

ISSN 2072-9812

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 4, No. 1, 2011

ISSN 2072-9812

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

Праці міжнародного
геометричного центру

Том.4, №. 1, 2011

Труды международного
геометрического центра

Том.4, №. 1, 2011

Proceedings of the International
Geometry Center

Vol. 4, No. 1, 2011

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Odessa
"Екологія"
2012

Головний редактор: Володимир Шарко

Заступники головного редактора:

Й. Красильщик,
І. Микитюк,
А. Мілка.

Відповідальні редактори:

Н. Коновенко,
В. Кузаконь.

Відповідальні секретарі:

О. Мойсеєнок,
Ю. Федченко.

Редакційна колегія:

Алексєєвский Д.	Кац І.	Сергєєва О.
Андерсен Я.	Кіріченко В.	Страуме Е.
Балан В.	Кирилов В.	Толстіхіна А.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Машков О.	Фоменко А.
Діскант В.	Мікеш Й.	Фоменко В.
Євтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожний В.	Пришляк О.	Шуригін В.
Зарічний М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ібрагимов Н.	Рубцов В.	

Главный редактор: Владимир Шарко

Заместители главного редактора:

Иосиф Красильщик,

Игорь Микитюк,

Анатолий Милка.

Ответственные редакторы:

Надежда Коновенко,

Виктор Кузаконь.

Ответственные секретари:

Алексей Мойсеенок,

Юлия Федченко.

Редакционная коллегия:

Алексеевский Д.	Кац И.	Сергеева А.
Андерсен Я.	Кириченко В.	Страуме Э.
Балан В.	Кириллов В.	Толстихина Г.
Банах Т.	Литвинов Г.	Федосов С.
Гуревич Д.	Микеш Й.	Фоменко А.
Дискант В.	Машков О.	Фоменко В.
Евтушик Л.	Мормул П.	Шелехов А.
Задорожный В.	Пришляк А.	Шурыгин В.
Заричный М.	Рахула М.	Якубчик Б.
Ибрагимов Н.	Рубцов В.	

Editor-in-Chief: Vladimir Sharko

Deputies of Editor-in-Chief:

Joseph Krasilshchik,
Igor Mikityuk,
Anatoliy Milka.

Managing Editors:

Nadezhda Konovenko,
Viktor Kuzakon.

Executive Secretary:

Alexei Moysyeyenok,
Juliya Fedchenko.

Editorial Board:

Dmitry Alekseevsky	Nail Ibragimov	Vladimir Roubtsov
Ian Anderson	Izrail Kats	Alexandra Sergeeva
Vladimir Balan	Vadim Kirichenko	Alexander Shelekhov
Taras Banah	Vladimir Kirillov	Vadim Shurygin
Valentin Diskant	Grigory Litvinov	Eldar Straume
Leonid Evtushik	Oleg Mashkov	Galina Tolstikhina
Sergey Fedosov	Joseph Mikes	Bronislav Yakubchik
Anatolii Fomenko	Petr Mormul	Wassily Zadorozhnyi
Valentin Fomenko	Alexander Prishlyak	Mikhail Zarichnyi
Dmitrii Gurevich	Maido Rahula	

Зміст

В.А. Гор'кавый

О построении сильно-изотропных поверхностей в пространстве
Минковского

6

Ю.М. Малюта, Т.В. Обиход

Теория суперструн в контексте гомологической алгебры

19

О.Г. Савченко

Ідемпотентні міри і K -ультраметричні простори

42

Ю. С. Федченко

Нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь

50

О построении сильно-изотропных поверхностей в пространстве Минковского

В.А. Горьковый

Abstract The paper deals with the so called strongly isotropic surfaces in the Minkowski space. These surfaces were introduced by K. Ilienko and studied by V. Gorkavyy as an isotropic analogue of the space- and time-like surfaces with vanishing mean curvature. We present a method to prove the existence as well as to construct concrete examples of strongly isotropic surfaces in the Minkowski space.

Keywords Minkowski space, lightlike surface, mean curvature, conjugate net, Gauss map, conformal transformation, Laplace transformation

1 Введение

Минимальные поверхности в евклидовом пространстве E^{n+1} характеризуются наличием нетривиальных конформных деформаций с сохранением грассманова образа [1], [2]. Аналогичным свойством обладают пространственно- и времени-подобные поверхности с нулевой средней кривизной в пространстве Минковского M^{n+1} : только такие поверхности в M^{n+1} допускают конформные деформации с сохранением грассманова образа, отличные от гомотетии и параллельного переноса в M^{n+1} ; доказательство этого факта, а также и аналитическое описание соответствующих деформаций, приведено в работе [3]. Что касается изотропных (свето-подобных) поверхностей в M^{n+1} , то наличием нетривиальных конформных деформаций с сохранением грассманова образа характеризуются два класса поверхностей [3]:

1) нуль-линейчатые поверхности в M^{n+1} , каждая из которых образована изотропными прямыми пространства M^{n+1} и может быть задана радиус-вектором вида $\rho(u, v) = \xi(v) + u\eta(v)$, где $\langle \eta, \eta \rangle_M = 0$, $\langle \eta, \xi' \rangle_M = 0$;

2) сильно-изотропные поверхности в M^{n+1} , каждая из которых, по определению, может быть задана радиус-вектором вида $\rho(u, v)$, удовлетворяющим условиям

$$\partial_{uv}\rho = P\partial_u\rho + Q\partial_v\rho, \quad (1)$$

$$\langle \partial_u\rho, \partial_u\rho \rangle_M = 0, \quad \langle \partial_u\rho, \partial_v\rho \rangle_M = 0. \quad (2)$$

$$[\partial_u\rho, \partial_v\rho, \partial_{uu}\rho] \neq 0. \quad (3)$$

Указанная характеристика позволяет трактовать сильно-изотропные и нуль-линейчатые поверхности как изотропные аналоги поверхностей с нулевой средней кривизной в E^{n+1} и M^{n+1} .

Пространственно- и времени-подобные поверхности с нулевой средней кривизной в пространстве Минковского исследованы достаточно полно и подробно как с точки зрения классической дифференциальной геометрии, так и с применением современных методов, например – в рамках теории струн, теории интегрируемых систем и т.д., см. [4]-[8]. Класс нуль-линейчатых поверхностей в M^{n+1} также изучен достаточно хорошо в виду простоты геометрических свойств таких поверхностей [9]. В то же время, сильно-изотропные поверхности впервые были выделены сравнительно недавно в работах К.В.Ильенко по теории относительности с применением методов спинорно-твисторного анализа [10]-[12], а с геометрической точки зрения – в упомянутой работе автора [3], см. также [13].

В этой связи вызывают интерес вопросы существования, построения и представления сильно-изотропных поверхностей в пространстве Минковского. С аналитической точки зрения, речь идет о разрешимости системы дифференциальных уравнений (1)-(2), дополненной условием регулярности (3).

Основной результат работы состоит в том, что построение сильно-изотропной поверхности F^2 в M^{n+1} с радиус-вектором $\rho(u, v)$, удовлетворяющим уравнениям (1)-(3), сводится к построению нелинейчатой поверхности F^2 в E^n , несущей специальную систему координат $((u, v))$ со следующими свойствами:

- а) координатные линии на F^2 образуют сопряженную сеть;
- б) семейство координатных линий $v = const$ на F^2 образовано геодезическими линиями.

