь, несложный подсчет показывает, что кривая γ_2 определяется равенством $u=\frac{2\sqrt{3-5\sin^2\frac{\alpha}{4}}}{\sin\frac{\alpha}{4}(3-4\sin^2\frac{\alpha}{4})}$. Наконец, кривая γ_3 , ограничивающая область Ω ввиду (7), задается равенством $u=\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$.

Кривыми γ_1 и γ_2 область Ω разбивается на Tpu подобласти:

 Ω_1 — здесь $\Theta < 1$;

 Ω_2 — здесь $\Theta > 1$ и при этом $V_{max} = V(H)$;

 Ω_3 — здесь $\Theta > 1$ и при этом $V_{max} = V(t_m)$.

Область Ω можно интерпретировать как пространство правильных призм, рассматриваемых с точностью до движения и гомотетии. Поэтому приходим к следующей деформационной классификации правильных призм.

Призму назовем короткой, если

$$\frac{2\sqrt{3 - 5\sin^2\frac{\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}\left(3 - 4\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)} \le \frac{R}{H} \le \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

В этом случае возможно построение линейного изгибания, но оно не приводит к увеличению объема.

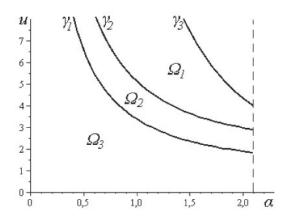


Рис. 7 Пространство Ω : длинные, средние и короткие призмы.

Призму назовем средней, если

$$\frac{2\sqrt{6-\lg^2\frac{\pi}{2n}}}{3\sin\frac{\pi}{n}} \le \frac{R}{H} < \frac{2\sqrt{3-5\sin^2\frac{\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

В этом случае возможно построение линейного изгибания, оно приводит к увеличению объема, при этом максимальный объем достигается при t=H (см. $Puc.5_3$).

Призму назовем длинной, если

$$0<\frac{R}{H}<\frac{2\sqrt{6-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}}}{3\sin\frac{\pi}{n}}.$$

В этом случае возможно построение линейного изгибания, оно приводит к увеличению объема, при этом максимальный объем достигается при $t=t_m$ (см. $\mathrm{Puc.5}_2$).

Пример 1 Рассмотрим случай треугольной призмы, т.е. положим n=3 (соответственно $\alpha=\frac{2\pi}{3}$). В этом случае получаем, что если $\frac{R}{H}>4$, то призма не допускает рассматриваемого линейного изгибания. Если $2.65\cdots\leq\frac{R}{H}\leq4$, то линейное изгибание можно построить, но оно не дает увеличения объема. Если $1.83\cdots\leq\frac{R}{H}<2.65\ldots$, то линейное изгибание дает увеличения объема, при этом многогранник максимального объема будет иметь форму подобную изображенной на Рис. 5_3 . Наконец, если $0<\frac{R}{H}<1.83\ldots$, то линейное изгибание дает увеличения объема, при этом многогранник максимального объема будет иметь форму, подобную изображенной на Рис. 5_2 . На

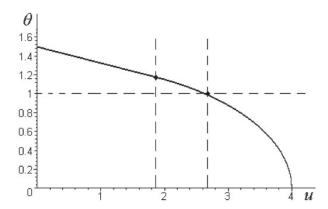


Рис. 8 График функции относительного увеличения объема (n=3).

Puc.8 приведен график функции относительного увеличения объема Θ при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Как видим, максимальное значение Θ достигается при $u \to 0$ и равно 1.5. Это означает, что при n=3 увеличение объема для высоких призм (при $\frac{R}{H} \to 0$) составляет почти 50%.

3 Итерационное линейное изгибание призмы с увеличением объема

Предположим, что призма M является длинной. Тогда рассмотренное нами линейное изгибание приводит к увеличению объема, причем максимальный объем среди M_t^* достигается при $t=t_m$, задаваемом выражением (9). Многогранник $M_{t_m}^*$ устроен так, что в его срединной части располагаются 2n прямоугольных граней, представляющих собой боковую поверхность некоторой правильной 2n-угольной призмы, которую будем обозначать $M^{(1)}$, см. Рис. 5_2 . Параметры призмы $M^{(1)}$ определяются формулами

$$n^{(1)} = 2n$$
, $R^{(1)} = R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}$, $H^{(1)} = H - \frac{3}{2} R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n}}}$. (11)

Удобство предлагаемой конструкции состоит в том, что мы по той же схеме можем построить линейное изгибание и призмы $M^{(1)}$ — как результат, получим изометричный M многогранник, у которого будут два основания, четыре пояска и центральная часть, состоящая из 4n

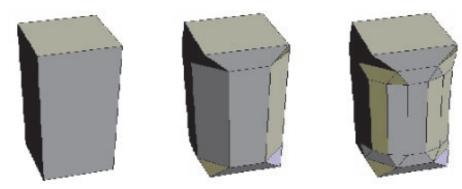


Рис. 9 Линейное изгибание призмы — итерации.

прямоугольников, образующих боковую поверхность новой правильной 4n-угольной призмы $M^{(2)}$, см. Рис. 9_3 .

Тем самым, инициируется итерационный процесс изгибания призмы M: на k-ом шаге строим линейное изгибание правильной $2^{k-1}n$ -угольной призмы $M^{(k-1)}$, получая изометричный M многогранник, у которого будут два основания, 2^k поясков и центральная часть, состоящая из 2^kn прямоугольников, образующих боковую поверхность новой правильной 2^kn -угольной призмы $M^{(k)}$.

По аналогии с формулами (11), выполняются следующие рекуррентные формулы, описывающие изменение параметров призм $M^{(k)}$:

$$n^{(k)} = 2n^{(k-1)}, \quad R^{(k)} = R^{(k-1)} \frac{\sin \frac{\pi}{n^{(k-1)}}}{2\sin \frac{\pi}{2n^{(k-1)}}},$$
$$H^{(k)} = H^{(k-1)} - \frac{3}{2}R^{(k-1)} \frac{\sin \frac{\pi}{n^{(k-1)}}}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}}}}.$$

При этом на каждом шаге мы строим линейное изгибание соответствующей призмы $M^{(k)}$ так, чтобы получить максимальное увеличение объема:

$$t_m^{(k)} = \frac{3}{2} R^{(k)} \frac{\sin \frac{\pi}{n^{(k)}}}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n^{(k)}}}}.$$

Можно проверить, что выписанные формулы сводятся к следующим:

$$n^{(k)} = 2^k n, \quad R^{(k)} = R \frac{1}{2^k} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{2^k n}}$$
 (12)

$$t_m^{(k)} = \frac{3}{2^{k+1}} R \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2^{k+1}n}}},\tag{13}$$

$$H^{(k)} = H - \sum_{j=0}^{k-1} t_m^{(j)} = H - \frac{3}{2} R \sin \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2^{j+1} n}}}.$$
 (14)

Описанный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока призмы $M^{(k)}$ остаются высокими. Как только на очередном шаге призма $M^{(k)}$ перестанет быть по определению длинной, итерационный процесс прервется. Принимая во внимание формулу (14), мы можем утверждать, что процесс итераций не прервется в том и только в том случае, когда размеры исходной призмы M удовлетворяют условию

$$H \ge \frac{3}{2}R\sin\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}}.$$
 (15)

Лемма 1 Имеет место следующая оценка:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{1}{\sqrt{6 - tg^2 \frac{\pi}{2^{j+1}n}}} < \frac{2}{\sqrt{6 - tg^2 \frac{\pi}{2^n}}}.$$

Доказательство основано на том, что выражение $\frac{1}{\sqrt{6-\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2j+1_n}}}$ является убывающей по j функцией, поэтому его можно оценить сверху значением при j=0, а снизу — значением при $j\to\infty$.

Как следствие, с учетом (15), можем сделать следующие выводы.

Если

$$H \le \frac{3}{\sqrt{6}} R \sin \frac{\pi}{n},$$

то рассматриваемый итерационный процесс обязательно прервется на некотором шаге.

Если

$$H \ge \frac{3}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n}}} R \sin \frac{\pi}{n},$$

то рассматриваемый итерационный процесс не прервется. В пределе мы получим изометричную M поверхность M_{∞}^* , уже не являющуюся многогранником²: эта предельная поверхность будет содержать два

 $^{^2}$ Подобная поверхность приведена как экзотический пример в недавней работе М. Штогрина [14] об изометрических деформациях цилиндров и конусов на основе классических методов А.В. Погорелова, развитых в его геометрической теории устойчивости оболочек.

n-угольных основания (как у M), от которых будут идти две бесконечные системы многогранных поясков, сходящихся к центральной части — круговому цилиндру C. Высота этого цилиндра равна

$$H_{\infty} = H - \sum_{j=0}^{\infty} t_m^{(j)}.$$

Применяя формулу (13), получаем, что высота цилиндра равна

$$H_{\infty} = H - \frac{3}{2}R\sin\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j}} \frac{1}{\sqrt{6 - \lg^{2}\frac{\pi}{2^{j+1}n}}}$$
(16)

и может быть также оценена с помощью приведенной выше Леммы:

$$H - \frac{3}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n}}} R \sin \frac{\pi}{n} < H_{\infty} < H - \frac{3}{\sqrt{6}} R \sin \frac{\pi}{n}.$$
 (17)

Радиус R_{∞} основания цилиндра C легко находится из того очевидного наблюдения, что периметр основания цилиндра равен периметру основания исходной призмы M: $2\pi R_{\infty} = na = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}$. Поэтому

$$R_{\infty} = \frac{nR}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}.$$
 (18)

Проанализируем теперь объем $Vol(M_{\infty}^*)$.

Предложение 3 Справедлива следующая оценка относительного увеличения объема:

$$\frac{2}{9} \frac{(4\cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{\cos \frac{\pi}{n} (1 + \cos \frac{\pi}{2n})} < \frac{Vol(M_{\infty}^*)}{Vol(M)} < \frac{tg_n^{\underline{\pi}}}{\frac{\pi}{n}}.$$

Доказательство Для доказательства рассмотрим сначала первый шаг итерации. Если из объема экстремального многогранника $M_{t_m}^*$ вычесть объем центральной части — призмы $M^{(1)}$, то получим объем двух поясков (см. Рис.9₂), который с учетом формул (8), (9), (12) и (14) запишется в виде:

$$W^{(1)} = Vol(M_{t_m}^*) - Vol(M^{(1)}) = \frac{4}{3}nR^3 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \frac{(4\cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n}}}$$

Заметим, что на следующих шагах итерации увеличивается только объем центральной части $Vol(M^{(1)})$, тогда как $W^{(1)}$ остается неизменным.

Аналогичную формулу можно выписать для объема поясков, возникающих на k-ом шаге итерации

$$W^{(k)} = \frac{4}{3}n^{(k-1)}(R^{(k-1)})^3 \sin^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}} \frac{(4\cos^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}} - 1)^2}{\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n^{(k-1)}}}}.$$

Применяя формулы (12), получаем:

$$W^{(k)} = \frac{1}{2^k} \frac{8}{3} n R^3 \sin^3 \frac{\pi}{n} \cdot \left(\frac{(4\cos^2 \frac{\pi}{2^k n} - 1)^2}{2^k \sin \frac{\pi}{2^{k-1} n} (1 + \cos \frac{\pi}{2^{k-1} n}) \sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2^k n}}} \right).$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, является возрастающим по переменной k, оценка снизу для него получается подстановкой k=1, а оценка сверху — при $k\to\infty$. Как следствие, получаем:

$$\frac{1}{2^k} \frac{4}{3} n R^3 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cdot \frac{(4\cos^2 \frac{\pi}{2n} - 1)^2}{(1 + \cos \frac{\pi}{n})\sqrt{6 - \lg^2 \frac{\pi}{2n}}} \le W^{(k)} \le \frac{\sqrt{6}}{2^k \pi} n^2 R^3 \sin^3 \frac{\pi}{n}.$$

Суммарный объем всех поясков оценивается так:

$$\frac{4}{3}nR^3\sin^2\frac{\pi}{n} \cdot \frac{(4\cos^2\frac{\pi}{2n} - 1)^2}{(1 + \cos\frac{\pi}{n})\sqrt{6 - \lg^2\frac{\pi}{2n}}} \le \sum_{k=1}^n W^{(k)} \le \frac{\sqrt{6}}{\pi}n^2R^3\sin^3\frac{\pi}{n}.$$

Осталось оценить объем центральной части — цилиндра C. С учетом (17)-(18), получаем следующую оценку для объема цилиндра:

$$\frac{2}{\pi}n^2R^2\sin^2\frac{\pi}{n}\left(H - \frac{3}{\sqrt{6 - \lg^2\frac{\pi}{2n}}}R\sin\frac{\pi}{n}\right) < Vol(C) <$$

$$< \frac{2}{\pi}n^2R^2\sin^2\frac{\pi}{n}\left(H - \frac{3}{\sqrt{6}}R\sin\frac{\pi}{n}\right).$$

Суммарный объем поясков и цилиндра дает полный объем предельной поверхности, что и приводит к указанным оценкам.

На Рис. 10 приведены графики функций, оценивающих $\frac{Vol(M_\infty^*)}{Vol(M)}$ в Предложении 3, с учетом $\alpha=\frac{2\pi}{n}.$

Пример 2 В случае треугольной призмы $(n=3, m.e. \alpha = \frac{2\pi}{3})$ относительное увеличение объема в ходе итерационного линейного изгибания может составлять от 1.18... до 1.65.... В частности, если $\frac{R}{H} \to \infty$, то относительное увеличение объема составит более 65%.

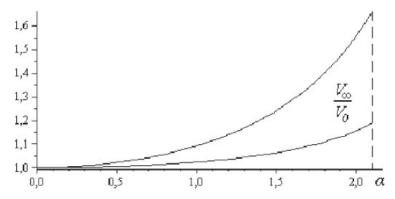


Рис. 10 Оценочные функции.

Список литературы

- 1. Александров, А.Д.: Выпуклые многогранники. М.-Л., Гостехиздат, 1950, 428 стр.
- 2. Кон-Фоссен, С.Э.: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., Физматгиз, 1959, 304 стр.
- 3. Сабитов, И.Х.: Объем многогранника как функция его метрики. Фунд. прикл. мат. $\mathbf{2}(4)$, 1235–1246 (1996)
- 4. Сабитов, И.Х.: Объемы многогранников. М., Из-во МЦНМО, 2002, 32 стр.
- 5. Милка, А.Д.: Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников. Математическая физика, анализ, геометрия 1(1), 116-130 (1994)
- 6. Бураго, Ю.Д., Залгаллер, В.А.: Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с плоской метрикой в R^3 . Алгебра и анализ ${\bf 7}(3)$, 76-95 (1995)
- Bleecker, D.D.: Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra. J. Diff. Geom. 43, 505–526 (1996)
- 8. Погорелов, А.В.: Геометрическая теория устойчивости оболочек. М., "Наука 1966, 296 стр.
- 9. Милка, А.Д.: Линейные изгибания звездчатых бипирамид. Proceedings of the International Geometry Center 1(1-2), 71-96 (2008)
- Милка, А.Д.: Решение проблемы Бликера. Тез. докл. 4-й междунар. конф. по геометрии и топологии (13-20 сентября 2001, Черкассы), 64-65 (2001)
- 11. Горькавый, В.А., Милка, А.Д.: Изгибания правильных многогранников с увеличением объема. Труды международной конференции "Геометрия в Одессе-2008" (19–24 мая 2008, Одесса). Киев, Институт математики НАН Украины (2009) (В печати)
- 12. Самарин, Г.А.: Изометрические деформации многогранников, увеличивающие содержащийся в них объем. Материалы IX межд. семин. "Дискретная математика и ее приложения". М., Из-во МГУ, 406–409 (2007)
- 13. Вольмир, А.С.: Устойчивость упругих систем (цилиндрические оболочки). М.: Физматгиз, 1963, 880 стр.
- 14. Штогрин, М.И.: Изометрические погружения конуса и цилиндра. Изв. РАН. Сер. матем. **73**(1), 187—224 (2009)

В. А. Горькавый

ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

А. Д. Милка

GST Joint Stock Company, Харьков, Украина

E-mail: gst@nti.com.ua, milka@ilt.kharkov.ua

А. Н. Соболева

ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

V. A. Gorkavyy, A. D. Milka, A. N. Soboleva

Linear bendings of prisms with increasing volume

We construct volume increasing piece-linear isometric deformations of right prisms.

Mathematics Subject Classification (2000) $52B10 \cdot 52A38$

Minkowski metrics on solutions of the equation of nonstationary transonic gas flow

V. V. Lychagin V. A. Yumaguzhin

Abstract In this paper, we show that every solution of the equation of nonstationary transonic gas flow possesses a Minkowski metric. This metric is responsible for transport of singularities of solutions of this equation. We find explicit solutions for which the metrics are either locally-flat or Ricci-flat or conformally-flat.

Keywords Equation of nonstationary transonic gas flow \cdot Jet-bundle \cdot Symbol of nonlinear differential operator \cdot Metric \cdot Riemann tensor \cdot Ricci tensor \cdot Weyl tensor \cdot Explicit solution

Mathematics Subject Classification (2000) $35A30 \cdot 35Q72 \cdot 53B30 \cdot 53C50$

1 Introduction

The geometric singularities of any nonlinear differential equation are moving along Hamiltonian vector fields where the Hamiltonian is defined by the symbol of the linearization of the PDE on a solution, see [2]. In this paper, we consider a 2-order nonlinear differential operator that is defined by the equation of nonstationary transonic gas flow (ntgf). A symbol of the linearization of this operator defines a Minkowski metric on every ntgf-solution. The zero-geodesics of the metric (or "light rays") are just trajectories of geometric singularities of ntgf-solutions. We investigate various classes of explicit solutions on which the metrics are either locally-flat or Ricci-flat or conformally-flat. It is appeared that only solutions with

Ricci-flat metrics are Einstein manifolds and only locally-flat metrics of solutions are projectively-flat.

2 Equation of nonstationary transonic gas flow

2.1 Nonlinear differential operator

The equation of nonstationary transonic gas flow is the following nonlinear PDE, see [1],

$$2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. (1)$$

The corresponding nonlinear differential operator may be defined as follows.

Let us consider the trivial bundle

$$\pi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \pi: (t, x, y, z, u) \mapsto (t, x, y, z).$$

Denote by $j_p^k S$ the k-jet at a point p of a section S of the bundle π , and by $J^k \pi$ we denote the manifold of all k-jets of all sections of π . Then

$$\pi_k: J^k \pi \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \pi_k: j_p^k S \mapsto p$$

is the k-jet bundle of sections of π .

For all natural numbers q and r such that q > r, we denote by $\pi_{q,r}$ the natural projections

$$\pi_{q,r}: J^q \pi \longrightarrow J^r \pi, \quad \pi_{q,r}: j_p^q S \mapsto j_p^r S.$$

Every section S of the bundle π generates the section j_kS of the bundle π_k by the formula

$$j_k S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow J^k \pi \,, \quad j_k S : p \mapsto j_p^2 S \,.$$

Consider now the nonlinear 2nd order differential operator Δ acting on sections of π by the formula

$$\Delta = \varphi_{\Delta} \circ j_2 \,,$$

where the function $\varphi_{\Delta}: J^2\pi \to \mathbb{R}$ is defined by the left hand side of equation (1)

$$\varphi_{\Delta}(t, x, y, z, u, u_t, \dots, u_{zz}) = 2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} - u_{zz},$$

where $t, x, y, z, u, u_t, \ldots, u_{zz}$ are the canonical coordinates on the 2-jet bundle $J^2\pi$.

Then the set of all solutions of equation (1) coincides with the set of all sections S of π so that $\Delta(S) = 0$.

2.2 Symbols

Let $\theta_2 \in J^2\pi$, $\theta_1 = \pi_{2,1}(\theta_2)$, $p = \pi_2(\theta_2)$, and let F_{θ_1} be the fiber of projection $\pi_{2,1}$ over θ_1 . That is,

$$F_{\theta_1} = (\pi_{2,1})^{-1}(\theta_1).$$

Consider the exact sequence

$$0 \to \mathbb{R} \otimes (T_p^* \odot T_p^*) \xrightarrow{i} J_p^2 \pi \xrightarrow{\pi_{2,1}} J_p^1 \pi \to 0,$$

where T_p^* is the cotangent space to the base of π at the point p and $(T_p^* \odot T_p^*)$ is the symmetric square of the cotangent space, the map i is defined by the formula

$$i(v \otimes (df \odot dg)) = j_p^2(\frac{1}{2}fgS),$$

where f, g and S are smooth functions such that f(p) = g(p) = 0, and S(p) = v.

From this exact sequence, we get the natural isomorphism

$$F_{\theta_1} \cong T_p^* \odot T_p^*$$
.

Recall, see for example [3], that the symbol of Δ at point θ_2 is the restriction of the differential φ_{Δ} on the tangent space $T_{\theta_2}(F_{\theta_1})$ of the fiber F_{θ_1} at the point θ_2 :

$$Smbl_{\theta_2} \Delta = (\varphi_{\Delta})_*|_{T_{\theta_2}(F_{\theta_1})}.$$

Taking into account the natural identification of $T_p^* \odot T_p^*$ with its tangent space, we can represent $\mathrm{Smbl}_{\theta_2} \Delta$ as an element of $(T_p^* \odot T_p^*)^*$.

This element is the symmetric (2,0) — tensor

$$2\frac{\partial}{\partial_t}\frac{\partial}{\partial_x} + u_x\frac{\partial}{\partial_x}\frac{\partial}{\partial_x} - \frac{\partial}{\partial_y}\frac{\partial}{\partial_y} - \frac{\partial}{\partial_z}\frac{\partial}{\partial_z} \in T_p \odot T_p.$$

This tensor is non degenerate and therefore it generates the isomorphism $T_p^* \to T_p$. The inverse one to this isomorphism is defined a metric of signature (+, -, -, -)

$$g(\theta_2) = -u_x dt^2 + 2dt dx - dy^2 - dz^2 \in T_p^* \odot T_p^*.$$

In other words, the symbol $\operatorname{Smbl}_{\theta_2} \Delta$ of the operator Δ at the point θ_2 defines in a natural way the Minkowski metric $g(\theta_2)$ on the tangent space T_p , where $p = \pi_2(\theta_2)$.

As a result of this construction, we get a field of horizontal Minkowski metrics on the 2-jet bundle $J^2\pi$

$$g: J^2\pi \longrightarrow T^* \odot T^*, \quad g: \theta_2 \mapsto g(\theta_2).$$

2.3 Metric structures on solutions

Let

$$S:(t,x,y,z)\mapsto (t,x,y,z,u(t,x,y,z))$$

be a solution of equation (1).

Denote by $L_S^{(2)}$ the image of the section j_2S of the bundle π_2 .

Then, if we identify solutions S and submanifolds $L_S^{(2)} \subset J^2\pi,$ the restriction

$$g_S = g|_{L_S^{(2)}} = -\frac{\partial u(t, x, y, z)}{\partial x} dt^2 + 2dt dx - dy^2 - dz^2$$

gives a Minkowski metric on the manifold $L_S^{(2)}$, associated with the solution.

2.4 Explicit solutions

In this section we use the classical differential invariants of metrics to get classes of explicit solutions of the ntgf-equation.

2.4.1 Locally-flat solutions

We will find solutions $(L_S^{(2)}, g_S)$ of ntgf-equation such that the corresponding metrics g_S are locally-flat. It is known that a metric is locally flat if and only if its curvature tensor is zero.

In our case, nonzero components of the curvature tensor are:

$$\begin{split} R_{1212} &= \frac{1}{2} u_{xxx}, \ R_{1213} = \frac{1}{2} u_{xxy}, \ R_{1214} = \frac{1}{2} u_{xxz}, \\ R_{1313} &= \frac{1}{2} u_{xyy}, \ R_{1314} = \frac{1}{2} u_{xyz}, \ R_{1414} = \frac{1}{2} u_{xzz} \,. \end{split} \tag{2}$$

From (2) we observe that the required solution of equation (1) should also satisfy equations

$$u_{xxx} = 0$$
, $u_{xxy} = 0$, $u_{xxz} = 0$, $u_{xyy} = 0$, $u_{xyz} = 0$.

Solving these equations together with ntgf-equation, we get the following class of explicit ntgf-solutions with locally flat metric g_S :

$$u(t, x, y, z) = \frac{x^2}{t + C} + (h_1(t)y + h_2(t)z + h_3(t))x + h(t, y, z),$$

where C is an arbitrary constant, h_1 , h_2 , h_3 are smooth arbitrary functions on t and h is an arbitrary function satisfying to the equation

$$h_{yy} + h_{zz} = 2\left(\frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1}{C+1}\right)y + 2\left(\frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2}{C+1}\right)z + 2\left(\frac{dh_3}{dt} + \frac{h_3}{C+1}\right).$$

In particular, if h is a harmonic function w.r.t. y and z, then we get the following explicit solutions

$$u(t,x,y,z) = \frac{x^2}{t+C} + \frac{(C_1y + C_2z + C_3)x}{t+C} + h(t,y,z), \quad h_{yy} + h_{zz} = 0,$$

where C, C_1 , C_2 , C_3 are arbitrary constants.

2.4.2 Projectively-flat solutions

We look for solutions $(L_S^{(2)}, g_S)$ of ntgf-equation such that metrics g_S are projectively-flat.

Recall that a metric space (L,g) is projectively-flat if there exist local coordinates in a neighborhood of every point of L such that geodesic lines of g are represented as straight lines in these coordinates.

It is known, see [4], that (L, g) is projectively-flat if and only if (L, g) is a space of constant curvature. Then the curvature tensor is expressed in terms of the metric in the following way

$$R_{lkij} = K(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki}), \quad K = \text{constant}.$$

Comparing the curvature tensor of g_S with the tensor $(g_S)_{li}(g_S)_{kj} - (g_S)_{lj}(g_S)_{ki}$, we get that K = 0.

Therefore the only locally-flat solutions of ntgf-equation are projectively-flat.

2.4.3 Ricci-flat solutions

We find solutions $(L_S^{(2)}, g_S)$ of ntgf-equation such that the Ricci tensor of g_S is zero.

In our case, nonzero components of the Ricci tensor are:

$$R_{11} = -\frac{1}{2}u_x u_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xyy} + \frac{1}{2}u_{xzz}, \ R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2}u_{xxx},$$

$$R_{13} = R_{31} = \frac{1}{2}u_{xxy}, \ R_{14} = R_{41} = \frac{1}{2}u_{xxz}$$
(3)

From (3) we get that the required solutions of ntgf-equation should also satisfy equations

$$u_{xxx} = 0$$
, $u_{xxy} = 0$, $u_{xxz} = 0$, $u_{xyy} + u_{xzz} = 0$.

Solving these equations together with ntgf-equation, we obtain the following class of explicit solutions of the ntgf- equation:

$$u(t, x, y, z) = \frac{x^2}{t + C} + h_1(t, y, z)x + h(t, y, z),$$

where C is an arbitrary constant, h_1 is harmonic w.r.t. y and z, and h is an arbitrary function satisfying to the equation

$$h_{yy} + h_{zz} = 2\frac{\partial h_1}{\partial t} + 2\frac{h_1}{t+C}.$$

In particular, if h is harmonic w.r.t. y and z, then we get the following explicit solutions

$$u(t, x, y, z) = \frac{x^2}{t+C} + \frac{h_1(y, z)}{t+C} x + h(t, y, z),$$

where C is a constant, h_1 and h are harmonic w.r.t. y and z.

2.4.4 Einstein manifolds

We find solutions $(L_S^{(2)}, g_S)$ of ntgf-equation which are Einstein manifolds. Recall that a Minkowski manifold (M, g) is Einstein if and only if the Ricci tensor R of metric g is proportional to g. That is, $R = \lambda g$, for some constant λ .

Comparing the Ricci tensor of g_S with this metric, we get that the only Ricci-flat solutions of equation (1) are Einstein manifolds.

2.4.5 Conformally-flat solutions

We find solutions $(L_S^{(2)}, g_S)$ of the equation of nonstationary transonic gas flow such that its metric g_S is conformally-flat.

Recall that a metric is called conformally-flat if, in neighborhood of every point, it can be transformed to the form $e^f g$, where f is a smooth function and g is a flat metric.

It is known that a metric is conformally-flat if and only if its Weyl tensor is zero.

In our case, nonzero components of the Weyl tensor are:

$$W_{1212} = \frac{1}{6}u_{xxx}, \ W_{1213} = \frac{1}{4}u_{xxy}, \ W_{1214} = \frac{1}{4}u_{xxz},$$

$$W_{1313} = \frac{1}{4}u_{xyy} + \frac{1}{12}u_{x}u_{xxx} - \frac{1}{4}u_{xzz}, \ W_{1314} = \frac{1}{2}u_{xyz},$$

$$(4)$$

and other nonzero components are linear combinations of these ones.

From (4) we get that the required solutions should satisfy the following equations:

$$u_{xxx} = 0$$
, $u_{xxy} = 0$, $u_{xxz} = 0$, $u_{xyz} = 0$, $u_{xyy} - u_{xzz} = 0$.

Solving these equations together with ntgf-equation, we get the following class of explicit solutions of ntgf-equation with conformally-flat metric g_S .

$$u(t, x, y, z) = h(t)x^{2} + ((h' + h^{2})(y^{2} + z^{2}) + h_{1}(t)y + h_{2}(t)z + h_{3}(t))x + \varphi(t, y, z),$$

where h, h_1, h_2 , and h_3 are arbitrary functions on t, and φ satisfies to the equation

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 2(h'' + 3hh' + h^3)(y^2 + z^2) + 2(h'_1 + h_1h)y + 2(h'_2 + h_2h)z + 2(h'_3 + h_3h).$$

In particular, if φ is harmonic w.r.t. y and z, then we get the following solution

$$u(t, x, y, z) = h(t)x^{2} + ((h' + h^{2})(y^{2} + z^{2}) + e^{-\int hdt}(C_{1}y + C_{2}z + C_{3}))x + \varphi(t, y, z),$$

where C_1 , C_2 , and C_3 are constants and h(t) satisfies to the equation

$$h'' + 3hh' + h^3 = 0.$$

References

- Ibragimov, N.H. (ed): CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1, Symmetries, exact solutions, and conservation laws, CRC Press, Boca Raton, 1994, 429 pp.
- 2. Lychagin, V.: Singularities of multivalued solutions of nonlinear partial differential equations, and nonlinear phenomena. Acta Appl. Math. 3(2), 135–173 (1985)
- 3. Krasil'shchik, I.S., Lychagin, V.V., Vinogradov, A.M.: Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. Gordon and Breach, New York, 1986, xx+441 pp.
- 4. Rashevskiy, P.K.: Riemann geometry and tensor analysis. Moskva, "Nauka", 1967, 664 pp.

V. V. Lychagin

Tromsoe University, Tromsoe, Norway and the Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia.

E-mail: lychagin@yahoo.com

V. A. Yumaguzhin

Program Systems Institute of RAS, Pereslavl'-Zalesskiy, 152020, Russia. E-mail: yuma@diffiety.botik.ru

Симметрии и интегрирующая матрица

М. Рахула

Аннотация Распределение на многообразии может быть задано с помощью векторного базиса или с помощью дуального кобазиса. Существует связь между симметриями распределения и интегрирующей матрицей кобазиса. Именно, обратная матрица интегрирующей матрицы определяет систему инфинитезимальных симметрий распределения и, наоборот, с помощью инфинитезимальных симметрий можно определить интегрирующую матрицу. Интегрирующая матрица обобщает классическое понятие интегрирующего множителя для одной дифференциальной формы.

Ключевые слова Симметрии распределения · Векторные поля поектирующие и проектируемые · Интегрирующая матрица.

УДК 514.7

1 Введение

О распределениях на многообразиях, их решениях, интегралах и симметриях можно говорить, не прибегая к локальным координатам. Вспомогательным средством при таком представлении являются векторные поля как операторы дифференцирования, векторные поля проектирующие и векторные поля проектируемые. Двойственную роль играют дифференциальные формы с операцией внешнего дифференцирования. Словом, мы пользуемся аппаратом исчисления Ли-Картана. С помощью этого аппарата мы развиваем теорию распре-

делений и главной нашей целью является исследовать связь между симметриями распределения и интегрирующей матрицей его кобазиса.

Тема, касающаяся интегрирующих матриц и симметрий, поднятая ещё в книге [1], заслуживает отдельного разговора.

2 Распределение на многообразии

2.1 Бескоординатное представление

Рассмотрим на гладком (n+r)-мерном многообразии M n-мерное распределение Δ . Это значит, что в каждом касательном пространстве $T_u M$ задано некоторое n-мерное подпространство Δ_u . Будем говорить, что на многообразии M задано n-мерных n-мерных n-мидадо κ^3 :

$$u \rightsquigarrow \Delta_u, \forall u \in M.$$

2.2 Решения и интегралы

Любая иммерсия $\varphi: M_1 \to M$ называется решением распределения Δ , если

$$\operatorname{Im} T\varphi \subset \Delta. \tag{1}$$

Это значит, что при иммерсии φ все касательные плоскости к поверхности $\varphi(M_1)$ должны принадлежать соответствующим площадкам распределения Δ .

Любая субмерсия $\psi: M \to M_2$ называется uнтегралом распределения Δ , если

$$\operatorname{Ker} T\psi \supset \Delta.$$
 (2)

Это значит, что при субмерсии ψ все площадки распределения Δ должны принадлежать соответствующим площадкам распределения $\ker T\psi$, или же, иначе говоря, распределение Δ должно касаться слоёв расслоения ψ и все его площадки при касательном отображении $T\psi$ должны аннулироваться.

 $^{^3}$ Заметим, что n-мерная площадка в (n+r)-мерном векторном пространстве $T_u M$ фиксируется с произволом nr параметров.

Распределение Δ называется (вполне) интегрируемым, если существует субмерсия $\psi: M \to M_2$, такая, что

$$Ker T\psi = \Delta. (3)$$

Слои расслоения ψ называются максимальными интегральными поверхностями распределения Δ .

Что касается распределения $\operatorname{Ker} T\psi$, то ясно, что оно всегда интегрируемо и в случае включения (2) распределение Δ трактуется как его, вообще говоря, неинтегрируемое nodpacnpedenenue.

2.3 Симметрии

Преобразование (диффеоморфизм) $a:M\to M$ переводит распределение Δ в общем случае в другое распределение $Ta(\Delta)$. В случае, когда $Ta(\Delta)=\Delta$, преобразование a называется cummempueŭ распределения Δ . При симметрии a все решения и интегралы распределения Δ переходят опять-таки в решения и интегралы этого распределения:

$$\varphi \rightsquigarrow a \circ \varphi, \qquad \psi \rightsquigarrow \psi \circ a.$$

Векторное поле P на многообразии M называется uнфинитезимальной cимметрией распределения Δ , если его поток $a_t = \exp t P$ представляет собой 1-параметрическую группу симметрий распределения Δ . Ещё при этом говорят, что распределение Δ dопускает векторное поле P. В потоке симметрий a_t любое решение (интеграл) распределения Δ увлекается в 1-параметрическое семейство решений (интегралов) этого распределения:

$$\varphi \rightsquigarrow a_t \circ \varphi, \qquad \psi \rightsquigarrow \psi \circ a_t.$$

Если позволительно говорить о производной (как, например, в случае $M_2 = \mathbb{R}^p, \ p \leq r)$

$$P\psi = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\psi \circ a_t - \psi),$$

то отсюда следует, что при дифференцировании интеграла ψ относительно инфинитезимальной симметрии P мы получаем производную $P\psi$, также являющуюся интегралом распределения Δ .