Таким образом, задача псевдо-евклидовой геометрии сводится к задаче евклидовой геометрии. Поверхность F^2 в E^n , $n \geq 4$, допускающую параметризацию со свойствами а) и б), мы называем обобщенной поверхностью Фосса. Легко видеть, что при $n = 3$, в общем случае для заданного на поверхности в E^3 семейства геодезических линий всегда можно подобрать семейство сопряженных линий. В то же время, при $n \geq 4$ наличие на поверхности сети сопряженных линий уже является существенным ограничением. Поэтому обобщенные поверхности Фосса образуют очень специальный класс поверхностей в E^n , $n \geq 4$. Этот класс не пуст – простейшим примером является обычный тор Клиффорда в E^4 .

Доказанное нами утверждение позволяет как по заданной обобщенной фоссовой поверхности в E^n построить сильно-изотропную поверхность в M^{n+1} , так и наоборот – по заданной сильно-изотропной поверхности в M^{n+1} построить обобщенную поверхность Фосса в E^n . Полезным применением такого соответствия является установление неожиданных деформационных свойств обобщенных поверхностей Фосса в евклидовом пространстве, порождаемых деформационными свойствами сильно-изотропных поверхностей в пространстве Минковского.

Опишем структуру работы. В части 2 представлены общие свойства сильно-изотропных поверхностей пространства Минковского. В части 3 доказываются утверждения, устанавливающие соответствие между сильно-изотропными поверхностями и обобщенными поверхностями Фосса. В части 4 описаны нетривиальные преобразования обобщенных поверхностей Фосса.

2 Сильно изотропные поверхности в M^n

Зафиксируем в n -мерном пространстве Минковского M^{n+1} стандартные координаты x^0, \dots, x^n , в которых метрика M^{n+1} запишется в виде $d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - \dots - (dx^n)^2$. Рассмотрим регулярную двумерную поверхность Φ^2 в M^{n+1} , заданную параметрически радиус-вектором

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^0(u, v) \\ \dots \\ \rho^n(u, v) \end{pmatrix} = \rho(u, v).$$

Касательная плоскость $T_P\Phi^2$ к Φ^2 в точке $P \in \Phi^2$ натянута на векторы $\partial_u\rho$ и $\partial_v\rho$. Индуцированная метрика на Φ^2 имеет вид $ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$, где $g_{11} = \langle \partial_u\rho, \partial_u\rho \rangle_M$, $g_{12} = \langle \partial_u\rho, \partial_v\rho \rangle_M$, $g_{22} = \langle \partial_v\rho, \partial_v\rho \rangle_M$ – скалярные произведения в M^{n+1} .

Регулярная поверхность Φ^2 в M^{n+1} называется изотропной, если ее метрика ds^2 вырождена, $\det g = 0$. В этом случае в каждой точке P на поверхности Φ^2 в касательной плоскости $T_P\Phi^2$ имеется однозначно определенное изотропное направление, а сама поверхность Φ^2 однозначным образом расслаивается в семейство изотропных кривых. Не уменьшая общности, можно выбрать координаты u и v на Φ^2 так, чтобы координатные линии $v = \text{const}$ представлялись указанными изотропными кривыми. При таком выборе координат метрика поверхности Φ^2 примет вид $ds^2 = g_{22}dv^2$, где $g_{22} < 0$.

Изотропная поверхность Φ^2 называется сильно-изотропной, если ее радиус-вектор $\rho(u, v)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\partial_{uv}\rho = P\partial_u\rho + Q\partial_v\rho + R\partial_{uu}\rho,$$

и при этом $\partial_u\rho$, $\partial_v\rho$ и $\partial_{uu}\rho$ линейно независимы [3]. Заметим, что если на сильно изотропной поверхности сделать замену координат $\hat{u} = \hat{u}(u, v)$, $\hat{v} = \hat{v}(v)$, то изотропные линии $v = \text{const}$ перейдут в изотропные линии $\hat{v} = \text{const}$, а радиус-вектор поверхности будет удовлетворять условию

$$\partial_{\hat{u}\hat{v}}\rho = \hat{P}\partial_{\hat{u}}\rho + \hat{Q}\partial_{\hat{v}}\rho + \hat{R}\partial_{\hat{u}\hat{u}}\rho,$$

с $\hat{R} = \left(-\frac{\partial \hat{u}}{\partial v} + R\frac{\partial \hat{u}}{\partial u}\right)\frac{dv}{d\hat{v}}$. Как следствие, указанную замену координат можно сделать так, чтобы коэффициент \hat{R} обратился в ноль – в этом случае координаты на сильно-изотропной поверхности называются лиувиллевыми. Не уменьшая общности будем предполагать, что координаты (u, v) на сильно-изотропной поверхности $\Phi^2 \subset M^{n+1}$ изначально выбраны лиувиллевыми, т.е. $R = 0$.

Таким образом, получаем следующий определяющий набор уравнений, которым удовлетворяет радиус-вектор $\rho(u, v)$ сильно-изотропной поверхности $\Phi^2 \subset M^{n+1}$ в лиувиллевых координатах:

$$\partial_{uv}\rho = P\partial_u\rho + Q\partial_v\rho, \quad (4)$$

$$\langle \partial_u\rho, \partial_u\rho \rangle_M = 0, \quad (5)$$

$$\langle \partial_u\rho, \partial_v\rho \rangle_M = 0. \quad (6)$$

Также следует учитывать и упомянутое выше условие

$$[\partial_u\rho, \partial_v\rho, \partial_{uu}\rho] \neq 0, \quad (7)$$

которое обобщает стандартное условие регулярности $[\partial_u\rho, \partial_v\rho] \neq 0$.

Существуют ли сильно-изотропные поверхности в M^{n+1} ? С аналитической точки зрения этот вопрос можно сформулировать следующим образом: существуют ли решения системы дифференциальных соотношений (4)-(7)? Возможны разные трактовки этой задачи, когда либо функции $P(u, v)$ и $Q(u, v)$ считаются наперед заданными, либо они неизвестны, а условие (4) трактуется как линейная зависимость между векторами $\partial_u \rho$, $\partial_v \rho$ и $\partial_{uv} \rho$.

Ниже мы дадим интерпретацию описанной задачи в рамках классической евклидовой теории поверхностей.

3 Построение сильно-изотропных поверхностей

Для радиус-вектора $\rho(u, v)$ сильно-изотропной поверхности F^2 в M^{n+1} рассмотрим отдельно временную компоненту $t(u, v) = \rho^0(u, v)$ и пространственную составляющую $r(u, v) = (\rho^1(u, v), \dots, \rho^n(u, v))$. Вектор-функцию $r(u, v)$ будем интерпретировать как радиус-вектор двумерной поверхности F^2 в n -мерном евклидовом пространстве E^n с метрикой $d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$. Учитывая связь скалярного произведения \langle , \rangle_M в пространстве Минковского M^{n+1} и скалярного произведения \langle , \rangle в евклидовом пространстве E^n , уравнения (4)-(6) для $\rho(u, v)$ можно переписать в терминах $t(u, v)$ и $r(u, v)$ следующим образом:

$$\partial_{uv} t = P \partial_u t + Q \partial_v t, \quad (8)$$

$$(\partial_u t)^2 = \langle \partial_u r, \partial_u r \rangle, \quad (9)$$

$$\partial_u t \partial_v t = \langle \partial_u r, \partial_v r \rangle, \quad (10)$$

$$\partial_{uv} r = P \partial_u r + Q \partial_v r. \quad (11)$$

Уравнение (11) для радиус-вектора $r(u, v)$ означает, что координатные линии на поверхности $F^2 \subset E^n$ являются сопряженными относительно второй фундаментальной формы. При этом коэффициенты P и Q играют роль символов Кристоффеля поверхности $F^2 \subset E^n$, т.е. $P = \Gamma_{12}^1$, $Q = \Gamma_{12}^2$.

Уравнения (8)-(10) можно рассматривать как дифференциальные соотношения, связывающие функцию $t(u, v)$ с внутренней геометрией поверхности F^2 . А именно, если обозначить метрику F^2 через $ds_F^2 = G_{11}(du)^2 + 2G_{12}dudv + G_{22}(dv)^2$, то уравнения (8)-(10) перепишутся следующим образом:

$$\partial_{uv} t = \Gamma_{12}^1 \partial_u t + \Gamma_{12}^2 \partial_v t, \quad (12)$$

$$(\partial_u t)^2 = G_{11}, \quad (13)$$

$$\partial_u t \partial_v t = G_{12}. \quad (14)$$

Заменяя при необходимости u на $-u$, соотношения (13)-(14) можно переписать следующим образом:

$$\partial_u t = \sqrt{G_{11}}, \quad (15)$$

$$\partial_v t = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}}}. \quad (16)$$

Проанализируем совместность соотношений (12), (15) и (16). Для этого воспользуемся формулами

$$\partial_v G_{11} = 2\Gamma_{12}^i G_{i1}, \quad \partial_u G_{11} = 2\Gamma_{11}^i G_{i1}, \quad \partial_u G_{12} = \Gamma_{11}^i G_{i2} + \Gamma_{12}^i G_{i1}. \quad (17)$$

Продифференцируем (15) по v :

$$\partial_{vu} t = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \Gamma_{12}^i G_{i1}. \quad (18)$$

Подставляя (15), (16) и (18) в (12), получаем тождество:

$$\frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \Gamma_{12}^i G_{i1} = \Gamma_{12}^1 \sqrt{G_{11}} + \Gamma_{12}^2 \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}}}. \quad (19)$$

Иначе говоря, уравнение (12) является следствием уравнений (15) и (16). Далее, продифференцируем (16) по u :

$$\partial_{uv} t = \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \Gamma_{11}^i G_{i2} + \frac{1}{\sqrt{G_{11}}} \Gamma_{12}^i G_{i1} - \frac{G_{12}}{(\sqrt{G_{11}})^3} \Gamma_{11}^i G_{i1}. \quad (20)$$

Приравнивая (18) и (20), получаем следующее условие:

$$\Gamma_{11}^2 = 0. \quad (21)$$

Таким образом, условием совместности соотношений (15) и (16) является условие (21), накладываемое на сопряженную координатную сеть (u, v) поверхности F^2 .

С геометрической точки зрения условие (21) означает геодезичность координатных линий $v = \text{const}$ на поверхности F^2 . При этом, в следствие (13)-(14), метрика F^2 записывается в виде

$$ds_F^2 = (\partial_u t)^2 (du)^2 + 2\partial_u t \partial_v t du dv + G_{22}(dv)^2 = (dt)^2 + \hat{G}_{22}(dv)^2,$$

а значит $t(u, v)$ представляет собой натуральный параметр вдоль геодезических линий $v = \text{const}$ на F^2 , отсчитываемый от какой-либо ортогональной траектории семейства линий $v = \text{const}$.

Завершая анализ, рассмотрим условие (7). Очевидно, что из линейной независимости векторов $\partial_u r, \partial_v r, \partial_{uu} r$ вытекает линейная независимость векторов $\partial_u \rho, \partial_v \rho, \partial_{uu} \rho$. Если же векторы $\partial_u r, \partial_v r, \partial_{uu} r$ линейно зависимы, т.е. $\partial_{uu} r = \Gamma_{11}^1 \partial_u r + \Gamma_{11}^2 \partial_v r$, то тогда, с учетом (15)- (16) и (17), можно показать, что $\partial_{uu} t = \Gamma_{11}^1 \partial_u t + \Gamma_{11}^2 \partial_v t$, а значит $\partial_u \rho, \partial_v \rho, \partial_{uu} \rho$ тоже линейно зависимы. Таким образом, условие (7) эквивалентно условию

$$[\partial_u \rho, \partial_v \rho, \partial_{uu} \rho] \neq 0, \quad (22)$$

С геометрической точки зрения, условие (22) означает, что на регулярной поверхности F^2 нормальная кривизна в направлении координатных линий $v = const$ не обращается в ноль. Учитывая геодезичность линий $v = const$ на F^2 , условие (7) означает, что кривизна линий $v = const$ как кривых E^n не обращается в ноль; в частности, кривые $v = const$ не могут быть представлены прямыми в E^n .

Проведенный анализ позволяет сформулировать следующие два утверждения.

Утверждение 1. Пусть Φ^2 – сильно-изотропная поверхность в M^{n+1} , параметризованная лиувиллевыми координатами (u, v) . Пусть $\rho(u, v) = (t(u, v), r(u, v))$ – радиус-вектор Φ^2 , удовлетворяющий условиям (4)-(7). Тогда поверхность $F^2 \subset E^n$, заданная радиус-вектором $r(u, v)$, несет сопряженную координатную сеть (u, v) , у которой координатные линии $v = const$ являются геодезическими кривыми на F^2 , при этом нормальная кривизна F^2 в направлении линий $v = const$ не обращается в ноль. Функция $t(u, v)$ является натуральным параметром вдоль геодезических линий $v = const$, отсчитываемым от какой-либо ортогональной траектории семейства линий $v = const$.

Утверждение 2. Пусть F^2 – поверхность в E^n , заданная радиус-вектором $r(u, v)$. Предположим, что координатные линии на F^2 образуют сопряженную сеть, при этом координатные линии $v = const$ являются геодезическими и нормальная кривизна F^2 в направлении линий $v = const$ не обращается в ноль. Пусть $t(u, v)$ – натуральный параметр вдоль геодезических $v = const$, отсчитываемый от какой-либо ортогональной траектории семейства линий $v = const$. Тогда радиус-вектор $\rho(u, v) = (t(u, v), r(u, v))$ удовлетворяет условиям (4)-(7) и задает сильно-изотропную поверхность Φ^2 в M^{n+1} , параметризованную лиувиллевыми координатами (u, v) .

В виду доказанных утверждений естественно ввести следующие определения.

Определение 1. Координаты (u, v) на поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^n назовем *лиувиллевыми*, если выполнены следующие требования:

- 1) координатные линии образуют сопряженную сеть на F^2 ;
- 2) семейство координатных линий $v = \text{const}$ представлено геодезическими кривыми F^2 ;
- 3) нормальная кривизна F^2 в направлении координатных линий $v = \text{const}$ не обращается в ноль.

Определение 2. Регулярную поверхность F^2 в евклидовом пространстве E^n назовем *обобщенной поверхностью Фосса*, если на ней можно ввести лиувиллевы координаты.

Тогда Утверждение 1 означает, что сильно-изотропная поверхность в пространстве Минковского порождает обобщенную поверхность Фосса в евклидовом пространстве. В свою очередь, Утверждение 2 позволяет по заданной обобщенной поверхности Фосса в E^n построить сильно-изотропную поверхность в M^{n+1} .