Векторное поле P на многообразии M называется $xарактеристическим полем распределения <math>\Delta$, если оно одновременно является инфинитезимальной симметрией этого распределения и ему принадлежит. Распределение Δ при наличии характеристического поля проектируется в (n+r-1)-мерное пространство инвариантов поля P с понижением размерности. Обозначим эту проекцию через π , тогда

$$\Delta \longrightarrow T\pi(\Delta), \quad \dim \Delta = n \Rightarrow \dim(T\pi(\Delta)) = n - 1.$$

Если, например, $\dim \Delta = 2$, то $T\pi(\Delta) - 1$ -мерное распределение (поле изоклин), которое интегрируется как система ОДУ. Интегралы этой системы, поднятые на многообразие M, становятся интегралами распределения Δ :

$$\psi \rightsquigarrow \pi \circ \psi$$
.

2.4 Интегрирующая матрица

Распределение Δ на многообразии M может быть определено⁴ как линейная оболочка n линейно независимых векторных полей (X_i) или как аннулятор r линейно независимых 1-форм (ω^{α}) . Будем говорить о базисе (X_i) распределения Δ и о его кобазисе (ω^{α}) . При этом

$$\omega^{\alpha}(X_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \ \alpha = n + 1, \dots, n + r.$$

Для того, чтобы векторное поле P на многообразии M было инфинитезимальной симметрией распределения Δ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий :

$$\mathcal{L}_{P}X \parallel X \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{P}\omega \parallel \omega \,, \tag{4}$$

где знак \parallel означает, что производные Ли $\mathcal{L}_P X_i$ и $\mathcal{L}_P \omega^{\alpha}$ могут быть линейно выражены соответственно в базисе (X_i) или кобазисе (ω^{α}) .

Если интеграл распределения Δ определяется субмерсией

$$\psi: M \to \mathbb{R}^p, \ p \le r,$$

 $^{^4}$ Векторные поля и дифференциальные формы на многообразии M предполагаются достаточно гладкими, т. е. достаточно высокого класса дифференцируемости.

 $^{^5}$ Эквивалентность условий (4) легко установить, если равенство $\omega^\alpha(X_i)=0$ дифференцировать по правилу Лейбница: $\omega^\alpha(\mathcal{L}_PX_i)+\mathcal{L}_P\omega^\alpha(X_i)=0$.

точнее, p функциями ψ^{λ} , где $\lambda = n + r - p + 1, \ldots, n + r$, то дифференциалы этих функций $d\psi^{\lambda}$ могут быть выражены в кобазисе (ω^{α}) с помощью некоторой $(p \times r)$ -матрицы⁶ $B = (B_{\alpha}^{\lambda})$,

$$d\psi^{\lambda} = B^{\lambda}_{\alpha}\omega^{\alpha}$$
, или в матричной записи : $d\psi = B\omega$. (5)

Матрица B, выделяющая в кобазисе (ω^{α}) систему точных дифференциалов $(d\psi^{\lambda})$ согласно (5), называется интегрирующей матрицей ранга p для кобазиса (ω^{α}) .

Любой общий инвариант базисных операторов X_i является интегралом распределения Δ и его дифференциал выражается в кобазисе (ω^{α}) с помощью интегрирующей матрицы B ранга 1.

Положим, что в пространстве \mathbb{R}^p заданы координатные функции (v^{λ}) и определён натуральный базис $(\partial_{\mu}, dv^{\lambda})$. Операторы $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial v^{\mu}}$ образуют поле реперов, дифференциалы dv^{λ} — поле дуальных кореперов. Если функции (ψ^{α}) , определяющие субмерсию $\psi: M \to \mathbb{R}^p$, связать с функциями (v^{λ}) , то

$$\psi^{\lambda} = v^{\lambda} \circ \psi \quad \Rightarrow \quad d\psi^{\lambda} = dv^{\lambda} \circ T\psi.$$

Любое векторное поле P на многообразии M, проектируемое при субмерсии ψ в пространстве \mathbb{R}^p в некоторое векторное поле $T\psi(P)$, допускается распределением Δ , т. е. является его инфинитезимальной симметрией. Зададим на многообразии M систему p векторных полей P_{μ} , таких 7 , что $d\psi^{\lambda}(P_{\mu}) = P_{\mu}\psi^{\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu}$, короче, $P\psi = E$, где E — единичная матрица порядка p. Все поля P_{μ} будут ψ -проектируемы в \mathbb{R}^p и при этом $T\psi(P_{\mu}) = \partial_{\mu}$. Установится связь интегрирующей матрицы $B = (B^{\lambda}_{\alpha})$ для кобазиса ω с инфинитезимальными симметриями $P = (P_{\mu})$ распределения Δ :

$$P\psi = E, \ d\psi = B\omega \quad \Rightarrow \quad B\omega(P) = E.$$
 (6)

Это — следствие из (5). В общем случае матрицы B и $\omega(P)$ здесь порядка $p \times r$ и $r \times p$ соответственно и обе — ранга p. В случае p = r распределение Δ интегрируемо и матрицы B и $\omega(P)$ регулярны. Это позволяет определить с помощью инфинитезимальных симметрий $P = (P_{\beta})$ интегрирующую матрицу B, и наоборот.

 $^{^{6}}$ Имеется в виду, что матрица B имеет p строк и r столбцов, причём строки линейно независимы.

 $^{^7}$ В выборе полей P_μ имеется некоторый произвол: например, в расслоении ψ можно задать произвольное горизонтальное распределение Δ_h размерности p и определить поля P_μ путём поднятия операторов ∂_μ на Δ_h , как горизонтальные лифты.

Теорема 1 Если распределение Δ с кобазисом $\omega = (\omega^{\alpha})$ интегрируемо, $\Delta = \text{Ker}T\psi$, и допускает систему r линейно независимых инфинитезимальных симметрий $P = (P_{\beta})$, не принадлежащих Δ , но проектируемых при субмерсии ψ в коммутирующие операторы $T\psi(P_{\beta}) = \partial_{\beta}$, то для кобазиса ω определяется интегрирующая матрица

$$B = \left(\omega(P)\right)^{-1}.$$

Наоборот, если для кобазиса ω определена интегрирующая матрица B и $B\omega=d\psi$, то векторные поля $P=(P_{\beta})$, такие, что $P\psi=E$, образуют систему инфинитезимальных симметрий распределения Δ .

Замечание 1 Как известно, распределение Δ интегрируемо тогда и только тогда, когда при внешнем дифференцировании форм ω^{α} выполняется следующее условие:

$$d\omega^{\alpha} = \vartheta^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta},$$

где $\vartheta=(\vartheta_{\beta}^{\alpha})$ — некоторая матричная 1-форма на M. Пишем в матричном виде без индексов: $d\omega=\vartheta\wedge\omega$. Если B — интегрирующая матрица для кобазса ω , то

$$d\psi = B\omega \Rightarrow 0 = dB \wedge \omega + B d\omega \Rightarrow d\omega = -B^{-1}dB \wedge \omega, \ \vartheta = -B^{-1}dB.$$

Замечание 2 Eсли B_1 и B_2 — две интегрирующие матрицы для кобазиса ω , то матрица $B_2B_1^{-1}$ является интегралом распределения Δ . Действительно, если матрицам B_1 и B_2 соответствуют субмерсии ψ_1 и ψ_2 , то

$$d\psi_1 = B_1\omega, \ d\psi_2 = B_2\omega \quad \Rightarrow \quad d\psi_2 = (B_2B_1^{-1})d\psi_1.$$

Дифференцируя относительно произволного векторного поля X, принадлежащего рапределению Δ , последнее равенство по Ли, учитывая при этом, что $\mathcal{L}_X d\psi_{1,2} = d(X\psi_{1,2}) = 0$, получаем: $X(B_2B_1^{-1}) = 0$.

3 Координатное представление

О симметриях распределения Δ удобно говорить относительно некоторой субмерсии π с трансверсальными к Δ слоями, т. е. в контексте связности в расслоении π .

Связность в расслоении

$$\pi: M_1 \to M, \tag{7}$$

с n-мерной базой M и r-мерными слоями, определяется заданием на многообразии M_1 структуры

$$\Delta_h \oplus \Delta_v,$$
 (8)

где $\Delta_v = \mathrm{Ker} T\pi - вертикальное r$ -мерное распределение, касательное к слоям, и $\Delta_h - горизонтальное n$ -мерное распределение, дополнительное к распределению Δ_v .

Перенесение слоёв над путём $\gamma(t)$, заданным на базе M, осуществляется вдоль *горизонтальных лифтов* этого пути — интегральных кривых *поля изоклин*, высекаемого распределением Δ_h на (r+1)-мерной поверхности $\pi^{-1}(\gamma(t))$.

Если расслоение (7) — *векторное* и перенесение слоёв над путями — *линейное*, то говорят о *линейной связности*.

Линейная связность в касательном расслоении $\pi:TM\to M$ приводит нас к аффинной связности и классическому тензорному анализу, а разговор об инфинитезимальных симметриях распределения Δ_h приводит нас к теории движений в пространстве со связностью и, в частности, к аффинным коллинеациям и полям Киллинга.

3.1 Адаптированный базис

Пусть на окрестности $U \subset M_1$ заданы координаты (u^i, u^α) , которые согласованы с расслоением π . Это значит, что базисные координаты (u^i) на U π -связаны с координатами (\bar{u}^i) на окрестности $\pi(U) \subset M$, т. е. $u^i = \bar{u}^i \circ \pi$. Индексы пробегают значения:

$$i, j, k = 1, \dots, n;$$
 $\alpha, \beta, \gamma = n + 1, \dots, n + r.$

Операторы $\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i}$ поднимаются с окрестности $\pi(U)$ на распределение Δ_h , где они определяют базис этого распределения

$$X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + \Gamma_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}.$$
 (9)

Коэффициенты Γ_i^{α} , число которых равно nr, в общем случае зависят как от базисных, так и от слоевых координат. Одновременно на

окрестности U определяется система 1-форм 8 , аннулируемая операторами X_i :

$$\omega^{\alpha} = du^{\alpha} - \Gamma_i^{\alpha} du^i. \tag{10}$$

Система Пфаффа $\omega^{\alpha}=0$ эквивалентна системе дифференциальных уравнений, где u^i — независимые переменные и u^{α} — неизвестные функции:

$$\omega^{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{i}} = \Gamma_{i}^{\alpha} \,. \tag{11}$$

На окрестности U определяется адаптированный базис (X, ω) :

$$(X_i \ X_\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \ \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) \cdot \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ \Gamma_i^\beta \ \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\Gamma_j^\alpha \ \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}.$$

Для вычисления дифференциалов функций $f \rightsquigarrow df$ на M_1 целесообразно пользоваться единичным аффинором, который в адаптированном базисе имеет вид:

$$d=X_i\otimes du^i+\partial_{lpha}\otimes\omega^{lpha},$$
 где $\partial_{lpha}=rac{\partial}{\partial u^{lpha}}\,,$

тогда

$$df = X_i f \, du^i + \partial_\alpha f \, \omega^\alpha. \tag{12}$$

Любое тензорное поле типа (p,q) в структуре $\Delta_h \oplus \Delta_v$ распадается на инвариантные блоки, число которых равно 2^{p+q} . В частности, объект неголономности произвольного базиса (с тремя индексами) распадается на 8 подобъектов. В случае адаптированного базиса (X,ω) у объекта неголономности отличны от нуля только два подобъекта:

1) объект связности

$$L_{i\beta}^{\alpha} = -\partial_{\beta}\Gamma_{i}^{\alpha}$$
,

2) объект кривизны

$$K_{ij}^{\alpha} = -\left(X_i \Gamma_j^{\alpha} - X_j \Gamma_i^{\alpha}\right).$$

 $^{^8}$ В случае интегрируемого распределения Δ_h возможно погружение в пространство бесконечных струй $\varphi:M_1\hookrightarrow J_{n,r}$ так, что векторные поля (9) и формы (10) будут соответственно φ -связаны с операторами полного дифференцирования и формами Картана в $J_{n,r}.$ В случае неинтегрируемого распределения Δ_h этому препятствует кривизна связности.

В случае линейной связности, когда величины Γ_i^{α} — линейные функции слоевых координат, объекты связности и кривизны записываются в виде:

$$\Gamma_i^{\alpha} = -\Gamma_{i\beta}^{\alpha} u^{\beta} \quad \Rightarrow \quad L_{i\beta}^{\alpha} = \Gamma_{i\beta}^{\alpha}, \quad K_{ij}^{\alpha} = K_{ij\beta}^{\alpha} u^{\beta},$$

где

$$K_{ij\beta}^{\alpha} = \partial_i \Gamma_{j\beta}^{\alpha} - \partial_j \Gamma_{i\beta}^{\alpha} + \Gamma_{i\gamma}^{\alpha} \Gamma_{j\beta}^{\gamma} - \Gamma_{j\gamma}^{\alpha} \Gamma_{i\beta}^{\gamma}.$$

В случае аффинной связности коэффициенты $K^{\alpha}_{ij\beta}$ определяют mensop $\kappa puвизны.$

Когда объект кривизны равен нулю, распределение Δ_h интегрируемо. Тогда формы ω^{α} на окрестности U с помощью интегрирующей матрицы $B=(B^{\alpha}_{\beta})$ обращаются в точные дифференциалы: $B^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}=d\psi^{\alpha}$, где ψ^{α} — независимые интегралы распределения Δ_h . Пишем короче, $B\omega=dI$.

Вопрос заключается в нахождении матрицы B с помощью инфинитезимальных симметрий распределения Δ_h .

3.2 Инфинитезимальные симметрии распределения Δ_h

Рассмотрим на многообразии M_1 векторное поле P, представив его одновременно в натуральном и адаптированном базисах следующим образом:

$$P = \xi^i \partial_i + \lambda^\alpha \partial_\alpha = \xi^i X_i + \eta^\alpha \partial_\alpha.$$

Адаптированные компоненты η^{α} связаны с натуральными λ^{α} соотношением

$$\eta^{\alpha} = \lambda^{\alpha} - \Gamma_{i}^{\alpha} \xi^{i}$$
.

Вычислим производные Ли векторных полей X_i и 1-форм ω^{α} относительно поля P:

$$\mathcal{L}_{P}X_{i} = -(X_{i}\xi^{j})X_{j} - (X_{i}\lambda^{\alpha} - P\Gamma_{i}^{\alpha} - \Gamma_{j}^{\alpha}X_{i}\xi^{j})\partial_{\alpha} =$$

$$= -(X_{i}\xi^{j})X_{j} - (X_{i}\eta^{\alpha} + L_{i\beta}^{\alpha}\eta^{\beta} + K_{ij}^{\alpha}\xi^{j})X_{\alpha},$$

$$\mathcal{L}_{P}\omega^{\alpha} = (X_{i}\lambda^{\alpha} - P\Gamma_{i}^{\alpha} - \Gamma_{j}^{\alpha}X_{i}\xi^{j})du^{i} + (\partial_{\beta}\lambda^{\alpha} - \Gamma_{i}^{\alpha}\partial_{\beta}\xi^{i})\omega^{\beta} =$$

$$= (X_{i}\eta^{\alpha} + L_{i\beta}^{\alpha}\eta^{\beta} + K_{ij}^{\alpha}\xi^{j})du^{i} + (\partial_{\beta}\eta^{\alpha} - L_{i\beta}^{\alpha}\xi^{i})\omega^{\beta}.$$

Два выражения в первой формуле при X_{α} и во второй при du^{i} равны:

$$X_i \eta^{\alpha} + L_{i\beta}^{\alpha} \eta^{\beta} + K_{ij}^{\alpha} \xi^j = X_i \lambda^{\alpha} - P \Gamma_i^{\alpha} - \Gamma_j^{\alpha} X_i \xi^j.$$

Обращение в нуль любой из этих величин означает, что векторное поле P является инфинитезимальной симметрией распределения Δ_h , см. (4),

$$X_i \lambda^{\alpha} - P \Gamma_i^{\alpha} - \Gamma_j^{\alpha} X_i \xi^j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_i \eta^{\alpha} + L_{i\beta}^{\alpha} \eta^{\beta} + K_{ij}^{\alpha} \xi^j = 0.$$

Левое уравнение — для натуральных компонент (ξ^i, λ^α) . Правое уравнение удобно тем, что, когда распределение Δ_h интегрируемо, $K^\alpha_{ij} = 0$, оно не содержит величин ξ^i , которые могут оставаться произвольными⁹. Будем иметь *определяющее соотношение* только для компонент η^α :

$$X_i \eta^{\alpha} - \partial_{\beta} \Gamma_i^{\alpha} \eta^{\beta} = 0. \tag{13}$$

Пусть найдена система r вертикальных линейно независимых инфинитезимальных симметрий $P_{\alpha}=\eta_{\alpha}^{\beta}\partial_{\beta}$. Тогда не будет ли обратная матрица (μ_{γ}^{α}) матрицы (η_{β}^{γ}) , т. е., такая, что $\mu_{\gamma}^{\alpha}\eta_{\beta}^{\gamma}=\delta_{\beta}^{\alpha}$, для системы форм ω^{α} интегрирующей?

Для обратных матриц (μ_{γ}^{α}) и (η_{β}^{γ}) эквивалентны записи:

$$X_i \mu_\beta^\alpha + \mu_\gamma^\alpha \, \partial_\beta \Gamma_i^\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_i \eta_\beta^\alpha - \partial_\gamma \Gamma_i^\alpha \, \eta_\beta^\gamma = 0. \tag{14}$$

Действительно, если дифференцировать по X_i связывающее эти матрицы соотношение, получаем:

$$\mu_{\gamma}^{\alpha}\eta_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad (X_{i}\mu_{\gamma}^{\alpha})\,\eta_{\beta}^{\gamma} + \mu_{\gamma}^{\alpha}(X_{i}\eta_{\beta}^{\gamma}) = 0,$$

и эквивалентность записей (14) становится очевидной. Однако, чтобы матрица (μ_{γ}^{α}) была интегрирующей, этого не достаточно. Дифференцируя внешним образом формы ω^{α} и $\mu_{\gamma}^{\alpha}\omega_{\beta}^{\gamma}$, с учётом, что распределение Δ_h интегрируемо, $X_{[i}\Gamma_{j]}^{\alpha}=0$, получаем:

$$d\omega^{\alpha} = \partial_{\beta} \Gamma_{i}^{\alpha} du^{i} \wedge \omega^{\beta},$$

$$d(\mu_{\gamma}^{\alpha} \omega^{\gamma}) = (X_{i} \mu_{\beta}^{\alpha} + \mu_{\gamma}^{\alpha} \partial_{\beta} \Gamma_{i}^{\gamma}) du^{i} \wedge \omega^{\beta} + \partial_{[\beta} \mu_{\gamma]}^{\alpha} \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}.$$

Чтобы формы $\mu_{\gamma}^{\alpha}\omega_{\beta}^{\gamma}$ были точны, $d(\mu_{\gamma}^{\alpha}\omega^{\gamma})=0$, на матрицу (μ_{β}^{α}) , а вместе с ней и на обратную матрицу (η_{β}^{α}) , накладываются дополнительные условия:

$$\begin{cases} X_{i}\mu_{\beta}^{\alpha} + \mu_{\gamma}^{\alpha}\partial_{\beta}\Gamma_{i}^{\gamma} = 0 \\ \partial_{[\beta}\mu_{\gamma]}^{\alpha} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{i}\eta_{\beta}^{\alpha} - \partial_{\gamma}\Gamma_{i}^{\alpha}\eta_{\beta}^{\gamma} = 0 \\ P_{[\beta}\eta_{\gamma]}^{\alpha} = 0. \end{cases}$$
(15)

 $^{^9}$ Инфинитезимальная симметрия распределение \varDelta_h определяется с точностью до горизонтальной составляющей.

Кроме эквивалентности (14), добавляются нижние условия, которые тоже эквивалентны:

$$\mu_{\sigma}^{\alpha}\eta_{\gamma}^{\sigma} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad P_{\beta}(\mu_{\sigma}^{\alpha}\eta_{\gamma}^{\sigma}) = (\partial_{\tau}\mu_{\sigma}^{\alpha})\eta_{\beta}^{\tau}\eta_{\gamma}^{\sigma} + \mu_{\sigma}^{\alpha}(P_{\beta}\eta_{\gamma}^{\sigma}) = 0,$$
$$\partial_{[\beta}\mu_{\gamma]}^{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_{[\beta}\eta_{\gamma]}^{\alpha} = 0.$$

Такова переформулировка Теоремы 1 на окрестности $U \subset M_1$ в адаптированном базисе (X, ω) :

Теорема 2 Если матрицы (μ_{β}^{α}) и (η_{β}^{α}) взаимнообратны, то для того, чтобы формы $\mu_{\gamma}^{\alpha}\omega^{\gamma}$ были локально точны и в то же время вертикальные операторы $P_{\alpha} = \eta_{\alpha}^{\gamma}\partial_{\gamma}$ — инфинитезимальные симметрии распределения Δ_h , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись эквивалентные между собой условия (15), при этом:

$$\omega^{\alpha}(P_{\beta}) = \eta^{\alpha}_{\beta}, \quad \mu^{\alpha}_{\beta} = (\omega^{\alpha}(P_{\beta}))^{-1}.$$

Замечание 3 В частности, векторные поля X_i , см. (9), допускаются распределением $\Delta_v = KerT\pi$. Если для Δ_v задать кобазис θ^i , то для него существует интегрирующая матрица $B = (B^i_j)$, причём $B^i_j\theta^j = du^j$ и $B^{-1} = \theta(X)$.

4 Интегрирующая матрица

Две проблемы встают в связи с дифференциальными уравнениями (ДУ). Если ДУ трактовать как некоторое предписание движения, то нас интересуют интегральные кривые и поверхности, на которых движение позволено. В таком случае исследуются решения ДУ — иммерсии φ , для которых $\text{Im}\varphi \subset \Delta$. Если же нас интересует двойственная картина — расслоение, где данное ДУ может быть адекватно описано, то в ход идут инварианты и интегралы — субмерсии ψ , для которых $\text{Ker}T\psi \supset \Delta$. Учитывая, что любое ДУ можно свести с помощью форм Картана к системе Пфаффа, то проблема по существу сводится к отысканию интегрирующей матрицы.

4.1 Интегрирующая матрица для форм Картана

В работе [2] был представлен экспоненциальный закон в пространстве бесконечных струй $J_{n,m}$.

В $J_{1,1}$ заданы координаты (t, u, u', u'', \ldots) , где t — параметр (*время*), а (u, u', u'', \ldots) — слоевые координаты, составляющие бесконечную матрицу-столбец U. Координатные функции U определяют на слое натуральный базис:

репер
$$\frac{\partial}{\partial U} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \ \frac{\partial}{\partial u'} \ \frac{\partial}{\partial u''} \ \ldots\right)$$
 и дуальный корепер dU .

Оператор полного дифференцирования D и формы Картана ω ,

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} U', \qquad \omega = dU - U'dt, \qquad (16)$$

определяют в расслоении $J_{1,1} \to \mathbb{R}: (t,U) \mapsto U$ адаптированный базис линейной связности:

$$\left(D \quad \frac{\partial}{\partial U}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ U' & E \end{matrix}\right), \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -U' & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ dU \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Экспоненциальный закон в $J_{1,1}$ выражается импликациями 10 :

$$U' = CU \quad \Rightarrow \quad U_t = e^{tC}U \quad \Rightarrow \quad I = e^{-tC}U, \tag{19}$$

$$\omega' = C\omega \quad \Rightarrow \quad \omega_t = e^{tC}\omega \quad \Rightarrow \quad dI = e^{-tC}\omega, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)' = -\frac{\partial}{\partial U} C \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial U}\right)_t = \frac{\partial}{\partial U} e^{-tC} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U} e^{tC}, \tag{21}$$

$$\eta' = C\eta \quad \Rightarrow \quad \eta_t = e^{tC}\eta \quad \Rightarrow \quad \nu = e^{-tC}\eta \,.$$
 (22)

где C — матрица сдвига (бесконечная единичная матрица E без первой строки) , e^{tC} — экспоненциал матрицы tC, а штрих означает производную Ли относительно D.

В импликации (19) равенство U' = CU понимается как ОДУ и решение этого ОДУ записывается в виде $U_t = e^{tC}U$. При фиксированном U и переменном t кривая (t, U_t) описывает траекторию векторного поля D, в $J_{1,1}$ определяется поток $\exp tD$. Если в выражении $e^{tC}U$ изменить знак параметра $t \leadsto -t$ и считать функции U не

¹⁰ Импликации (19–22) распространяются и в пространство $J_{n,m}$, но с использованием мульти-индексов.

фиксированными, получим инварианты $I = e^{-tC}U$ оператора D. Действительно, $I' = e^{-tC}(U' - CU) = 0$. Формулы $U_t = e^{tC}U$ и $I = e^{-tC}U$ могут быть расписаны в виде бесконечных систем:

$$u_t^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} u^{(k+l)} \frac{t^l}{l!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$
 (23)

$$i_k = \sum_{l=0}^{\infty} u^{(k+l)} \frac{(-t)^l}{l!}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$
 (24)

Если речь идёт о струе конкретной функции u(t), то формула (23) даёт при k=0 разложение этой функции в ряд Маклорена, а при k>0 — разложение в ряд её k-ой производной. Вообще, формула (23) — лишь формальная запись для чистой струи.

Импликация (20) понимается таким же образом, но для форм ω . Когда спускаемся по столбцу ω , каждая последующая форма является производной Ли предыдущей формы, поэтому $\omega' = C\omega$. Принимая это равенство за ОДУ, пишем решение $\omega_t = e^{tC}\omega$. Так увлекаются формы ω в потоке D. Изменение знака у параметра $t \leadsto -t$ даёт нам систему инвариантных форм, при этом

$$I = e^{-tC}U \qquad \Rightarrow \qquad dI = e^{-tC}\omega.$$
 (25)

Формы Картана ω , если их умножить на экспоненциал e^{-tC} , становятся точными дифференциалами. Экспоненциал e^{-tC} является для кобазиса ω интегрирующей матрицей 11 .

Формула $I = e^{-tC}U$ подсказывает нам замену слоевых координат инвариантами и заодно переход на слое от натурального базиса к инвариантному:

$$U \leadsto I \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial U}\,,\,dU\right) \quad \leadsto \quad \left(\frac{\partial}{\partial I}\,,\,dI\right).$$

Если корепер dI был описан импликацией (20), то репер $\frac{\partial}{\partial I}$ описывается аналогичным образом импликацией (21). Это — бесконечная

 $^{^{11}}$ Заметим, что только бесконечная система форм Картана допускает интегрирующую матрицу. Конечная система картановских форм этим свойством не обладает.

матрица-строка из операторов

$$\frac{\partial}{\partial i_0} = \frac{\partial}{\partial u} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial i_1} = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u'} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial i_2} = \frac{t^2}{2} \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial u''} ,$$
(26)

являющихся вертикальными инфинитезимальными симметриями оператора ${\cal D}$.

Теорема 2 об интегрирующей матрице распространяется на формы Картана в $J_{1,1}$:

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial I}\right) = e^{tC} \quad \leadsto \quad \left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial I}\right)\right)^{-1} = e^{-tC}.$$

Замечание 4 Преобразование координат $U \rightsquigarrow I$ в $J_{1,1}$ сопровождается точечным преобразованием φ , пишем

$$t \circ \varphi = t$$
, $I \circ \varphi = U$.

Происходит преобразование вертикального базиса:

$$T\varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial U} e^{tC}, \qquad dI \circ T\varphi = e^{-tC}\omega,$$

 $u \ b \ J_{1,1} \ onpedenaemca инвариантный базис — penep и корепер:$

$$T\varphi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial U}\right) = \left(D \quad \frac{\partial}{\partial I}\right) \cdot \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{matrix}\right),$$

$$\begin{pmatrix} dt \\ dI \end{pmatrix} \circ T\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 \ e^{-tC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Часто о преобразовании φ не пишут (и не говорят), но об этом нельзя забывать. Иначе при записи инвариантного репера можно натолкнуться (и наталкиваются) на абсурдное равенство $\frac{\partial}{\partial t} = D$.

Далее, спрашивается, при каком условии вертикальное векторное поле P в пространстве $J_{1,1}$ коммутирует с оператором D, т. е. P' = 0?

Представим это поле в натуральном и инвариантном реперах компонентами $\eta = PU$ и $\nu = PI$ и вычислим производную Ли P' в обоих реперах,

$$P = \frac{\partial}{\partial U} \eta = \frac{\partial}{\partial I} \nu$$
, $P' = \frac{\partial}{\partial U} (\eta' - C\mu) = \frac{\partial}{\partial I} \nu'$.

Получаем ответ: векторное поле P коммутирует с оператором D тогда и только тогда 12 , когда выполняется одно из условий $\eta' = C\eta$ или $\nu' = 0$. Эквивалентность этих двух условий видна из соотношения $\nu = e^{-tC}\eta$. Для величин η имеем импликацию (22), похожую на импликации (20) и (21). Равенство $\eta' = C\eta$ говорит о том,, что в столбце η каждый последующий элемент является производной предыдущего элемента относительно D и, следовательно, все элементы столбца η , начиная со второго, являются производными соответствующего порядка первого элемента — npouseodsume функции η_0 :

$$\eta_k = \eta_0^{(k)}, \ k = 1, \ 2, \ \dots$$

Возвращаясь к импликации (21), заметим, что инвариантный репер $\frac{\partial}{\partial I}$ состоит из вертикальных инфинитезимальных симметрий (26) с производящими функциями соответственно $1,t,\frac{t^2}{2},\ldots$ Теоремы 1 и 2 распространяются в $J_{1,1}$ на формы Картана :

$$\omega\Big(\frac{\partial}{\partial I}\Big) = e^{tC} \quad \leadsto \quad \Big(\omega\Big(\frac{\partial}{\partial I}\Big)\Big)^{-1} = e^{-tC}.$$

5 Интегрирующий множитель

Общая концепция об интегрирующей матрице при n=r=1 включает понятие интегрирующего множителя.

Пусть на плоскости ху задано ОДУ вида

$$y' = f(x, y). (27)$$

С этим ОДУ ассоциируются векторное поле X и форма ω :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{divX} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

¹² Условие $\eta' = C\eta$ согласуется с условием $X_i \eta_\beta^\alpha - \partial_\gamma \Gamma_i^\alpha \eta_\beta^\gamma = 0$, см. (13).

$$\omega = dy - f dx, \quad d\omega = \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy, \quad d(\mu \omega) = \left(\mu' + \mu \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Возьмем векторное поле $P=\eta \frac{\partial}{\partial y}$ и вычислим производные Ли:

$$\mathcal{L}_P X = \left(\eta' - \frac{\partial f}{\partial y} \, \eta \right) \frac{\partial}{\partial y} \,, \quad \mathcal{L}_P \omega = \left(\eta' - \frac{\partial f}{\partial y} \, \eta \right) dx \,.$$

При условии $\mu \eta = 1$ следующие соотношения будут эквивалентны:

$$\mu' + \mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta' - \frac{\partial f}{\partial y} \eta = 0.$$
 (28)

Слева имеем условие на интегрирующий множитель μ формы ω , а справа — условие на коэффициент η , чтобы поле P было инфинитезимальной симметрией (см. (14)). При этом

$$\eta = \omega(P), \quad \mu = (\omega(P))^{-1}.$$

В общем случае на плоскости uv, когда

$$X = x \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v}, \quad \omega = -y du + x dv, \quad P = \xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}, \quad \omega(P) = x \eta - y \xi,$$

имеем эквивалентны записи:

$$\frac{\partial(\mu x)}{\partial u} + \frac{\partial(\mu y)}{\partial v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (Px - \xi')y - (Py - \eta')x = 0. \tag{29}$$

Слева стоит условие, чтобы форма $\mu\omega$, где $\mu=(x\eta-y\xi)^{-1}$, была замкнута, а справа, чтобы поле P было инфинитезимальной симметрией. Переход от (29) к (28) осуществляется заменой:

$$(u,v) \rightsquigarrow (x,y), (x,y) \rightsquigarrow (1,f), (\xi,\eta) \rightsquigarrow (0,\eta).$$

Инвариант поля X удобно вычислить в координатах (u, v), где u и v — канонический параметр и инвариант поля P.

Предложение 1 Если поле P — инфинитезимальная симметрия поля X и (u,v) — соответственно его канонический параметр и инвариант, то инвариант поля X вычисляется по формуле

$$I = u - \int \frac{x}{y} \, dv \,, \tag{30}$$

еде под интегралом — отношение компонент поля X, зависящее от переменной v.

Доказательство Имея $P=\frac{\partial}{\partial u}$ и $\omega(P)=-y$, пользуемся тем, что существует коэффициент λ , такой, что $P'=\lambda X$:

$$Pu = 1 \quad \Rightarrow \quad Px = PXu = [P, X]u = -P'u = -\lambda Xu = -\lambda x,$$

$$Pv = 0 \quad \Rightarrow \quad Py = PXv = [P, X]v = -P'v = -\lambda Xv = -\lambda y,$$

$$yPx - xPy = -yP'u + xP'v = \lambda(-yx + xy) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{x}{y}\right) = P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yPx - xPy}{y^2} = 0,$$

$$\frac{\omega}{\omega(P)} = \frac{-ydu + xdv}{-y} = du - \frac{x}{y}dv.$$

Пример 1 Для линейного векторного поля

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

 $nomok\ a_t = \exp tX$ onpedensemcs экспоненциальным законом:

$$U' = CU \quad \Rightarrow \quad U_t = e^{Ct}U,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix},$$

 $\epsilon de\ C-nocmoянная\ матрица\ u\ e^{Ct}-s$ кспоненциал матрицы Ct,

$$e^{Ct} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct)^k}{k!}.$$

Оператор гомотетий

$$P = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v},$$

обладающий инвариантом

$$p = \frac{v}{u},$$

является для поля X инфинитезимальной симметрией, [X, P] = 0. Величина $\omega(P)$, где $\omega = -v'du + u'dv$, совпадает с вронскианом

$$W = \begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix} = -c_3 u^2 + (c_1 - c_4) uv + c_2 v^2.$$

B потоке поля P вронскиан W увлекается согласно формуле Эйлера:

$$PW = 2W \quad \rightsquigarrow \quad W_{\tau} = We^{2\tau}.$$

а в потоке поля X — согласно формуле Лиувилля-Остроградского:

$$W' = \operatorname{tr} C \cdot W \quad \leadsto \quad W_t = W e^{\operatorname{tr} C \cdot t}.$$

Для соленоидального поля X, когда trC=0, вронскиан W является инвариантом поля X. В общем случае инвариант поля X вычисляется по формуле

$$I = \int \frac{\omega}{W} \,.$$

B инвариантных координатах поля P,

$$(u,v) \longrightarrow (s,p),$$

где s — канонический параметр и p — инвариант поля P, нахождение инварианта I сводится κ вычислению неопределённого интеграла в соответствии c формулой (30),

$$I = u - \int \frac{u'}{v'} dv \quad \leadsto \quad I = s - \int \frac{s'}{p'} dp$$
.