Пример 1. Пусть $F^2 \subset E^4$ – тор Клиффорда, задаваемый радиус-вектором $r(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$, где a, b – постоянные. Координатные линии на торе Клиффорда образуют сеть линий кривизны, т.е. условие сопряженности координатных линий выполнено. Кроме того, метрика поверхности имеет вид $ds^2 = a^2 du^2 + b^2 dv^2$ и, в частности, координатные линии $v = \text{const}$ являются геодезическими. Поэтому тор Клиффорда является обобщенной фоссовой поверхностью. Легко видеть, что в этом случае $t(u, v) = au$ с точностью до постоянного слагаемого. Соответственно, радиус-вектор $\rho(u, v) = (au, a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$ задает сильно-изотропную поверхность в пространстве Минковского M^5 .

Пример 2. Пусть $F^2 \subset E^3$ – произвольная поверхность, на которой задана полугеодезическая система координат (t, v) . Предположим, что геодезические линии $v = \text{const}$ имеют ненулевую кривизну как кривые в E^3 . Тогда на F^2 можно сделать замену локальных координат $t = t(u, v)$, $v = v$ так, что координатные линии будут образовывать сопряженную сеть. Радиус-вектор $r(u, v)$ поверхности F^2 вместе с функцией $t(u, v)$ порождают вектор-функцию $\rho(u, v) = (t(u, v), r(u, v))$, задающую сильно-изотропную поверхность Φ^2 в M^4 .

Пример 3. Пусть $F^2 \subset E^n$, $n \geq 4$ – произвольная поверхность, на которой задана полугеодезическая система координат (t, v) . Радиус-вектор $r(t, v)$ поверхности F^2 порождает вектор-функцию $\rho(t, v) = (t, r(t, v))$, задающую изотропную поверхность Φ^2 в M^{n+1} . Поскольку на F^2 , вообще говоря, нет сопряженных направлений, а значит невозможно сделать замену локальных координат $t = t(u, v)$, $v = v$ так, чтобы координатные линии образовывали сопряженную сеть, поверхность F^2 в общем случае не является обобщенной фоссовой. Как следствие, соответствующая ей изотропная поверхность Φ^2 в M^{n+1} не является сильно-изотропной.

Пример 4. Изотропная поверхность в трехмерном пространстве Минковского M^3 обязательно является нуль-линейчатой, а значит не может быть сильно-изотропной.

Таким образом, теория сильно-изотропных поверхностей в пространстве Минковского M^{n+1} может быть интерпретирована как теория обобщенных поверхностей Фосса в евклидовом пространстве E^n .

4 Обобщенные фоссовые поверхности и их преобразования

Теория обобщенных поверхностей Фосса в E^n представляет и самостоятельный интерес, а связь с сильно-изотропными поверхностями в M^{n+1} дает дополнительный инструмент исследования. Мы проиллюстрируем этот подход, описав нетривиальные преобразования обобщенных фоссовых поверхностей.

Псевдоевклидовы движения. Пусть $F^2 \subset E^n$ – обобщенная поверхность Фосса, заданная радиус-вектором $r(u, v)$ в лиувиллевых координатах, а $(t(u, v), v)$ – соответствующая полугеодезическая система координат на F^2 . Построим сильно-изотропную поверхность Φ^2 в M^{n+1} с радиус-вектором $\rho(u, v) = (t(u, v), r(u, v))$ и применим к поверхности Φ^2 псевдоортогональное преобразование $A \in O(n, 1)$ и параллельный перенос на вектор $b \in M^{n+1}$. Преобразованная поверхность $\bar{\Phi}^2 \subset M^{n+1}$ с радиус-вектором $\bar{\rho} = A\rho + b$ будет, очевидно, сильно-изотропной, а координаты (u, v) на ней будут лиувиллевыми, как и на Φ^2 – в этом легко убедиться, приняв во внимание инвариантность условий (4)-(7) относительно псевдоортогональных преобразований. Выделим временную $\bar{t}(u, v)$ и пространственную $\bar{r}(u, v)$ компоненты вектор-функции $\bar{\rho}(u, v)$. Тогда, по Утверждению 1, вектор-функция $\bar{r}(u, v)$ задает обобщенную

поверхность Фосса $\bar{F}^2 \subset E^n$, координаты (u, v) будут на ней лиувиллевыми, а $(\bar{t}(u, v), v)$ – полугеодезическими.

Как результат, получаем нетривиальное преобразование обобщенных фоссовых поверхностей $F^2 \rightarrow \bar{F}^2$, при котором $\bar{r}(u, v)$ и $\bar{t}(u, v)$ выражаются через $r(u, v)$ и $t(u, v)$ линейно с постоянными коэффициентами.

Преобразования Лапласа. Пусть $F^2 \subset E^n$ – обобщенная поверхность Фосса, заданная радиус-вектором $r(u, v)$ в лиувиллевых координатах, и пусть $(t(u, v), v)$ – соответствующая полугеодезическая система координат на F^2 . Дополнительно предположим, что $\Gamma_{12}^2 \neq 0$. Построим сильно-изотропную поверхность $\tilde{\Phi}^2$ в M^{n+1} с радиус-вектором $\rho(u, v) = (t(u, v), r(u, v))$ и применим к ней аналог преобразования Лапласа:

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u \rho.$$

Как отмечено в [3], преобразованная поверхность $\tilde{\Phi}^2$ в M^{n+1} является сильно-изотропной, а координаты (v, u) будут на ней лиувиллевыми. Выделим временную $\tilde{t}(u, v)$ и пространственную $\tilde{r}(u, v)$ компоненты вектор-функции $\tilde{\rho}(u, v)$. Тогда, по Утверждению 1, вектор-функция $\tilde{r}(u, v)$ задает обобщенную поверхность Фосса $\tilde{F}^2 \subset E^n$, координаты (v, u) будут на ней лиувиллевыми, а $(\tilde{t}(u, v), u)$ – полугеодезическими. Как результат, получаем нетривиальное преобразование обобщенных фоссовых поверхностей $F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$.

В терминах самих поверхностей F^2 и \tilde{F}^2 речь идет о преобразовании Лапласа [14], которое задается формулой

$$\tilde{r} = r - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u r.$$

При этом преобразовании сопряженная система координат (u, v) на F^2 переходит в сопряженную систему координат (v, u) на \tilde{F}^2 , а из геодезичности линий $v = const$ на F^2 следует геодезичность линий $u = const$ на \tilde{F}^2 . Т.е. преобразование Лапласа переводит обобщенную поверхность Фосса в обобщенную поверхность Фосса. Отметим, что полугеодезическая система координат $(t(u, v), v)$ на F^2 переходит в полугеодезическую систему координат $(\tilde{t}(u, v), u)$ на \tilde{F}^2 , где $t(u, v)$ и $\tilde{t}(u, v)$ связаны соотношением $\tilde{t} = t - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u t$.

Следует заметить, что преобразование Лапласа, вообще говоря, не обеспечивает регулярность преобразованной поверхности.