Если положить

$$s = \ln \sqrt{|W|}, \quad p = \frac{v}{u}, \quad s' = \frac{1}{2} \operatorname{tr} C, \quad p' = \frac{W}{u^2} = c_2 p^2 + (c_1 - c_4) p - c_3,$$

будем иметь

$$I = \ln \sqrt{|W|} + \frac{1}{2} \operatorname{tr} C \int \frac{dp}{c_2 p^2 + (c_1 - c_4) p - c_3}.$$

В зависимости от знака дискриминанта $\Delta = \frac{1}{4}tr^2C - \det C$ различаются фазовые портреты поля X и классифицируются линейные потоки:

1)
$$\Delta < 0$$
 (foryc), 2) $\Delta > 0$ (cedno), 3) $\Delta = 0$ (ysen).

5.1 Симметрии ОДУ и интегрирующая матрица

Ограничимся примером. Уравнение колебаний

$$u'' + u = 0 \tag{31}$$

в пространстве переменных (t, u, u') сводится к системе Пфаффа

$$\omega^1 = \omega^2 = 0.$$

где формы $\omega = (\omega^1, \omega^2)$ и векторное поле X имеют вид¹³:

$$\begin{cases} \omega^1 = du - u'dt, \\ \omega^2 = du' + udt, \end{cases} X = \frac{\partial}{\partial t} + u'\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial u'}.$$

Распределение Δ , определяемое полем X и аннулирующее формы ω , одномерно, но для форм ω нужна интегрирующая матрица. Инфинитезимальная симметрия распределения Δ в данном случае, это — пара линейно независимых операторов $P=(P_1,P_2)$:

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial u} \cos t - \frac{\partial}{\partial u'} \sin t, \qquad P_2 = \frac{\partial}{\partial u} \sin t + \frac{\partial}{\partial u'} \cos t.$$

Действительно,

$$\mathcal{L}_{P_i}\omega^j = 0, \quad \mathcal{L}_{P_i}X = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Представим операторы P в матричной записи:

$$(P_1 \ P_2) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \ \frac{\partial}{\partial u'}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Тогда выражение $\omega(P)$ представится регулярной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \omega^1(P_1) \ \omega^1(P_2) \\ \omega^2(P_1) \ \omega^2(P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

и обратная матрица $(\omega(P))^{-1}$ будет для форм ω интегрирующей:

$$\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = d \left\{ \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \right\}.$$

Имеем формулу $(\omega(P))^{-1}\omega = dI$. Отсюда находим инварианты:

$$\begin{pmatrix} I^1 \\ I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} I^1 = u \cos t - u' \sin t \\ I^2 = u \sin t + u' \cos t \end{cases}.$$

Легко проверить: $XI^1=XI^2=0$. Решить ОДУ (31), значит найти функцию u(t), удовлетворяющую этому уравнению. Обращением последней системы находим функцию u и вместе с ней её производную u':

$$\begin{cases} u = I^1 \cos t + I^2 \sin t, \\ u' = -I^1 \sin t + I^2 \cos t. \end{cases}$$

 $^{^{13}\,}$ Впрочем, формы ω сами и их производные Ли относительно Xудолетворяют такому же ОДУ, как (31), $\omega''+\omega=0.$

Инварианты (I^1,I^2) играют роль постоянных интегрирования. Если говорить о координатах (u,u') как слоевых, находим ещё *слоевый инвариант* $u^2+(u')^2=(I^1)^2+(I^2)^2$, в котором параметр t отсутствует.

Теория дифференциальных уравнений в терминах производных Ли получает богатое содержание.

Список литературы

- Kushner, A., Lychagin, V., Rubtsov, V.: Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Ser: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, No. 101, Cambridge UP, 2007, xxii+496 pp.
- 2. Рахула, М., Речной, В.: Двойственые структуры: этажи и струи. Proceedings of the International Geometry Center, 1(1–2), 131-157 (2008)

М. Рахула

University of Tartu, Estonia

E-mail: rahula@ut.ee

M. Rahula

Symmetries and integrating matrix

A distribution on a manifold can be determined with the help of a vector basis or dual cobasis. Il exists a bond between symmetries of distribution and integrating matrix of its cobasis. Namely, the inverse of integrating matrix determines a system of infinitesimal symmetries for the distribution, and vice versa, the infinitesimal symmetries of distribution determine an integrating matrix for the cobasis. Integrating matrix generalizes the classic notion of integrating factor for one differential form.

Mathematics Subject Classification (2000) $34A26 \cdot 34C14 \cdot 58A30 \cdot 58A17 \cdot 58D19$

О симметриях граничной задачи для уравнения Бюргерса на интервале

А. В. Самохин Ю. И. Дементьев

Аннотация Для класса решений уравнения Бюргерса с постоянными граничными условиями предложена концепция асимптотических симметрий. Такие решения быстро сходятся к инвариантным решениям уравнения Бюргерса. Оценка скорости сходимости получена с использованием компьютерной модели.

Ключевые слова Уравнение Бюргерса · Симметрии · Устойчивость · Сходимость

УДК 514.7

1 Введение

Во многих разделах физики, астрономии и математики встречаются задачи, связанные с нелинейными процессами. Можно говорить об общепризнанных уравнениях, отражающих реальную картину происходящего, например, уравнение Навье-Стокса. Однако его общее решение неизвестно. Это привело к поиску других моделей нелинейных явлений, более простых уравнений.

Одним из наиболее известных является уравнение Бюргерса [1]. Область применения его оказалась довольно обширной. Классическое

уравнение Бюргерса описывает эволюцию поля скоростей для гидродинамических потоков частиц, учитывая как нелинейный характер распространения волн, так и диссипацию энергии. Оно используется в акустике, оптике и космологии, появляется при гидродинамических предельных переходах для систем взаимодействующих частиц и т.д. [6].

Сейчас уравнение Бюргерса служит, с одной стороны, модельным примером для изучения нелинейных эффектов в гидродинамическом контексте, а с другой — полигоном для применения и проверки на эффективность современных методов теории вероятностей, теории динамических систем и дифференциально-геометрических конструкций, в частности теории симметрий. Для уравнения, определенного на всей оси x локальные, классические и высшие симметрии хорошо изучены, [10]; там же описаны некоторые нелокальные симметрии. Про симметрии начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса на интервале известно крайне мало, [9].

В статье предложена концепция симметрий для начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса и разобран случай, когда граничные условия постоянны. В этом классе решение с произвольным начальным условием быстро сходится к стационарному решению, которое является инвариантным для целой башни высших симметрий. Описано действие симметрий с постоянными граничными условиями на решениях. Вследствие быстрой сходимости к стационарным решениям симметрии этого стационарного решения можно рассматривать как асимптотические симметрии для класса решений с постоянными граничными условиями, такими же, как у стационарного.

В работе также исследована сходимость решения уравнения Бюргерса к стационарному решению при неограниченном увеличении времени. Оценена скорость этой сходимости в зависимости от различных начальных и граничных условий. Указан характер этой сходимости при любых начальных функциях, в том числе и при больших по модулю функциях и при больших по модулю производных начальных функций. Особое внимание уделено трудностям, которые возникают при численном решении и анализе свойств решения уравнения на компьютере. Часть исследований проделана с помощью написанной одним из авторов специальной компьютерной программы для численного решения уравнения Бюргерса. Получены оценки на начальные

условия для применимости различных численных методов. Аналитическое доказательство сходимости, основанное на идеях [11], довольно объемно и будет опубликовано в другом месте.

2 Уравнение Бюргерса

Уравнение Бюргерса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Под функцией u=u(x,t) понимается скорость течения жидкости, а под числом μ понимается так называемая кинематическая вязкость. Переменная x играет роль координаты, а переменная t — роль времени. Первое и второе слагаемые в левой части этого уравнения являются соответственно нестационарным и конвективным членами, а в правой части стоит вязкий член. Если влиянием вязкости можно пренебречь, то есть $\mu=0$, то в уравнении остаются лишь нестационарный и нелинейный конвективный члены и уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В этом случае мы получаем нелинейное уравнение переноса — простейшее уравнение, описывающее разрывные течения или течения с ударными волнами [3].

Если же вязкий член не равен нулю, то уравнение классифицируется как параболическое. Причем уравнение можно свести к случаю $\mu=1$ (или к любому другому ненулевому значению; в дальнейшем, мы будем пользоваться этим обстоятельством, чтобы в полной мере применить методы численного решения данного уравнения). Делается это следующим образом: при $\mu<0$ нужно сначала сделать замену $u\to -u,\,x\to -x,$ и для любого знака числа μ :

$$u \to \sqrt{|\mu|} \cdot u, \quad x \to \sqrt{|\mu|} \cdot x.$$

Кроме универсальности, причиной популярности уравнения Бюргерса служит подстановка Хопфа (преобразование Хопфа-Коула) [5], позволяющая получить его точное решение. А именно, если при $\mu=1$ сделать замену функции

$$u = \frac{\partial \ln w}{\partial x} = w_x'/w,$$

то уравнение линеаризуется и будет являться уравнением теплопроводности. При этом решения уравнения Бюргерса сводятся к положительным решениям соответствующего уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{1}{2} \int_{0}^{\xi} u(\varsigma,0) d\varsigma \right] d\xi \right).$$

Однако, несмотря на формулу для функции u(x,t) в явном виде, ее применение остается ограниченным из-за сложности вычисления данных интегралов в случае произвольных начальных условий задачи Коши. Необходимо применение численных методов.

Один из вариантов уравнения Бюргерса, — это запись его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

(этого можно добиться с помощью замен переменных, подобных указанным выше). Уравнение, представленное в таком виде, удобно при описании плоских волн небольшой амплитуды.

Заметим, что коэффициент μ при нелинейном слагаемом связан с вязкостью среды, в которой распространяются колебания.

Из физических соображений ясно, что вязкость приводит к затуханию начальных колебаний, за исключением узкого класса стационарных решений, которые являются автомодельными для некоторой подалгебры алгебры высших симметрий уравнения Бюргерса.

3 Симметрии начально-краевых задач

Как представить себе устройство множества симметрий начальнокраевой задачи уравнения с частными производными? Начнем с того, что опишем в самых общих чертах симметрии обыкновенного дифференциального уравнения.

3.1 Мотивация: обыкновенные уравнения

Если

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

— обыкновенное уравнение имеет общее решение вида

$$y = f(x, c_1, \dots, c_n)$$

то симметрия, понимаемая как поток

$$y_{\tau} = \varphi(y)$$

на решениях, будет приводить к эволюции произвольных постоянных

$$(c_i)_{\tau} = X_i(c_1, \dots, c_n).$$

Наоборот, эволюция констант приводит к эволюции решений:

$$y_{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \tau} \tag{2}$$

Таким образом, все симметрии обыкновенного уравнения суть произвольные векторные поля на пространстве \mathbb{R}^n . Это соответствие нетрудно сделать явным.

Пусть

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i(c_1, \dots, c_n) \frac{\partial}{\partial c_i},$$

(т.е. $\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = X_i(c_1, \dots, c_n))$ — векторное поле.

В силу системы

$$\begin{cases} y = f(x, c_1, \dots, c_n) \\ y' = f'(x, c_1, \dots, c_n) \\ \dots & \dots \\ y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x, c_1, \dots, c_n) \end{cases}$$
(3)

можно найти

$$c_i = c_i(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

— дифференциальные константы на решениях уравнения. Их подстановка в (2) и дает общий вид симметрии ОДУ, [8].

Пример 1 Уравнение

$$y'' + \frac{9}{8}(y')^4 = 0.$$

Общее решение

$$y = (x + c_2)^{\frac{2}{3}} - c_1 = 0.$$

Константы

$$c_1 = \left(\frac{2}{3v'}\right)^2 - y, \quad c_2 = \left(\frac{2}{3v'}\right)^2 - x.$$

Базисные симметрии

$$f_{c_1} = -1, \quad f_{c_2} = y'.$$

Общий вид симметрии

$$\varphi = X_1(c_1, c_2) f_{c_1} + X_2(c_1, c_2) f_{c_2} =$$

$$-X_1((\frac{2}{3y'})^2 - y, (\frac{2}{3y'})^2 - x) + X_1((\frac{2}{3y'})^2 - y, (\frac{2}{3y'})^2 - x)y',$$

 $\operatorname{гde} X_i - \operatorname{произвольные} \operatorname{функции} \operatorname{двух} \operatorname{переменных}.$

Вернемся к уравнениям с частными производными Пусть $\Delta = \Delta(u)$ — система k дифференциальных операторов на m-вектор u, зависящий от n независимых переменных x_i , заданных на некоторой области D. Пусть $\Gamma(u)$ — другая система операторов, определенных в некоторой окрестности границы ∂D области D. Тогда граничная задача формулируется следующим образом

$$\Delta(u)|_{D} = 0 \tag{4}$$

$$\Gamma(u)|_{\partial D} = 0 \tag{5}$$

Симметрия $\varphi(u)$ уравнения $\Delta(u)=0$, где φ — еще одна система m дифференциальных операторов, задающих некоторый (инфинитезимальный) поток на решениях системы $\Delta(u)=0$ по формуле $u_{\tau}=\varphi(u)$. Таким образом

$$\left[\frac{d}{d\tau} \bigg|_{\tau=0} \Delta(u) \right] \bigg|_{\Delta(u)=0} = L_{\Delta}(\varphi)|_{\Delta(u)=0} = 0 \tag{6}$$

и уравнение $\Delta(u) = 0$ сохраняется этим потоком.

Однако этот поток как правило не сохраняет граничные условия $\Gamma(u)|_{\partial D}=0$. Для того, чтобы они сохранялись, поток должен удовлетворять условию

$$\left[L_{\Gamma}(\varphi)|_{\Gamma(u)=0}\right]|_{\partial D} = 0. \tag{7}$$

Для уравнения Бюргерса граничные условия, инвариантные относительно высших симметрий должны иметь вид

$$L^{n}(c_{1}(u_{x}+u^{2})+c_{2}u+c_{3})=0,$$

где c_i — константы, $L = \partial_x + u$ (Хабибулин et al, [9]).

3.2 Другие симметрии

В случае, когда имеет место теорема существования и единственности решений граничной задачи (4), каждый поток на граничных условиях естественным образом порождает поток на решениях уравнения. Таких потоков слишком много, и следует каким-то образом ограничивать класс решений, для того, чтобы эффективно описывать симметрии на этом классе.

Пример 2 Закрепленная струна

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

Общее решение (на \mathcal{L}_2)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

 $3 десь \ a_n, b_n$ — константы, но не дифференциальные и не локальные:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) \cos nx \, dx, \ b_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} u(x,0) \sin nx \, dx.$$

Общий вид симметрии

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \left[A_n(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots) \cos nt + B_n(a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots) \sin nt \right],$$

где A_i, B_i — произвольные функции, чья асимптотика при $i \to \infty$ обеспечивает сходимость ряда.

4 Решения и симметрии уравнения Бюргерса

Ниже мы принимаем, что уравнение имеет вид (1).

 $Pешениями \ muna \ "бегущая \ волна"$ называются решения вида u(x,t)=f(ax+bt+c), где $a,b,c\in\mathbb{R}$ — константы.

Их список:

$$u(x,t) = c, (8)$$

$$u(x,t) = \frac{b}{2a} + a \tanh(ax + bt + c), \tag{9}$$

$$u(x,t) = \frac{b}{2a} + a \coth(ax + bt + c), \tag{10}$$

$$u(x,t) = \frac{b}{2a} - a\tan(ax + bt + c), \tag{11}$$

$$u(x,t) = \frac{b}{2a} + \frac{a}{ax + bt + c}. (12)$$

Только два первых решения из списка (8)–(12) ограничены на всей действительной оси, и если начальная задача для уравнения (1) ставится на всей оси $x \in \mathbb{R}$, то только эти два решения являются физически осмысленными.

Если же рассматривается начально-краевая задача

$$u(x,0) = f(x), \quad u(\alpha,t) = l(t), \quad u(\beta,t) = r(t)$$
 (13)

для интервала $x \in [\alpha, \beta]$, то в качестве начального распределения f(x) может быть выбрана любая из функций списка (8)–(12), при условии что сингулярность не попадает на интервал.

Еще один вариант начально-краевой задачи

$$u(x,0) = f(x), \quad u(\alpha,t) = l(t), \quad u_x(\alpha,t) = r(t)$$
 (14)

ставится для полупрямой $x \in [\alpha, \infty)$.

При b = 0 решения становятся *стационарными*:

$$u(x,t) = c, (15)$$

$$u(x,t) = a \tanh(ax+c), \tag{16}$$

$$u(x,t) = a \coth(ax+c), \tag{17}$$

$$u(x,t) = -a\tan(ax+c),\tag{18}$$

$$u(x,t) = \frac{a}{ax+c}. (19)$$

Отметим также, что все неограниченные решения (17)–(19) убывают, а ограниченные (15), (16) являются неубывающими.

Симметрии уравнения Бюргерса.