Преобразования с сохранением грассманова образа. Пусть $F^2 \subset E^n$ – обобщенная поверхность Фосса, заданная радиус-вектором

$r(u, v)$ в лиувиллевых координатах, а $(t(u, v), v)$ – соответствующая полугеодезическая система координат на F^2 . Построим сильно-изотропную поверхность \hat{F}^2 с радиус-вектором $\hat{\rho}(u, v) = (t(u, v), r(u, v))$ в M^{n+1} и применим к ней преобразование по формуле

$$\partial_u \hat{\rho} = U \partial_u \rho,$$

$$\partial_v \hat{\rho} = V \partial_v \rho,$$

где $U(u, v), V(u, v)$ суть решение следующей системы уравнений:

$$\partial_v U = \Gamma_{12}^1 (V - U), \quad (23)$$

$$\partial_u V = \Gamma_{12}^2 (U - V), \quad (24)$$

Как отмечено в [3], преобразованная поверхность \hat{F}^2 с радиус-вектором $\hat{\rho}(u, v)$ в M^{n+1} будет сильно-изотропной, а координаты (u, v) будут на ней лиувиллевыми. Описанное преобразование характеризуется тем свойством, что оно сохраняет грассманов (обобщенный сферический) образ поверхностей и изотропность линий $v = const$.

Выделим временную $\hat{(u, v)}$ и пространственную $\hat{r}(u, v)$ компоненты вектор-функции $\hat{\rho}(u, v)$. Тогда, по Утверждению 1, вектор-функция $\hat{(u, v)}$ задает обобщенную поверхность Фосса $\hat{F}^2 \subset E^n$, координаты (u, v) будут на ней лиувиллевыми, а $(\hat{t}(u, v), v)$ – полугеодезическими. Как результат, получаем нетривиальное преобразование обобщенных фоссовых поверхностей $F^2 \rightarrow \hat{F}^2$.

В терминах F^2 и \tilde{F}^2 речь идет о преобразовании, которое задается формулами

$$\partial_u \hat{r} = U \partial_u r, \quad (25)$$

$$\partial_v \hat{r} = V \partial_v r, \quad (26)$$

где $U(u, v), V(u, v)$ суть решение системы (23)-(24). При этом преобразовании сопряженная система координат (u, v) на F^2 переходит в сопряженную систему координат (u, v) на \tilde{F}^2 , а из геодезичности линий $v = const$ на F^2 следует геодезичность линий $v = const$ на \tilde{F}^2 . Т.е. преобразование (25)-(26) переводит обобщенную поверхность Фосса в обобщенную поверхность Фосса. Отметим, что полугеодезическая система координат $(t(u, v), v)$ на F^2 переходит в полугеодезическую систему координат $(\hat{t}(u, v), v)$ на \hat{F}^2 , где $t(u, v)$ и $\hat{t}(u, v)$ связаны соотношением

$$\partial_u \hat{t} = U \partial_u t,$$

$$\partial_v \hat{t} = V \partial_v t,$$

Заметим, что у системы дифференциальных уравнений (23)-(24) имеется тривиальное решение $U = V = const$, и в этом случае описанное преобразование сводится просто к гомотетии. Но у системы (23)-(24) имеется много решений, отличных от $U = V = const$, приводящих к разнообразным нетривиальным преобразованиям исходной обобщенной поверхности Фосса в новые обобщенные поверхности Фосса.

Таким образом, знание уже известных преобразований сильно-изотропных поверхностей в пространстве Минковского [3] позволяет строить нетривиальные преобразования обобщенных поверхностей Фосса в евклидовом пространстве, избегая громоздких и технически сложных вычислений. Было бы весьма интересным проанализировать иные свойства сильно-изотропных поверхностей (обобщенных поверхностей Фосса) и интерпретировать их в терминах обобщенных поверхностей Фосса (сильно-изотропных поверхностей).

Литература

- [1] Hoffman D., Osserman R., *The Gauss map of surfaces in R^n* // J. Diff. Geom., V.18, N.1 (1983), P.733-754.
- [2] Gorkavyy V., *Deformations of two-dimensional surfaces that preserve the Gauss image* // Syberian adv. in math., V.13, N.4 (2000), P.20-45.
- [3] Горьковый В.А., *О конформном преобразовании поверхностей в пространстве Минковского с сохранением грассманова образа* // Известия ВУЗов, Т.7 (2006), С.13-24.
- [4] Бобенко А.И., *Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения* // УМН, Т.46, В.4 (1991), Р.3-42.
- [5] Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., *Модель релятивистской струны в физике адронов* // Энергоатомиздат: Москва (1987).
- [6] Hughston L.P., Shaw W.T., *Twistor and strings* // in London Math. Soc. Lecture Notes Series (CUP, Cambridge), V.156 (1990), P.218-245.
- [7] Schild A., *Classical null strings* // Phys.Rev.D., V.16 (1977), P.1722 - 1726.

- [8] Stachel J., *Thickening the strings* // Phys.Rev.D., V.21 (1980), P.2171 - 2184.
- [9] Duggal K., Bejancu A., *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, (1996)
- [10] Ilyenko K., Zheltukhin A.A., *Tensionless string in the notoph background* // Class. Quantum Grav., V.16 (1999), P.383-393.
- [11] Ilyenko K., *Twistor description of null strings*, PhD Thesis, University of Oxford (1999).
- [12] Ilyenko K., *Twistor representation of null two-surfaces* // Journal of Mathematical Physics, V.43, N.10 (2002), P.4770-4789.
- [13] Gorkavyy V., *On minimal lightlike surfaces in Minkowski space-time* // Diff. Geom. and App., V.26, N.2 (2008), P.133-139.
- [14] Tenenblat K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Pitman Monographs and Surv. in Pure and Appl. Math., V.93, Wiley: New York (1998).

В.А. Горьковый

ФТИНТ им. Б.И.Веркина НАН Украины (Харьков), Украина

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Теория суперструн в контексте гомологической алгебры

Ю.М. Малюта, Т.В. Обиход

Abstract Теория производных категорий применяется для построения Минимальной суперсимметричной стандартной модели из теории суперструн. Приведены результаты вычислений спектров, парциальных ширин, сечений рождения и гистограмм распределения масс суперпартнеров. Этот подход дает конкретные предсказания для целенаправленного поиска суперпартнеров на LHC.

Keywords Производные категории · Теория суперструн · Минимальная суперсимметричная стандартная модель

УДК 539.12

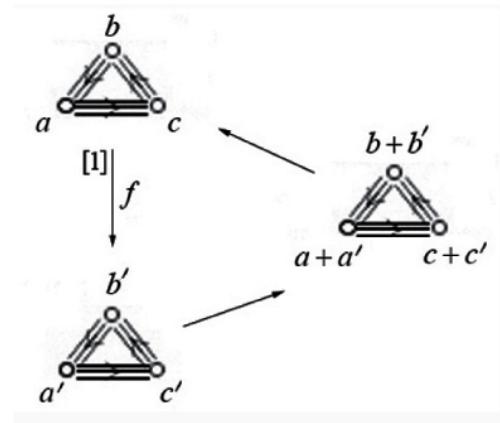
1 Введение

Цель настоящей работы — применение методов гомологической алгебры для построения Минимальной суперсимметричной стандартной модели [1] из теории суперструн [2]. Эта цель достигается путем использования концепции производной категории [3]. Такой подход позволяет определить спектры, парциальные ширины, сечения рождения и гистограммы распределения масс суперпартнеров.

Полученные результаты важны с экспериментальной точки зрения, так как они связаны с поисками новой физики на коллайдере LHC.