Симметрии малого порядка (до третьего порядка по производным включительно):

$$X_1 = u_x, (20)$$

$$X_2 = (1 + 2u_x t), (21)$$

$$X_3 = 2uu_x + u_{xx}, (22)$$

$$X_4 = uu_{xx} + \frac{1}{3}u_{xxx} + u_x^2 + u^2u_x, \tag{23}$$

$$X_5 = \frac{1}{2}u + u_{xxt} + \frac{1}{2}xu_x + 2uu_{xt}, \tag{24}$$

Каждая симметрия X_i задает поток на пространстве решений уравнения (1) по правилу

$$u_{\tau} = X_i, \quad u|_{\tau=0} = u_0(x, t).$$
 (25)

Здесь $u_0(x,t)$ — произвольное решение (1). Решения потока (25), если они существуют, также являются решениями (1) при любом τ .

Если $X_i | u_0 = 0$, то поток тривиален, и u_0 называется *инвариантным* относительно X_i .

Бегущая волна инвариантно относительно линейной комбинации $aX_3 - bX_1$, а стационарные решения — относительно X_3 .

Потоки X_3 и X_1 — трансляции по t и x соответственно.

Оператор рекурсии

$$\mathcal{R} = D + u + u_x D^{-1}, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Если X — симметрия, то $\mathcal{R}(X)$ — тоже симметрия. В частности, $\mathcal{R}(X_1) = X_3$.

5 Устойчивость инвариантных решений уравнения Бюргерса

Рассмотрим простейшую начально-краевую задачу для уравнения (1) вида (13)

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = A, \quad u(1,t) = B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
 (26)

При $t \to \infty$ вследствие диссипации начальное условие u(x,0) = f(x) игнорировать, и краевым данным соответствует единственное стационарное решение $y_{AB}(x)$), которое можно получить из обыкновенного дифференциального уравнения на y(x)

$$y'' + 2yy' = 0$$
, $y(0) = A$, $y'(1) = B$. (27)

Именно к этому решению стремится при $t \to \infty$ решение задачи (26), каков бы ни был начальный профиль u(x,0). Фактически переход $u(x,0) \to y_{AB}(x)$) происходит очень быстро, как это показано ниже.

Интегрируя один раз уравнение (27), получим $y'+y^2=A^2+B$. Отсюда легко получить, что в зависимости от начальных данных уравнение (27) имеет следующие решения (никаких других стационарных решений уравнения Бюргерса нет!)

$$\begin{cases} y(x) = k \tan(-kx + m), & \text{при } A^2 + B < 0, \\ k = \sqrt{-A^2 - B}, & m = \arctan(A/k); \end{cases} \\ y(x) = \frac{A}{Ax+1}, & \text{при } A^2 + B = 0, B \neq 0; \\ y(x) = k \coth(kx + m), & \text{при } A^2 + B > 0, \\ k = \sqrt{A^2 + B} < |A|, m = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k + A}{-k + A}\right); \\ y(x) = k \tanh(kx + m), & \text{при } A^2 + B > 0, \\ k = \sqrt{A^2 + B} > |A|, m = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k + A}{k - A}\right); \\ y(x) = A, & \text{при } B = 0. \end{cases}$$

$$(28)$$

Эти решения инвариантны относительно симметрии X_3 , а также относительно башни симметрий вида $\mathcal{R}^n(X_3)$. Например, решение $k \tanh(kx+m)$ инвариантно относительно

$$\frac{1}{3}\mathcal{R}(X_3) = X_5 - \frac{k^2}{3}u_x = uu_{xx} + \frac{1}{3}u_{xxx} + u_x^2 + u^2u_x - \frac{k^2}{3}u_x.$$

Поясним: оператор \mathcal{R} содержит неопределенный интеграл D^{-1} , и $-\frac{k^2}{3}$ — подходящая для данного решения константа интегрирования. Далее,

$$\frac{1}{3}\mathcal{R}^2(X_3) = \frac{1}{3}\mathcal{R}(X_5 - \frac{k^2}{3}X_1) = X_7 - \frac{k^2}{3}X_3 + cu_x;$$

новая константа интегрирования выбирается так, чтобы решение $k \tanh(kx+m)$ оставалось инвариантным, etc.

Отметим, что симметрия $X_5 - \frac{k^2}{3}u_x$ имеет и другие инвариантные решения. Здесь мы не будем приводить их полного списка, укажем лишь один 3-параметрический класс, включающий гиперболические тангенсы и котангенсы из списка (28):

$$u = \frac{c(de^{cx} - e^{-cx})}{l + de^{cx} + e^{-cx}}, \quad c, d, l \in \mathbb{R}.$$
 (29)

Ниже представлены графики — результаты численных расчетов по эволюции начального профиля начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса на интервале [0,1] под действием локальных симметрий (полное решение по преобразованным данным однозначно восстанавливается).

Как, например, устроена эволюция стационарного решения уравнения Бюргерса под действием симметрии X_5 ? Эта симметрия автономна и имеет третий порядок по переменной x. Необходимо задать в краевых условиях не только значения профиля на концах интервала, но и первую производную по x на одном из концов (выбор ее произволен, и можно, например, взять такую же производную, как у стационарного решения — и тогда решение будет инвариантно). Если эти данные стационарны, то они однозначным образом определяют решение, к которому асимптотически стремится исходный профиль. Таким образом, локальные симметрии действуют на решениях задачи с фиксированными граничными условиями, если и для симметрий задавать согласованные граничные условия.

Таким образом мы приходим к концепция асимптотических симметрий уравнения Бюргерса на классе решений с постоянными граничными условиями.

Так как любое решение с постоянными начальными условиями быстро сходится к одному из стационарных решений. Если на него подействовать симметрией со стационарными граничными условиями, то преобразованное решение будет иметь, вообще говоря, другую асимптотику, которая определяется по граничным условиям симметрии. Существует много симметрий, которые дают одну и ту же асимптотику преобразованного решения (различаясь по результатам лишь при $t \gtrsim 0$).

Итак, действие симметрий в этом классе асимптотически сводится к действию на граничных условиях, то есть на парах действительных чисел. Это значит, что асимптотические симметрии являются векторными полями на \mathbb{R}^2 . Можно предъявить и явное соответствие асимптотических симметрий и векторных полей \mathbb{R}^2 , однако это будет сделано в другом месте из-за ограничений по объему статьи.

6 Задача исследования сходимости

Рассмотрим уравнение Бюргерса в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

и зададим начальное условие

$$u(x,0) = \phi(x)$$

и краевые условия

$$u(0,t) = a, \quad u(X,t) = b,$$

где $\phi(x)$ — произвольная, непрерывная на отрезке [0;X] функция (X-любое число, например, 1), a,b — произвольные числа. Заметим, что мы не требуем согласования начальных и граничных условий. Под решением будем понимать функцию u(x,t), удовлетворяющую исходному уравнению при $x \in (0;X),$ $t \in (0;+\infty)$ и удовлетворяющую условиям начально-краевой задачи.

При $t \to +\infty$ решение задачи сходится к стационарному решению, которое в зависимости от граничных чисел a,b определяется формулами [7]

$$y(x) = \begin{cases} k \cdot \tanh(m+kx) \text{ при } a^2 + b > 0, k = \sqrt{a^2 + b} > |a|, m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k+a}{k-a}\right), \\ a \text{ при } b = a, \\ \frac{a}{ax+1} \text{ при } a^2 + b = 0, b \neq 0, \\ k \cdot \tanh(m-kx) \text{ при } a^2 + b < 0, k = \sqrt{-a^2 - b}, m = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{k}\right), \\ k \cdot \coth(m+kx) \text{ при } a^2 + b > 0, k = \sqrt{a^2 + b} < |a|, m = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k+a}{-k+a}\right). \end{cases}$$

В некоторых работах рассматривалась похожая задача на бесконечном $(x \in (0; +\infty))$ промежутке [2]. Анализ свойств решений на интервале $(x \in (0; X))$ представляет собой значительные трудности (о чем пойдет речь в дальнейшем) и фактически не отражен в литературе.

Наша цель исследовать сходимость решения уравнения Бюргерса на отрезке при $t \to +\infty$ и оценить скорость этой сходимости в зависимости от различных начальных и граничных условий.

Поставленная задача исследовалась двумя методами. Первый метод заключался в применении пакета PDEtools математической программы Maple, 12-й версии. В силу ряда причин, которые указаны ниже, не представляется возможным полное и всестороннее исследование с помощью этой программы (и других подобных программ).

Второй метод заключался в применении написанной нами программы на языке Visual Basic для численного решения изучаемого уравнения. Выбор языка программирования не играет никакой роли, важен лишь алгоритм решения уравнения.

7 Применение пакета PDEtools программы Maple для уравнения Бюргерса

Сначала исследуем сходимость решения уравнения Бюргерса при нулевых граничных условиях и произвольной начальной функции. Таким образом, рассматриваем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

со следующими начально-граничными условиями

$$u(0,t) = 0$$
, $u(X,t) = 0$, $u(x,0) = \phi(x)$,

где X — некоторое число, большее нуля. Не ограничивая общности будем считать X=1.

Применение пакета PDE
tools программы Maple для этой задачи показало следующее. При небольшой по модулю начальной функции
 $\phi(x)$

$$|\phi(x)| \lesssim 50$$

происходит быстрое и равномерное стремление решения к нулевой функции (вопрос "быстроты стремления" будет рассмотрен ниже). Продемонстрируем описанное поведение на примере начальной функции $\phi(x)=50$.

На рис. 1 видим, что решение сразу (на графике t=0.01) начинает стремиться вниз к нулевой функции. Далее, при t=0.05 границы уже достигают нулевых значений.

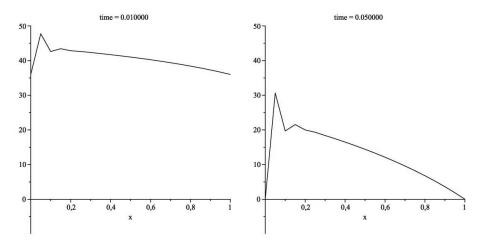


Рис. 1 Стремление решения к нулевой функции на примере начальной функции $\phi(x)=50.$

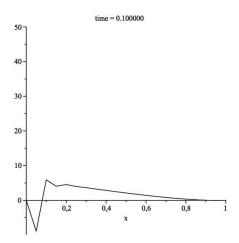


Рис. 2 График при $t=0.1,\,\phi(x)=50.$

При t=0.1 весь график находится в довольно узкой полосе около нулевой функции, а далее быстро становится неотличимым от оси Ox (Рис. 2).

Такое поведение решения не зависит от согласованности начальных и граничных условий. В случае, когда имеется согласование, решение ведёт себя таким же образом, причем ускорения сходимости не наблюдается. Покажем это на примере начальной функции $\phi(x)=50\sin(\pi x)$, Рис. 3.

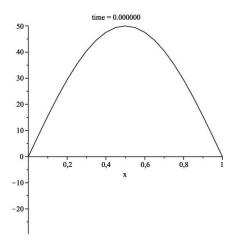


Рис. 3 Начальная функция $\phi(x) = 50\sin(\pi x)$.

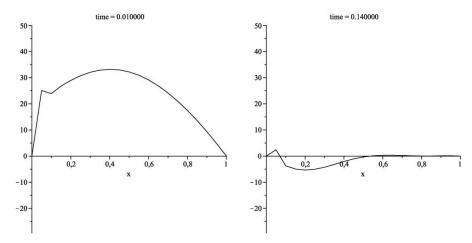


Рис. 4 Графики при t=0.01 и t=0.14 (начальная функция $\phi(x)=50\sin(\pi x)$).

При t=0.01 заметно быстрое стремление графика к нулевой функции. А при t=0.14 сходимость проявляется очень отчётливо, Рис. 5.

После того как установлена независимость сходимости решения от согласованности начальных и граничных условий, следовало бы проанализировать эту зависимость от производной исходной функции, так как в задачах часто возникают ситуации, когда решающий вклад в зависимость от начальных условий дает не модуль самой функции, а модуль ее производной (или старших производных).

Применить пакет PDEtools программы Марle в этом случае не представляется возможным, так как заложенные в нее общие методы решения уравнений в частных производных не учитывают особенностей рассматриваемого нами конкретного нелинейного уравнения. Поэтому на "плохих" примерах сразу проявляются недостатки общего универсального метода к исследованию конкретного уравнения.

Те же самые проблемы возникают в случае, если условие

$$|\phi(x)| \lesssim 50$$

не выполнено. Пакет PDEtools в этой ситуации оказывается бесполезным.

8 Вычислительные трудности при использовании пакета PDEtools

Отметим два существенных недостатка пакета PDEtools программы Maple, что существенно ограничивает ее применимость к исследованию нашего уравнения.

Первый недостаток заключается в том, что берется большой шаг по переменной x. Это не позволяет исследовать быстро осциллирующие функции или функции с большим модулем производной, так как из-за большого шага фактически теряется информация о характере такой функции. Взять же более мелкий шаг, чтобы отразить все нюансы исходной функции нельзя из-за колоссального возрастания времени вычислений. Это является "платой" за универсальность алгоритма, который отлично работает на всех уравнениях и на всех "хороших" функциях.

Вторым недостатком являются сами применяемые алгоритмы. Пакет PDEtools программы Maple рассчитан на решение любых уравнений в частных производных с помощью нескольких универсальных методов. В процессе применения этих методов в силу нелинейности уравнения получаются очень большие по модулю числа (если начальные условия были большими) и происходит останов в алгоритме из-за невозможности дальнейшего счета.

Продемонстрируем это на следующем характерном примере. Для рассматриваемого нами уравнения Бюргерса с нулевыми начальными условиями возьмём $\phi(x) = 50 - 50\cos(2\pi x)$.

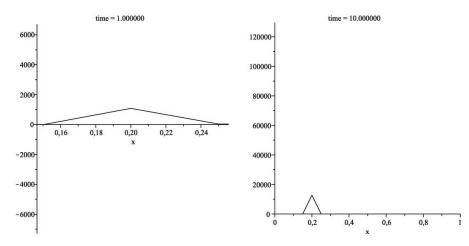


Рис. 5 Графики при t = 1 и t = 10.

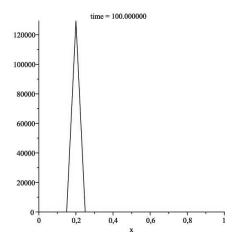


Рис. 6 График при t = 100.

Сразу при начале работы алгоритма начинается резкий рост в одной из точек. Уже при t=1 значение функции превышает 1000. На рисунке показана данная часть графика, в остальных точках функция получилась практически нулем и неотличима от оси Ox при данном масштабе.

При t=100 значение функции уже превышает 120000 и рост продолжается до тех пор, пока не происходит сбой программы.

Применение универсальных методов к подобным задачам надо проводить с чрезвычайной осторожностью во избежание получения неверных выводов!

9 Разностная схема для уравнения Бюргерса

Чтобы устранить указанные в предыдущем пункте ограничения и иметь возможность исследовать уравнение при любых начальных условиях составим и реализуем на языке программирования Visual Basic решение уравнения с помощью следующей разностной схемы (алгоритмы составления разностных схем описаны в [4]).

Требуется найти функцию u(x,t), являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

в области $Q_T = [0, X] \times [0, T]$ с начальными и краевыми условиями:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(X,t) = \mu_2(t).$$

Будем считать, что функции таковы, что существует достаточно гладкое решение поставленной задачи. Причем на данном (первом) этапе работы под функциями $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ будем понимать числа a и b соответственно.

Для построения разностной схемы разобьём исходную область Q_T прямоугольной сеткой с шагами $h=X/M,\, \tau=T/N$ соответственно по координатам x и t. Числа M и N подбираются в зависимости от требуемой точности вычислений и величин X и T.

Будем искать функцию u^h , определённую в узлах (m;n) сетки

$$Q_{h,\tau} = \{(mh; n\tau) : 0 \le m \le M, 0 \le n \le N\},\$$

которая является приближением функции u в $Q_{h,\tau}$. Обозначим $u^h(mh,n au)=u^n_m$.

Заменим функцию и производные в уравнении Бюргерса разностными отношениями

$$\begin{split} u|_{(mh,n\tau)} &= u(mh,n\tau),\\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{(mh,n\tau)} &= \frac{u(mh,(n+1)\tau) - u(mh,n\tau)}{\tau},\\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{(mh,n\tau)} &= \frac{u((m+1)h,n\tau) - u(mh,n\tau)}{h},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{(mh,n\tau)} &= \frac{u((m-1)h,n\tau) - 2u(mh,n\tau) + u((m+1)h,n\tau)}{h^2}. \end{split}$$

Подставляя эти соотношения вместо соответствующих функций и производных в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x},$$

получим

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + 2u_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h};$$

$$m = 1, \dots, M - 1, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Кроме уравнения необходимо аппроксимировать начальные и граничные условия. Положим

$$u_m^0 = u_0(mh), \quad u_0^n = \mu_1(n\tau), \quad u_M^n = \mu_2(n\tau).$$

Из приведённой разностной схемы выразим значения слоя u_m^{n+1} через предыдущие слои по формуле

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + 2\tau u_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}.$$

Теперь, применяя начальные (значения u_m^0 для всех m) и граничные условия последовательно находим для всех m значения u_m^1 , u_m^2 и т.д.

Преимуществом данной разностной схемы является возможность варьирования шагов по пространственной переменной и по оси времени. Благодаря этому с помощью подбора указанных шагов удалось устранить все трудности, которые возникали при применении пакета PDEtools программы Maple.

10 Исследование уравнения Бюргерса с помощью построенной разностной схемы

Ранее с помощью пакета PDEtools программы Maple мы получили выводы о поведении решений уравнения Бюргерса при небольших по модулю начальных условиях. Теперь покажем, что эти выводы верны при любых начальных условиях.

Для начала продемонстрируем как в действительности ведет себя решение при начальной функции $\phi(x) = 50 - 50\cos(2\pi x)$. Напомним, ранее нами было показано, что с помощью пакета PDEtools исследовать этот начальное условие не представляется возможным.

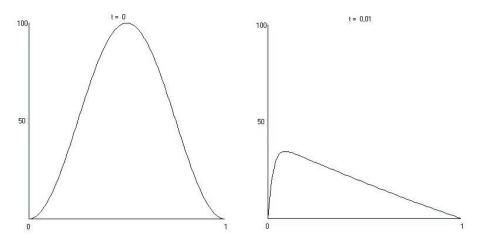


Рис. 7 Начальная функция $\phi(x) = 50 - 50\cos(2\pi x)$ и решение при t = 0.01.

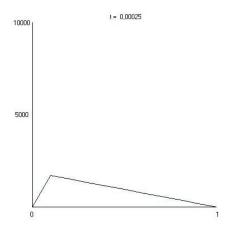


Рис. 8 Начальное условие $\phi(x) = 10000, t = 0.00025.$

Решение сразу начинает стремится к нулевой функции. Например, при t=0.01 решение уже довольно определённо стремится к нулевому, никакого "бесконечного" роста как в случае с Марlе не наблюдается. Далее решение равномерно приближается к нулевому.

Чтобы продемонстрировать действенность метода при любом, сколь угодно большом начальном условии, возьмем $\phi(x)=10000$. Уже при t=0.00025 отлично видна стабилизация и равномерное стремление к нулю решения уравнения. Дальнейшее построение решения это подтверждает.

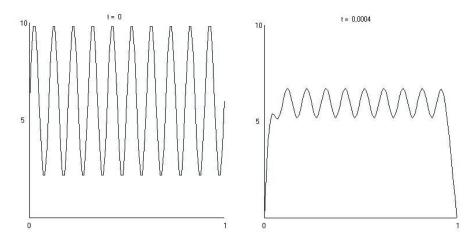


Рис. 9 Начальная функция $\phi(x) = 6 + 4\sin(20\pi x)$ и решение при t = 0.0004.

Аналогичное поведение решений демонстрируется и при любой другой начальной функции.

Теперь проанализируем зависимость решения от производной исходной функции. Исследование показало, что скорость сходимости в этом случае увеличивается, но все равно происходит быстрое стремление решения к нулю. Сначала осуществляется "выравнивание" функции посредством уменьшения модуля производной, а затем функция также, как описано выше, равномерно стремится к нулевой. Этот вывод хорошо демонстрируется следующим примером периодической функции с очень малым периодом и с большими значениями производной. Рассмотрим $\phi(x) = 6 + 4\sin(20\pi x)$.

Сразу начинается быстрое "выравнивание" функции, что хорошо иллюстрируется, например, при t=0.0004 (Рис. 9). При t=0.0009 функция уже практически выровнялась (Рис. 10).

Далее функция становится совсем гладкой и равномерно стремится к нулю.

Таким образом, показано, что при любых начальных условиях и при нулевых граничных условиях, решение равномерно стремится к нулю.

11 Оценивание скорости сходимости

Оценивание скорости сходимости решений связано с большими трудностями в силу невозможности аналитического решения данной зада-

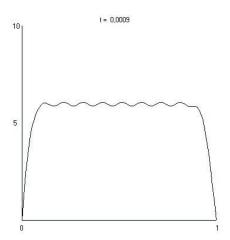


Рис. 10 Решение при t = 0.0009.

чи. Численное же решение сопряжено с вычислительными погрешностями из-за округлений. К тому же, сама схема нахождения решения имеет некую точность. Тем не менее удалось сделать следующие выводы о скорости сходимости решений.

Сходимость решения к стационарному является равномерной, экспоненциальной и имеет скорость сходимости порядка $\ln |M| \cdot K^t$, где M — максимум модуля исходной функции $\phi(x)$ на отрезке [0;1], K — малое число, оцениваемое нами как 0,0001.

Продемонстрируем это с помощью таблицы на примере начальной функции $\phi(x) = 10\sin(\pi x)$.

Момент времени t	Показатель степени 10			
	абсолютного отклонения решения			
	от стационарного решения			
1	-4			
2	-8			
3	-13			
4	-17			
5	-21			
6	-26			
7	-30			
8	-34			
9	-38			
10	-43			

К полученной оценке необходимо сделать следующие замечания.

- Данная оценка справедлива при задаче, рассматриваемой на отрезке [0;1]. На других промежутках она меняется, но ее можно получить сделав соответствующую замену переменной t в исходном уравнении.
- Полученная оценка справедлива при любых стационарных граничных условиях.
- Оценка является примерной из-за погрешности методов вычислений и округления чисел на компьютере.

12 Поведение решений уравнения Бюргерса при ненулевых граничных условиях

В случае ненулевых граничных условий и произвольной начальной функции решение равномерно сходится к соответствующему стационарному решению уравнения Бюргерса. Исследование показало, что все выводы, сделанные о сходимости к нулевому решению, остаются верными и в этом случае.

Поэтому продемонстрируем сказанное лишь одним примером. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

со следующими начально-граничными условиями

$$u(0,t) = 2$$
, $u(1,t) = 8$, $u(x,0) = 5 + 5\sin(2\pi x)$.

Соответствующее стационарное решение в этом случае задается функцией $a \cdot \tanh(ax + b)$, где a=8,00001080, b=0,2554127759 (коэффициенты вычислены при помощи программы Maple).

Графики начального условия и стационарного решения в этом случае выглядят так рис. 11.

При t=0.15 решение уже "похоже" на стационарное решение, а при t=0.5 практически сливается с ним (Рис. 12).

Как уже отмечено выше такая же сходимость к стационарному решению наблюдается и при всех других рассматриваемых нами начально-краевых условиях.

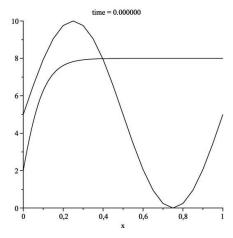


Рис. 11 Графики начального условия $u(x,0) = 5 + 5\sin(2\pi x)$ и стационарного решения.

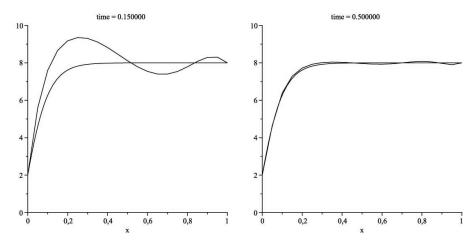


Рис. 12 Графики при t = 0.15 и t = 0.5.

Благодарности Работа выполнена при частичной поддержке гранта RBRF/CNRS, 08-07-92496-CNRS-а и грантов МГТУ ГА 2008 и 2009 годов.

Список литературы

- 1. Burgers J.M., A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv. Appl. Mech., vol. 1, \aleph 1, 1948.
- 2. Lighthill M.J., Viscosity in waves of final amplitude, in book "Surveys in mechanics Cambridge University Press, 1956, 432 p.
- 3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р., Вычислительная гидромеханика и теплообмен, том 1, перевод с английского, М., Мир, 1990, 208 стр.

- 4. Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г., Численные методы, М., С.-П., Лаборатория базовых знаний, 2002, 632 стр.
- Лейбович С., Сибасс А., Нелинейные волны, перевод с английского, М., Мир, 1977, 320 стр.
- 6. Лапинова Светлана Александровна. Вероятностные свойства примеси в нелинейных и турбулентных средах, Дис. канд. физ.-мат. Наук, 01.04.03, Н. Новгород, 2003 134 с. РГБ ОД, 61:04-1/795
- 7. Самохин А.В., Об устойчивости инвариантных решений уравнения Бюргерса на интервале, Научный вестник МГТУ ГА, N 140, 29–35 (2009).
- 8. Samokhin A. V, Full symmetry algebra for ODE's and control systems // Acta Applicandae Mathematicae, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 72 № 1&2, 87–99.
- 9. Habibullin I.T., Symmetry approach in boundary value problem // arXiv:solv-mt/9508005v2, 1–6, 1995.
- Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербоветский, А.М. Виноградов и др./ Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. М.: Факториал, 2005, 474 с.
- 11. Samokhin A. V, Decay velocity of conservation laws for nonevolution equations, Acta Applicanda Math., v. $\bf 41$, n. 1, 1–11

А. В. Самохин

Московский Государственный Технический Университет Гражданской Авиации, Москва, Россия.

E-mail: samohinalexey@gmail.com

Ю. И. Дементьев

Московский Государственный Технический Университет Гражданской Авиации, Москва, Россия.

E-mail: yidem@mail.ru

A. V. Samokhin, Y. I. Dement'yev

On symmetries of an initial value boundary problem for the Burgers equation

A concept of an asymptotic symmetry for the class of solutions of the Burgers equation with stationary boundary problem is introduced. Such solutions rapidly converge to invariant solutions. The evaluation of the rate of convergence is obtained via a computer simulation.

Mathematics Subject Classification (2000) 35A30 · 35A35 · 65M12

Аналоги теорем Брауэра и Шаудера о неподвижной точке в тропической математике

Г. Б. Шпиз Г. Л. Литвинов

Аннотация В рамках тропической математики доказаны аналоги известных теорем Брауэра и Шаудера о неподвижной точке непрерывного отображения компактного выпуклого множества в себя.

Ключевые слова Тропическая математика · Выпуклые множества Теорема Брауэра · Теорема Шаудера · Неподвижные точки непрерывных отображений · Компактные множества

УДК 517.98

1 Введение

Теорема Брауэра утверждает, что в конечномерном линейном пространстве любое непрерывное отображение выпуклого компактного множества в себя имеет неподвижную точку. Теорема Шаудера является бесконечномерным обобщением теоремы Брауэра, см. [1]. В статье в рамках тропической математики доказан аналог теоремы Брауэра, откуда выводится аналог теоремы Шаудера.

В основе тропической математики лежит замена обычных арифметических операций новым набором базовых операций: новое умно-

жение \odot совпадает с обычным сложением, т.е. $x\odot y=x+y$; новое сложение \oplus совпадает с максимумом двух чисел, т.е. $x\oplus y=\max\{x,y\}$. Множество всех действительных чисел, наделенное операциями \oplus и \odot , обозначим через \mathbf{R}_{\oplus} . От хорошо известной тропической алгебы макс-плюс \mathbf{R}_{\max} (которая является полуполем с идемпотентным сложением, т.е. $x\oplus x=x$ для всех x) алгебра \mathbf{R}_{\oplus} отличается отсутствием нулевого элемента, который в \mathbf{R}_{\max} совпадает с $-\infty$.

Тропическая математика может быть получена путем деквантования традиционной математики над числовыми полями, при этом постоянная Планка \hbar стремится к нулю, принимая мнимые значения. Такая точка зрения была представлена Г.Л. Литвиновым и В.П. Масловым в [2], [3], см. также подробности в [4]. Иначе говоря, тропическая математика является асимптотической версией традиционной математики над полями действительных и комплексных чисел. Оказывается, что существует эвристическое соответствие между рядом важных, интересных и полезных конструкций и результатов в традиционной теории и в тропической математике (в духе принципа соответствия Н. Бора в квантовой теории), см. [2], [4]. Доказанные ниже теоремы иллюстрируют указанное соответствие.

Приложения будут описаны в отдельной статье. В частности, мы докажем, что однородные (но, вообще говоря, нелинейные) операции в топологических тропических линейных пространствах имеют собственные векторы. Это тесно связано с асимптотическим поведением бесконечных экстремалей в задачах динамической оптимизации с бесконечным горизонтом, см. [5]–[7]. Например, можно обобщать результаты работ [5], [6] на случай разрывных ядер операторов Беллмана и функций полезности.

Отметим, что топологии в тропическом анализе не совпадают со стандартными топологиями традиционного функционального анализа; не совпадают и семейства компактных подмножеств в функциональных пространствах.

2 Основные определения и обозначения

В настоящей работе используются терминология и идеи из работ [8]—[10]. Напомним, что идемпотентной полугруппой (ИП) называется аддитивная полугруппа с коммутативным сложением \oplus , в которой для любого элемента x выполнено соотношение $x \oplus x = x$. Любая

ИП будет рассматриваться как упорядоченное множество относительно стандартного (частичного) порядка: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Легко видеть, что это определение корректно и $x \oplus y = \sup\{x,y\}$. Для произвольного подмножества X идемпотентной полугруппы положим $\oplus X = \sup(X)$ и $\wedge X = \inf(X)$, при условии что соответствующие правые части существуют. Идемпотентным полукольцом (ИПК) называется ИП, снабженная таким ассоциативным умножением \odot с единицей $\mathbf{1}$, что выполнены оба соотношения дистрибутивности. Полумодулем над идемпотентным полукольцом K называется идемпотентная полугруппа V в которой определено такое умножение \odot на элементы из K, что для любых $a,b \in K$, $x,y \in V$ выполнены обычные соотношения $a \odot (b \odot x) = (a \odot b) \odot x$, $(a \oplus b) \odot x = a \odot x \oplus b \odot x$, $a \odot (v \oplus w) = a \odot x \oplus a \odot y$, $\mathbf{0} \odot x = x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Пусть V — (частично) упорядоченное множество, $a,b \in V$. Будут использоваться следующие обозначения для интервалов и полуинтервалов.

$$(a,b) = \{x \in V | a \prec x \prec b\},\$$

$$[a,b] = \{x \in V | a \leq x \leq b\},\$$

$$(.,a] = \{x \in V | x \leq a\},\$$

$$[a,.) = \{x \in V | a \leq x\}.$$

Множество всех вещественных чисел является коммутативным ИПК относительно операций $\oplus = \max, \odot = +$. Это полукольцо будем обозначать через \mathbf{R}_{\oplus} и рассматривать как топологическое пространство относительно стандартной топологии. Заметим, что полукольцо \mathbf{R}_{\oplus} не имеет нуля. Полумодули над полукольцом \mathbf{R}_{\oplus} будем называть (иdемпотентными) \mathbf{R}_{\oplus} -пространствами. Гомоморфизмы \mathbf{R}_{\oplus} -пространств со значениями в \mathbf{R}_{\oplus} , рассматриваемом как полумодуль над самим собой, будем называть линейными функционалами. Для произвольного множества T через B(T) будем обозначать \mathbf{R}_{\oplus} -пространство всех ограниченных отображений из T в \mathbf{R}_{\oplus} , снабженное поточечными операциями. Подмножество X идемпотентного ${\bf R}_{\oplus}$ -пространства V, будем называть *о-выпуклым*, если оно выпукло как подмножество упорядоченного множества V, то есть вместе с любыми точками $a, b \in X$ содержит и весь интервал [a, b] (см. [11]). Топологию на \mathbf{R}_{\oplus} -пространстве V, будем называть локально о-выпуклой, если у каждой точки $x \in V$ существует базис из o-выпуклых окрестностей.

Топологическим \mathbf{R}_{\oplus} -пространством будем называть \mathbf{R}_{\oplus} -пространство V, снабженное такой локально o-выпуклой топологией, что для любого элемента $a \in V$ отображение \mathbf{R}_{\oplus} в V, переводящее число $r \in \mathbf{R}_{\oplus}$ в $r \odot a$, непрерывно, и полуинтервалы (.,a] и [a,.) являются замкнутыми. Топологическое \mathbf{R}_{\oplus} -пространство будем называть регулярным, если на нем существует достаточно непрерывных линейных функционалов чтобы разделить любые два элемента.

Множество всех непрерывных линейных функционалов на пространстве V является \mathbf{R}_{\oplus} -пространством относительно поточечных операций и будет обозначаться через V^* . Будем называть \oplus -слабой топологией на V топологию, базис которой образован множествами вида $\{x \in V | a < w(x) < b\}$, где $a, b \in \mathbf{R}_{\oplus}$, $w \in V^*$.

Отображение $f:V\to W$ топологических \mathbf{R}_\oplus -пространств называется \oplus -слабо непрерывным, если для любого непрерывного линейного функционала w на W непрерывна суперпозиция wf.

Для элементов x,y из \mathbf{R}_{\oplus} -пространства V будем писать, что $x\gg y,$ если существует r>1, такое что $x\succeq r\odot y,$ и определим для $r\in\mathbf{R}_{\oplus}$ подмножество $D_x(r)\subset V$ формулой

$$D_x(r) = \{ y \in V | r \odot x \gg y \gg r^{-1} \odot x \} = \{ y \in V | r \odot x \gg y \& r \odot y \gg x \}.$$

Топологию, базис которой образован множествами вида $D_x(r)$ при r>1, будем называть равномерной. Равномерная топология метризуема. Метрику можно задать, например, формулой

$$d(x,y) = \arctan(\inf\{r \in \mathbf{R}_{\oplus} | r \odot x \succeq y \succeq r^{-1} \odot x\}).$$

Равномерная топология в пространстве B(X) ограниченных вещественных функций на множестве X определяется метрикой

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

3 Топологические R_{\oplus} -пространства

Предложение 1 Пусть $f:V\to W$ — такое изотонное (то есть сохраняющее порядок) отображение \mathbf{R}_{\oplus} -пространств, что $f(r\odot x) \leq r\odot f(x)$ при любом $r\succeq \mathbf{1}$ и a — произвольная точка пространства V.

- 1) Множесства вида $D_a(l)$ при l > 1 образуют базис окрестностей точки а в равномерной топологии.
 - 2) Отображение f непрерывно в равномерной топологии.

Доказательство 1) Нужно проверить, что для любого $y\in D_x(l)$ существует такое r>1, что $D_y(r)\subset D_x(l)$. Так как $l\odot x\gg y$ и $l\odot y\gg x$, то существует p>1, такое что $l\odot x\succeq p\odot y$ и $l\odot y\succeq p\odot x$. Но тогда для любого 1< r< p при $z\in D_r(y)$ имеем $z\gg r^{-1}\odot y$, откуда $l\odot z\gg l\odot r^{-1}\odot y\succeq p^{-1}\odot l\odot y\succeq x$. С другой стороны, $l\odot x\succeq p\odot y\succeq r\odot y\gg z$. Таким образом $z\in D_x(l)$. Поскольку $z\in D_y(r)$ произвольно, то $D_y(r)\subset D_x(l)$.