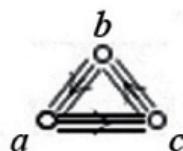
2 Производная категория

Теория производных категорий — это математический аппарат теории суперструн. Рассмотрим производную категорию выделенных треугольников над абелевой категорией квиверов МакКея [3]. Объектами этой категории являются выделенные треугольники

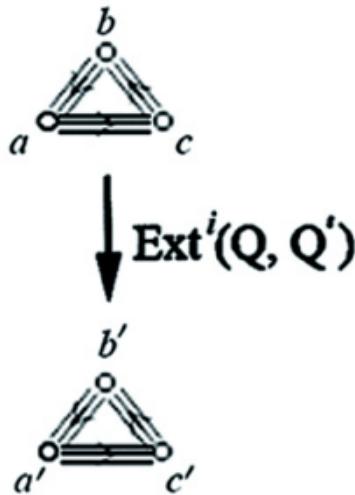


(числа a, b, c и a', b', c' обозначают орбифолд-заряды [4], характеризующие квиверы МакКея); морфизмами этой категории являются морфизмы выделенных треугольников.

В этом подходе D-бранны описываются квиверами а суперструны



описываются Ext^i -группами, определяемыми диаграммой [3] :



3 Состав частиц

В работе [5] было показано, что пространство модулей суперструны имеет вид

$$\begin{aligned}\text{Ext}^0(Q, Q') &= \mathbb{C}^{aa' + bb' + cc'}, \\ \text{Ext}^1(Q, Q') &= \mathbb{C}^{3ab' + 3bc' + 3ca'}.\end{aligned}\quad (1)$$

Подставляя в (1) орбифолд-заряды

$$a = b = c = a' = b' = c' = 4$$

и используя гипотезу Ленглендса [6], мы получаем реализацию пространства модулей (1) в терминах $SU(5)$ -мультиплетов

$$3 \times (24 + 5_H + \bar{5}_H + 5_M + \bar{5}_M + 10_M + \bar{10}_M).$$

Этот результат определяет состав частиц Минимальной суперсимметричной стандартной модели.

4 Суперпотенциал

Калибровочно инвариантный суперпотенциал Минимальной суперсимметричной стандартной модели определяется выражением

$$W_{SU(5)} = \lambda_{ij}^d \cdot \bar{5}_H \times \bar{5}_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \lambda_{ij}^u \cdot 5_H \times 10_M^{(i)} \times 10_M^{(j)} + \mu \cdot 5_H \times \bar{5}_H, \quad (2)$$

где 5_H и $\bar{5}_H$ — мультиплеты Хиггса, $\bar{5}_M^{(i)}$ и $10_M^{(j)}$ — мультиплеты суперпартнеров夸克ов и лептонов, λ_{ij}^d и λ_{ij}^u — юкавские константы связи, μ — хиггсов параметр смешивания.

5 Спектр масс

Анализ юкавских констант, основанный на экспериментальных данных и теоретических предсказаниях, позволяет ограничить число параметров в (2) до пяти [7]:

$$\begin{aligned} m_0 &= 20 \text{ GeV}, m_{1/2} = 440 \text{ GeV}, A_0 = -25 \text{ GeV}, \\ \tan\beta &= 15, \quad \text{sgn}(\mu) = +1. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя этот ограниченный набор параметров можно вычислить спектр масс суперпартнеров путем применения компьютерной программы SOFTSUSY [8]. Результат вычисления спектра масс приведен в Таблице 1.

Таблица		1.		<i>Спектр</i>	<i>mass</i>	<i>суперпартнеров</i>
\tilde{u}_R	GeV		GeV		GeV	
896				\tilde{g}	1018	
\tilde{u}_L	928	$\tilde{\nu}_e$	286	$\tilde{\chi}_1^0$	179	
\tilde{d}_R	893	\tilde{e}_R	169	$\tilde{\chi}_2^0$	337	
\tilde{d}_L	931	\tilde{e}_L	297	$\tilde{\chi}_3^0$	564	
\tilde{c}_R	896			$\tilde{\chi}_4^0$	578	
\tilde{c}_L	928	$\tilde{\nu}_\mu$	286	$\tilde{\chi}_1^\pm$	337	
\tilde{s}_R	893	$\tilde{\mu}_R$	169	$\tilde{\chi}_2^\pm$	578	
\tilde{s}_L	931	$\tilde{\mu}_L$	297			
\tilde{t}_1	709			h^0	114	
\tilde{t}_2	905	$\tilde{\nu}_\tau$	284	A^0	610	
\tilde{b}_1	855	$\tilde{\tau}_1$	151	H^0	611	
\tilde{b}_2	889	$\tilde{\tau}_2$	301	H^\pm	616	

6 Парциальные ширины

Используя набор параметров (3) можно вычислить парциальные ширины суперпартнеров путем применения компьютерной программы SDECAY [9]. Эти парциальнае ширины приведены в Таблицах 2 — 7 .

Таблица 2. Парциальные ширини супер搭档еров

	channel	BR	channel	BR
\tilde{u}_R	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.995	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.003
	$\tilde{\chi}_2^0 u$	0.002		
\tilde{u}_L	$\tilde{\chi}_1^0 u$	0.011	$\tilde{\chi}_1^+ d$	0.646
	$\tilde{\chi}_2^0 u$	0.319	$\tilde{\chi}_2^+ d$	0.014
	$\tilde{\chi}_4^0 u$	0.010		
\tilde{d}_R	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.995	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.003
	$\tilde{\chi}_2^0 d$	0.002		
\tilde{d}_L	$\tilde{\chi}_1^0 d$	0.017	$\tilde{\chi}_4^0 d$	0.013
	$\tilde{\chi}_2^0 d$	0.314	$\tilde{\chi}_1^- u$	0.620
	$\tilde{\chi}_3^0 d$	0.001	$\tilde{\chi}_2^- u$	0.034
\tilde{c}_R	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.995	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.003
	$\tilde{\chi}_2^0 c$	0.002		
\tilde{c}_L	$\tilde{\chi}_1^0 c$	0.011	$\tilde{\chi}_1^+ s$	0.646
	$\tilde{\chi}_2^0 c$	0.319	$\tilde{\chi}_2^+ s$	0.014
	$\tilde{\chi}_4^0 c$	0.010		
\tilde{s}_R	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.995	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.003
	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.002		
\tilde{s}_L	$\tilde{\chi}_1^0 s$	0.017	$\tilde{\chi}_4^0 s$	0.013
	$\tilde{\chi}_2^0 s$	0.314	$\tilde{\chi}_1^- c$	0.620
	$\tilde{\chi}_3^0 s$	0.001	$\tilde{\chi}_2^- c$	0.034