2) В силу 1) достаточно проверить, что прообраз множества вида $D_{f(x)}(l)$ содержит некоторую окрестность точки x. Но в условиях предложения прообраз множества $D_{f(x)}(l)$ содержит $D_x(l)$. В самом деле, пусть $y \in D_x(l)$. Тогда $l \odot x \succeq r \odot y$ и $l \odot y \succeq r \odot x$, при некотором $r \in (1,l)$. Поэтому $l \odot r^{-1} \odot f(x) \succeq f(l \odot r^{-1} \odot x) \succeq f(y)$ и $l \odot r^{-1} \odot f(y) \succeq f(l \odot r^{-1} \odot y) \succeq f(x)$. Следовательно, $l \odot f(x) \gg f(y)$ и $l \odot f(y) \gg f(x)$, то есть $f(y) \in D_{f(x)}(l)$. \square

Следствие 1 Пусть V является \mathbf{R}_{\oplus} -пространством. Умножение на число и сложение непрерывны в равномерной топологии.

Предложение 2 Для любого топологического \mathbf{R}_{\oplus} -пространства V справедливы следующие утверждения:

- 1) Топология пространства V мажорируется его равномерной топологией (то есть всякое открытое подмножество в V открыто в равномерной топологии).
- 2) Пространство V является топологическим ${f R}_\oplus$ -пространством относительно равномерной топологии.

Доказательство 1) Пусть $x \in V$ и U — окрестность точки x. Нужно проверить, что U содержит некоторую окрестность точки x в равномерной топологии. В силу локальной о-выпуклости можно считать, что U является o-выпуклым множеством. Так как отображение \mathbf{R}_{\oplus} в V, переводящее число $r \in \mathbf{R}_{\oplus}$ в $r \odot x$, непрерывно, то при некотором $r > \mathbf{1}$ точки $r \odot x$ и $r^{-1} \odot x$ лежат в U. Но тогда $D_x(r) \subset U$, что и требовалось.

2) Локальная выпуклость равномерной топологии и непрерывность отображения, переводящего число $r \in \mathbf{R}_{\oplus}$ в $r \odot x$, очевидны. Замкнутость полуинтервалов вида (.,a] и [a,.) следует из 1).

Следующее предложение проверяется непосредственно.

Предложение 3 Eсли T конечное множество, то равномерная топология на B(T) совпадает c топологией поточечной сходимости,
то есть c обычной топологией евклидова пространства.

В дальнейшем всегда будем снабжать B(T) для конечного множества T равномерной топологией.

Предложение 4 Если топологическое ${\bf R}_{\oplus}$ -пространство V регулярно, то оно является топологическим ${\bf R}_{\oplus}$ -пространством относительно слабой топологии.

Доказательство Локальная о-выпуклость слабой топологии и непрерывность отображения, переводящего число $r \in \mathbf{R}_{\oplus}$ в $r \odot x$, очевидны. Проверим замкнутость множеств вида (.,a] и [a,.). Пусть точка x лежит в замыкании множества (.,a] относительно слабой топологии. Тогда для любого функционала $w \in V^*$ выполнено соотношение $w(x) \preceq w(a)$, откуда $w(a \oplus x) = w(a)$. Учитывая регулярность пространства V, получаем $a \oplus x = a$, то есть $x \preceq a$, то есть x лежит в множестве (.,a]. Таким образом это множество замкнуто в слабой топологии. Замкнутость множества [a,.) доказывается аналогично.

4 Выпуклые подмножества в топологических R_{\oplus} -пространствах

Выпуклые подмножества. Пусть V — полумодуль над полукольцом K и X — подмножество в V. Элемент вида $\bigoplus_{x \in X} (p(x) \odot x)$, где функция $p: X \to K$, такова что $\oplus p(X) = \mathbf{1}$, называется \oplus -выпуклой комбинацией элементов из X. Подмножество $X \subset V$ называется \oplus -выпуклым, если оно содержит любую \oplus -выпуклую комбинацию любого своего конечного подмножества (см. [12]–[15]). Подмножество $X \subset V$ назовем a-выпуклым, если для любой функции $p: X \to K$, такой что $\odot p(X) = \mathbf{1}$ выпуклая комбинация $\bigoplus_{x \in X} (p(x) \odot x)$ определена и принадлежит X. Из этих определений следует, что любое \oplus -выпуклое множество является подполугруппой относительно идемпотентного сложения \oplus , а любое a-выпуклое множество ограничено по

отношению к стандартному порядку (см. выше, раздел 2). Разумеется, любое a-выпуклое множество \oplus -выпукло.

Предложение 5 Пусть V — топологическое \mathbf{R}_{\oplus} -пространство и X — его компактная подполугруппа. Тогда $\oplus X$ существует и лежит в X.

Доказательство Для $a \in X$ положим $X(a) = \{x \in X | x \succeq a\} = \{x \in V | x \succeq a\} \cap X$. Семейство множеств X(a) является центрированной системой замкнутых подмножеств множества X, так как $\oplus A \in \bigcap_{a \in A} X(a)$ для любого конечного подмножества $A \subset X$. В силу компактности X существует точка m, лежащая в пересечении всех множеств вида X(a). По построению $m \in X$ и $m \succeq X$, то есть $m = \oplus X$. Таким образом $\oplus X$ существует и лежит в X, что и требовалось.

Следствие 2 В условиях предложения 5 для любого подмножества $Y \subset X$ сумма $\oplus Y$ существует и лежит в пересечении всех замкнутых подполугрупп, содержащих подмножество Y. Более того, $w(\oplus Y) = \oplus w(Y)$ для любого функционала $w \in V^*$.

Доказательство Пересечение \widehat{Y} всех замкнутых подполугрупп, содержащих подмножество Y является замкнутым подмножеством в X и, следовательно, компактной подполугруппой, то есть удовлетворяет условию предложения 5. Поэтому $\oplus(\widehat{Y})$ существует и лежит в \widehat{Y} . Остается проверить, что $\oplus Y = \oplus(\widehat{Y})$. Но это немедленно вытекает из того, что множество $\{x \in V | x \leq b\}$ является замкнутой подполугруппой для любого $b \in V$.

Как показывает следующее предложение, для компактных подмножеств в вещественных идемпотентных пространствах понятия выпуклости и a-выпуклости эквивалентны.

Предложение 6 Компактное выпуклое подмножество X топологического \mathbf{R}_{\oplus} -пространства V является а-выпуклым.

Доказательство В силу доказанного выше следствия из предложения 5 для любого подмножества $Y \subset X$ сумма $\oplus Y$ существует и лежит в X. Пусть функция $p: X \to K$, такова что $\oplus p(X) = \mathbf{1}$. Обозначим

 \hat{p} выпуклую комбинацию $\bigoplus_{x \in X} (p(x) \odot x)$. Если $p(a) = \mathbf{1}$ для некоторого $a \in X$, то $\hat{p} = \bigoplus_{x \in X} (p(x) \odot x \oplus a)$. Так как $p(x) \odot x \oplus a \in X$ при любых $x \in X$, то в силу доказанного $\hat{p} \in X$. Если функция p не достигает своего максимума, то для произвольного числа $r < \mathbf{1}$ положим $p_r(x) = r^{-1} \odot (p(x) \wedge r)$. По построению $\oplus p_r(X) = \mathbf{1}$ и $p_r(a) = \mathbf{1}$ для некоторого $a_r \in X$. Таким образом $\hat{p}_r \in X$, для $r < \mathbf{1}$. Так как по построению $\hat{p} \preceq \hat{p}_r \preceq r^{-1} \odot \hat{p}$, то функция \hat{p}_r при $r \to \mathbf{1}$ сходится к \hat{p} в равномерной топологии. Следовательно, в силу предложения 2, функция \hat{p}_r сходится к \hat{p} и в топологии пространства V. В силу компактности X получаем, что $\hat{p} \in X$.

Пусть V — топологическое \mathbf{R}_{\oplus} -пространство. Для подмножества $X \subset V$ положим $env(X) = \{y \in V | (\exists x \in X, r \in \mathbf{R}_{\oplus}) r \odot x \leq y\}$. Очевидно, $\mathbf{R}_{\oplus} \odot X \subset env(X)$.

Предложение 7 Пусть V — топологическое \mathbf{R}_{\oplus} -пространство. Для любого а-выпуклого подмножества $X \subset V$ существует непрерывное в равномерной топологии отображение $\pi : env(X) \to X$ такое, что $\pi(x) = x$ и $\pi(r \odot x) \in \mathbf{R}_{\oplus} \odot x$, при $x \in X, r \preceq \mathbf{1}$.

Доказательство Пусть

$$M = \{(x,y) \in X \times env(X) | ((\exists r \preceq \mathbf{1})r \odot x \preceq y\}.$$

Для $(x,y) \in M$ положим:

$$r_x(y) = \sup r \leq \mathbf{1} | r \odot x \leq y,$$

$$m(y) = \bigoplus r_z(y) | (z, y) \in M,$$

$$n_x(y) = m(y)^{-1} \odot r_x(y),$$

$$p(y) = \bigoplus_{(z,y) \in M} r_z(y) \odot z,$$

$$\pi(y) = \bigoplus_{(z,y) \in M} n_z(y) \odot z = m(y)^{-1} \odot p(y).$$

По построению $m(y) \leq \mathbf{1}$ и $\bigoplus_{x \in X} n_x(y) = \mathbf{1}$, при $y \in env(X)$. Поэтому $\pi(y) \in X$, как выпуклая комбинация элементов из X.

Из соотношения $m(y)\odot n_x(y)\odot x=r_x(y)\odot x\preceq y$ вытекает, что $m(y)\odot \pi(y)\preceq y$. Поскольку для $x\in X$, по построению, $m(x)=r_x(x)=n_x(x)=\mathbf{1},$ то $x=n_x(x)\odot x\preceq \pi(x)\preceq x$. Таким образом $\pi(x)=x$, при $x\in X$ и, следовательно, π является проектором env(X) на X. Если $y=r\odot z$ при $r\preceq \mathbf{1}$ и $z\in X$, то $r_z(y)\odot y=y$. Так как $r_z(y)\odot z\preceq y$ при $(z,y)\in M$, то

$$p(y) = \bigoplus_{(z,y) \in M} r_z(y) \odot x = y$$

И

$$\pi(y) = m(y)^{-1} \odot p(y) = m(y)^{-1} \odot y \in \mathbf{R}_{\oplus} \odot y.$$

Осталось доказать, что π непрерывно. Поскольку $\pi = m(y)^{-1} \odot p(y)$ и умножение на коэффициенты является непрерывным отображением $\mathbf{R}_{\oplus} \times V \to V$ в равномерной топологии, достаточно проверить, что непрерывны в равномерной топологии отображения m и p. Но это немедленно получается из предложения 1.

Отметим, что аналогичные конструкции использовались в работах [12], [14].

Предложение 8 Пусть T — конечное множество и $X \subset B(T)$ — компактное \oplus -выпуклое подмножество и Y — обычная выпуклая оболочка X в евклидовом пространстве B(T). Тогда существует такое непрерывное отображение $\pi: Y \to X$, что $\pi(x) = x$.

Доказательство В силу предложения 6 множество X является a-выпуклым. Поэтому достаточно заметить, что $Y \subset env(X)$ (так как env(X) = B(T) при непустом X) и применить предыдущее предложение.

Следующая теорема является тропическим вариантом теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 1 Пусть T — конечное множество, $X \subset B(T)$ — компактное выпуклое подмножество и $f: X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда f имеет неподвижную точку.

Доказательство Пусть Y — обычная выпуклая оболочка X в евклидовом пространстве B(T) и $\pi:Y\to X$ — непрерывное отображение (ретракция), существующее в силу предложения 7. Тогда Y компактное выпуклое в обычном смысле подмножество в евклидовом пространстве B(T). По теореме Брауэра отображение $f\pi$ имеет в Y неподвижную точку x. Так как $f\pi(Y)\subset X$, то $x\in X$. Следовательно $\pi(x)=x$, и x будет неподвижной точкой для f, что и требовалось.

5 Основной результат

Пусть V — топологическое ${\bf R}_\oplus$ -пространство, X — его компактное \oplus -выпуклое подмножество, а T — непустое конечное подмножество в V^* . Отображение

$$i: V \to B(T)$$

определим формулой $i(v): t \mapsto t(v)$, где $t \in T$.

Предложение 9 Пусть V — топологическое \mathbf{R}_{\oplus} -пространство, X — его компактное \oplus -выпуклое подмножество u $f: X \to X - \oplus$ -слабо непрерывное отображение, а $T \subset V^*$ — конечное непустое подмножество. Тогда существует такой элемент $x \in X$, что w(x) = w(f(x)) для всех $w \in T$.

Доказательство Пусть $i:V\to B(T)$ — отображение, определенное выше, и U=i(X). Поскольку ограничения всех функционалов из T непрерывны на X, то отображение i непрерывно на X. Поэтому U является компактным \oplus -выпуклым подмножеством в B(T). По предложению 7 существует такое непрерывное отображение $p:U\to X$, что i(p(w))=w для любого $w\in U$. Тогда отображение $g:U\to U$, заданное формулой g(w)=i(f(p(w))), при $w\in U$, является непрерывным отображением \oplus -выпуклого компактного подмножества $U\subset B(T)$ в себя и по теореме 1 имеет неподвижную точку $u\in U$. Положим x=p(u). Поскольку i(f(p(u)))=u, то i(x)=i(p(u))=u=i(f(p(u)))=i(f(x)), то есть w(x)=w(f(x)) для всех $w\in T$, что и требовалось.

Следующая теорема является идемпотентным аналогом теоремы Шаудера.

Теорема 2 Пусть V — регулярное топологическое \mathbf{R}_{\oplus} -пространство, X — его компактное выпуклое подмножество u $f: X \to X$ — слабо непрерывное отображение. Тогда f имеет в X неподвижную точку.

Доказательство Для любого конечного подмножества $T\subset V^*$ определим подмножество S(T) формулой

$$S(T) = \{x \in X | w(x) = w(f(x)), w \in T\}.$$

По построению S(T) замкнуто и в силу предложения 9 непусто. Поскольку

$$S(T_1) \cap S(T_2) = S(T_1 \cup T_2),$$

семейство всех множеств вида S(T) является центрированным семейством замкнутых подмножеств компактного множества X и потому имеет непустое пересечение. Пусть точка x лежит в этом пересечении. По построению w(x)=w(f(x)) при всех $w\in V^*$. Поскольку V регулярно, получаем f(x)=x, что и требовалось.

Благодарности Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-02807- НЦЛИ и 08-01-00601.

Список литературы

- 1. Schauder, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. 1930,no. 2, 171-180.
- Litvinov, G.L., Maslov, V.P.: Correspondence Principle for Idempotent Calculus and Some Computer Applications, (IHES/M/95/33). Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Buresur-Yvettes (1995). The same in: J. Gunawardena (Ed.), Idempotency. Publ. of the I. Newton Institute, 11, Cambridge University Press, Cambridge, 420-443 (1998). E-print arXiv:math.GMA/0101021.
- 3. Litvinov, G.L., Maslov, V.P.: Idempotent mathematics: the correspondence principle and its applications to computing. Russian Math. Surveys **51**, 1210-1211 (1996).
- Litvinov, G.L.: Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a brief introduction. Journal of Mathematical Sciences 140, no. 3, 426-444 (2007). E-print arXiv:math.GM/0507014 (2005).
- 5. Маслов, В.П., Колокольцов, В.Н.: Идемпотентный анализ и его применения в оптимальном управлении. М.: Наука (1994).
- 6. Yakovenko, S.Y., Kontorer, L.A.: Nonlinear semigroups and infinite horizon optimization. In [7], 167-210.
- 7. Maslov, V.P., Samborskiĭ, S.N., Eds.: Idempotent Analysis. Advances in Soviet Mathematics 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1992).
- 8. Литвинов, Г.Л., Маслов, В.П., Шпиз, Г.Б.: Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход. Доклады Академии Наук, **363**(3), 298-300 (1998).

- 9. Литвинов, Г.Л., Маслов, В.П., Шпиз, Г.Б.: Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход. Математические заметки, **65**(4), 572-585 (1999).
- 10. Литвинов, Г.Л., Маслов, В.П., Шпиз, Г.Б.: Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход. Математические заметки 69(5), 758-797 (2001).
- 11. Фукс Л.: Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир (1965).
- 12. Samborskii S.N., Shpiz G.B.: Convex sets in the semimodule of bounded functions. In: [7], 135-137.
- Litvinov, G.L., Maslov, V.P. (eds.): Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. Contemp. Math. 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005).
- 14. Cohen, G., Gaubert S., Quadrat, J.-P., Singer, I.: Max-plus convex sets and functions. In [13], 105-129.
- 15. Singer, I.: Abstract Convex Analysis. Wiley (1997).

Г.Б. Шпиз

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

E-mail: islc@dol.ru

Г. Л. Литвинов

Независимый Московский университет, Москва, Россия.

E-mail: glitvinov@gmail.com

G. B. Shpiz, G. L. Litvinov

Analogs of the Brouwer and Schauder theorems on fixed points in tropical mathematics

Tropical versions of the Brouwer and Schauder fixed point theorems for compact subsets of tropical linear spaces are proved.

Mathematics Subject Classification (2000) Primary: $46T99 \cdot 16Y60 \cdot 06A99 \cdot Secondary: 06A11 \cdot 06F07$