Таблица 3. Парциальные ширины суперпартнеров

	channel	BR	channel	BR
\tilde{t}_1	$\tilde{\chi}_1^0 t$	0.264	$\tilde{\chi}_1^+ b$	0.403
	$\tilde{\chi}_2^0 t$	0.151	$\tilde{\chi}_2^+ b$	0.182
\tilde{t}_2	$\tilde{\chi}_1^0 t$	0.026	$\tilde{\chi}_1^+ b$	0.238
	$\tilde{\chi}_2^0 t$	0.107	$\tilde{\chi}_2^+ b$	0.135
	$\tilde{\chi}_3^0 t$	0.101	$\tilde{t}_1 h^0$	0.051
	$\tilde{\chi}_4^0 t$	0.230	$\tilde{t}_1 Z$	0.112
\tilde{b}_1	$\tilde{\chi}_1^0 b$	0.026	$\tilde{\chi}_1^- t$	0.373
	$\tilde{\chi}_2^0 b$	0.217	$\tilde{\chi}_2^- t$	0.259
	$\tilde{\chi}_3^0 b$	0.009	$\tilde{t}_1 W^-$	0.107
	$\tilde{\chi}_4^0 b$	0.009		
\tilde{b}_2	$\tilde{\chi}_1^0 b$	0.115	$\tilde{\chi}_1^- t$	0.147
	$\tilde{\chi}_2^0 b$	0.084	$\tilde{\chi}_2^- t$	0.395
	$\tilde{\chi}_3^0 b$	0.047	$\tilde{t}_1 W^-$	0.146
	$\tilde{\chi}_4^0 b$	0.066		
$\tilde{\nu}_e$	$\tilde{\chi}_1^0 \nu_e$	1.000		
\tilde{e}_L	$\chi_1^0 e$	1.000		
ν_μ	$\chi_1^0 \nu_\mu$	1.000		
μ_L	$\chi_1^0 \mu$	1.000		
ν_τ	$\chi_1^0 \nu_\tau$	0.509	$\tau_1 W^+$	0.491
τ_2	$\chi_1^0 \tau$	0.486	$\tau_1 Z$	0.247
	$\tau_1 h^0$	0.267		

Таблица 4. Парциальные ширины супер搭档ров

	channel	BR	channel	BR
χ_1^0	$e_R^- e^+$	0.060	$\mu_R^+ \mu^-$	0.060
	$e_R^+ e^-$	0.060	$\tau_1^- \tau^+$	0.380
	$\mu_R^- \mu^+$	0.060	$\tau_1^+ \tau^-$	0.380
χ_2^0	$\chi_1^0 Z$	0.002	$\tau_1^- \tau^+$	0.068
	$\chi_1^0 h^0$	0.021	$\tau_1^+ \tau^-$	0.068
	$e_L^- e^+$	0.059	$\tau_2^- \tau^+$	0.045
	$e_L^+ e^-$	0.059	$\tau_2^+ \tau^-$	0.045
	$e_R^- e^+$	0.002	$\nu_e \nu_e^*$	0.082
	$e_R^+ e^-$	0.002	$\nu_e^* \nu_e$	0.082
	$\mu_L^- \mu^+$	0.059	$\nu_\mu \nu_\mu^*$	0.082
	$\mu_L^+ \mu^-$	0.059	$\nu_\mu^* \nu_\mu$	0.082
	$\mu_R^- \mu^+$	0.002	$\nu_\tau \nu_\tau^*$	0.088
	$\mu_R^+ \mu^-$	0.002	$\nu_\tau^* \nu_\tau$	0.088
χ_3^0	$\chi_1^0 Z$	0.104	$\tau_1^- \tau^+$	0.016
	$\chi_2^0 Z$	0.243	$\tau_1^+ \tau^-$	0.016
	$\chi_1^+ W^-$	0.279	$\tau_2^- \tau^+$	0.012
	$\chi_1^- W^+$	0.279	$\tau_2^+ \tau^-$	0.012
	$\chi_1^0 h^0$	0.020	$\nu_e \nu_e^*$	0.001
	$\chi_2^0 h^0$	0.009	$\nu_e^* \nu_e$	0.001
	$e_R^- e^+$	0.001	$\nu_\mu \nu_\mu^*$	0.001
	$e_R^+ e^-$	0.001	$\nu_\mu^* \nu_\mu$	0.001
	$\mu_R^- \mu^+$	0.001	$\nu_\tau \nu_\tau^*$	0.001
	$\mu_R^+ \mu^-$	0.001	$\nu_\tau^* \nu_\tau$	0.001

Таблица 5. Парциальные ширины суперпартнеров

	channel	BR	channel	BR
χ_4^0	$\chi_1^0 Z$	0.019	$\mu_R^- \mu^+$	0.002
	$\chi_2^0 Z$	0.013	$\mu_R^+ \mu^-$	0.002
	$\chi_1^+ W^-$	0.255	$\tau_1^- \tau^+$	0.008
	$\chi_1^- W^+$	0.255	$\tau_1^+ \tau^-$	0.008
	$\chi_1^0 h^0$	0.078	$\tau_2^- \tau^+$	0.020
	$\chi_2^0 h^0$	0.188	$\tau_2^+ \tau^-$	0.020
	$e_L^- e^+$	0.007	$\nu_e \nu_e^*$	0.016
	$e_L^+ e^-$	0.007	$\nu_e^* \nu_e$	0.016
	$e_R^- e^+$	0.002	$\nu_\mu \nu_\mu^*$	0.016
	$e_R^+ e^-$	0.002	$\nu_\mu^* \nu_\mu$	0.016
	$\mu_L^- \mu^+$	0.007	$\nu_\tau \nu_\tau^*$	0.016
	$\mu_L^+ \mu^-$	0.007	$\nu_\tau^* \nu_\tau$	0.016
χ_1^+	$\nu_e e^+$	0.179	$\mu_L^+ \nu_\mu$	0.109
	$\nu_\mu \mu^+$	0.179	$\tau_1^+ \nu_\tau$	0.128
	$\nu_\tau \tau^+$	0.193	$\tau_2^+ \nu_\tau$	0.081
	$e_L^+ \nu_e$	0.109	$\chi_1^0 W^+$	0.022
χ_2^+	$\nu_e e^+$	0.015	$\tau_2^+ \nu_\tau$	0.043
	$\nu_\mu \mu^+$	0.015	$\chi_1^+ Z$	0.251
	$\nu_\tau \tau^+$	0.033	$\chi_1^0 W^+$	0.086
	$e_L^+ \nu_e$	0.033	$\chi_2^0 W^+$	0.269
	$\mu_L^+ \nu_\mu$	0.033	$\chi_1^0 h^0$	0.210
	$\tau_1^+ \nu_\tau$	0.012		

Таблица 6. Парциальные ширинны суперпартнеров

	channel	BR	channel	BR
g	$d_L d^*$	0.023	$c_L c^*$	0.025
	$d_L^* d$	0.023	$c_L^* c$	0.025
	$d_R d^*$	0.046	$c_R c^*$	0.044
	$d_R^* d$	0.046	$c_R^* c$	0.044
	$u_L u^*$	0.025	$b_1 b^*$	0.074
	$u_L^* u$	0.025	$b_1^* b$	0.074
	$u_R u^*$	0.044	$b_2 b^*$	0.050
	$u_R^* u$	0.044	$b_2^* b$	0.050
	$s_L s^*$	0.023	$t_1 t^*$	0.099
	$s_L^* s$	0.023	$t_1^* t$	0.099
	$s_R s^*$	0.046		
	$s_R^* s$	0.046		

Таблица 7. Парциальные ширины суперпартнеров

	channel	BR	channel	BR
h^0	bb^*	0.773	$\gamma\gamma$	0.002
	$\tau^+\tau^-$	0.072	W^+W^-	0.065
	cc^*	0.022	ZZ	0.007
	gg	0.059		
A^0	bb^*	0.788	$\chi_1^0\chi_1^0$	0.005
	$\tau^+\tau^-$	0.113	$\chi_1^0\chi_2^0$	0.024
	ss^*	0.001	$\tau_1^-\tau_2^+$	0.006
	tt^*	0.057	$\tau_1^+\tau_2^-$	0.006
H^0	bb^*	0.812	$\chi_1^0\chi_1^0$	0.003
	$\tau^+\tau^-$	0.117	$\chi_1^0\chi_2^0$	0.006
	ss^*	0.001	$\tau_1^-\tau_1^+$	0.002
	tt^*	0.047	$\tau_1^-\tau_2^+$	0.005
	h^0h^0	0.001	$\tau_1^+\tau_2^-$	0.005
H^+	cb^*	0.001	tb^*	0.817
	$\tau^+\nu_\tau$	0.132	$\chi_1^+\chi_1^0$	0.034
	cs^*	0.001	$\tau_1^+\nu_\tau$	0.014

7 Сечения

Используя набор параметров (3) можно вычислить сечения рождения суперпартнеров путем применения компьютерной программы PYTHIA [10]. Эти сечения в системе центра масс $\sqrt{s} = 14$ TeV приведены в Таблицах 8 – 11 .

Таблица 8. Сечения рождения супер搭档ров

channel	cross section (pb)
$gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 2.899$
$qq^* \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{g}\tilde{g}} = 0.211$
$qg \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{g}} = 2.757$
$qg \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{g}} = 5.245$
$qg \rightarrow \tilde{s}_L \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{s}_L \tilde{g}} = 0.466$
$qg \rightarrow \tilde{c}_L \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{c}_L \tilde{g}} = 0.215$
$qg \rightarrow \tilde{b}_1 \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{b}_1 \tilde{g}} = 0.172$
$qg \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{g}} = 3.089$
$qg \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{g}} = 5.745$
$qg \rightarrow \tilde{s}_R \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{s}_R \tilde{g}} = 0.529$
$qg \rightarrow \tilde{c}_R \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{c}_R \tilde{g}} = 0.240$
$qg \rightarrow \tilde{b}_2 \tilde{g}$	$\sigma_{\tilde{b}_2 \tilde{g}} = 0.154$
$gg \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{d}_L^*$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{d}_L^*} = 0.136$
$gg \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{u}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{u}_L^*} = 0.140$
$gg \rightarrow \tilde{s}_L \tilde{s}_L^*$	$\sigma_{\tilde{s}_L \tilde{s}_L^*} = 0.136$
$gg \rightarrow \tilde{c}_L \tilde{c}_L^*$	$\sigma_{\tilde{c}_L \tilde{c}_L^*} = 0.140$
$gg \rightarrow \tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*$	$\sigma_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*} = 0.238$

Таблица 9. Сечения рождения суперпартнеров

channel	cross section (pb)
$gg \rightarrow \tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*$	$\sigma_{\tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*} = 0.766$
$gg \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{d}_R^*$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{d}_R^*} = 0.182$
$gg \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{u}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{u}_R^*} = 0.178$
$gg \rightarrow \tilde{s}_R \tilde{s}_R^*$	$\sigma_{\tilde{s}_R \tilde{s}_R^*} = 0.182$
$gg \rightarrow \tilde{c}_R \tilde{c}_R^*$	$\sigma_{\tilde{c}_R \tilde{c}_R^*} = 0.178$
$gg \rightarrow \tilde{b}_2 \tilde{b}_2^*$	$\sigma_{\tilde{b}_2 \tilde{b}_2^*} = 0.186$
$gg \rightarrow \tilde{t}_2 \tilde{t}_2^*$	$\sigma_{\tilde{t}_2 \tilde{t}_2^*} = 0.164$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{d}_L^*$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{d}_L^*} = 0.146$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{d}_R^*$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{d}_R^*} = 0.188$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{d}_L^*$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{d}_L^*} = 0.188$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{s}_R^*$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{s}_R^*} = 0.103$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{u}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{u}_L^*} = 0.208$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{u}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{u}_R^*} = 0.299$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{u}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{u}_L^*} = 0.299$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{c}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{c}_R^*} = 0.110$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{d}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{d}_L^*} = 0.176$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{d}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{d}_R^*} = 0.584$

Таблица 10. Сечения рождения супер搭档ров

channel	cross section (pb)
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{s}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{s}_R^*} = 0.232$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{s}_L^*$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{s}_L^*} = 0.103$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{c}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{c}_L^*} = 0.110$
$qq' \rightarrow \tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*$	$\sigma_{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*} = 0.111$
$qq' \rightarrow \tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*$	$\sigma_{\tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*} = 0.296$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{d}_R^*$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{d}_R^*} = 0.150$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{u}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{u}_R^*} = 0.187$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{d}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{d}_L^*} = 0.574$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{s}_L^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{s}_L^*} = 0.227$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{d}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{d}_R^*} = 0.263$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{s}_R^*$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{s}_R^*} = 0.103$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{d}_L$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{d}_L} = 0.277$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{d}_R$	$\sigma_{\tilde{d}_L \tilde{d}_R} = 0.222$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{u}_L$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{u}_L} = 1.109$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{c}_L$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{c}_L} = 0.116$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{u}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{u}_R} = 1.218$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{d}_L$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{d}_L} = 1.669$

Таблица 11. Сечения рождения суперпартнеров

channel	cross section (pb)
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{s}_L$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{s}_L} = 0.209$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_L \tilde{d}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_L \tilde{d}_R} = 0.949$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{d}_R$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{d}_R} = 0.284$
$qq' \rightarrow \tilde{d}_R \tilde{s}_R$	$\sigma_{\tilde{d}_R \tilde{s}_R} = 0.112$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{u}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{u}_R} = 1.173$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{c}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{c}_R} = 0.140$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{d}_L$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{d}_L} = 0.937$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{d}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{d}_R} = 1.872$
$qq' \rightarrow \tilde{u}_R \tilde{s}_R$	$\sigma_{\tilde{u}_R \tilde{s}_R} = 0.254$
$qq'^* \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_2^0$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_2^0} = 0.734$
$qq'^* \rightarrow \tilde{\chi}_1^- \tilde{\chi}_2^0$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^- \tilde{\chi}_2^0} = 0.392$
$qq'^* \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_1^-$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{\chi}_1^-} = 0.585$
$qg \rightarrow \tilde{\chi}_1^0 \tilde{u}_R$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^0 \tilde{u}_R} = 0.350$
$qg \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 \tilde{d}_L$	$\sigma_{\tilde{\chi}_2^0 \tilde{d}_L} = 0.143$
$qg \rightarrow \tilde{\chi}_2^0 \tilde{u}_L$	$\sigma_{\tilde{\chi}_2^0 \tilde{u}_L} = 0.306$
$qg \rightarrow \tilde{\chi}_1^+ \tilde{d}_L$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^+ \tilde{d}_L} = 0.546$
$qg \rightarrow \tilde{\chi}_1^- \tilde{u}_L$	$\sigma_{\tilde{\chi}_1^- \tilde{u}_L} = 0.275$

8 Гистограммы распределения масс

Используя набор параметров (3) можно вычислить гистограммы распределения масс суперпартнеров путем применения компьютерной программы PYTHIA [10]. Эти гистограммы для \tilde{q}_R , $\tilde{\chi}_1^0$, \tilde{q}_L , $\tilde{\chi}_2^0$, \tilde{l}_L , \tilde{g} приведены на Рис. 1 — 6 .

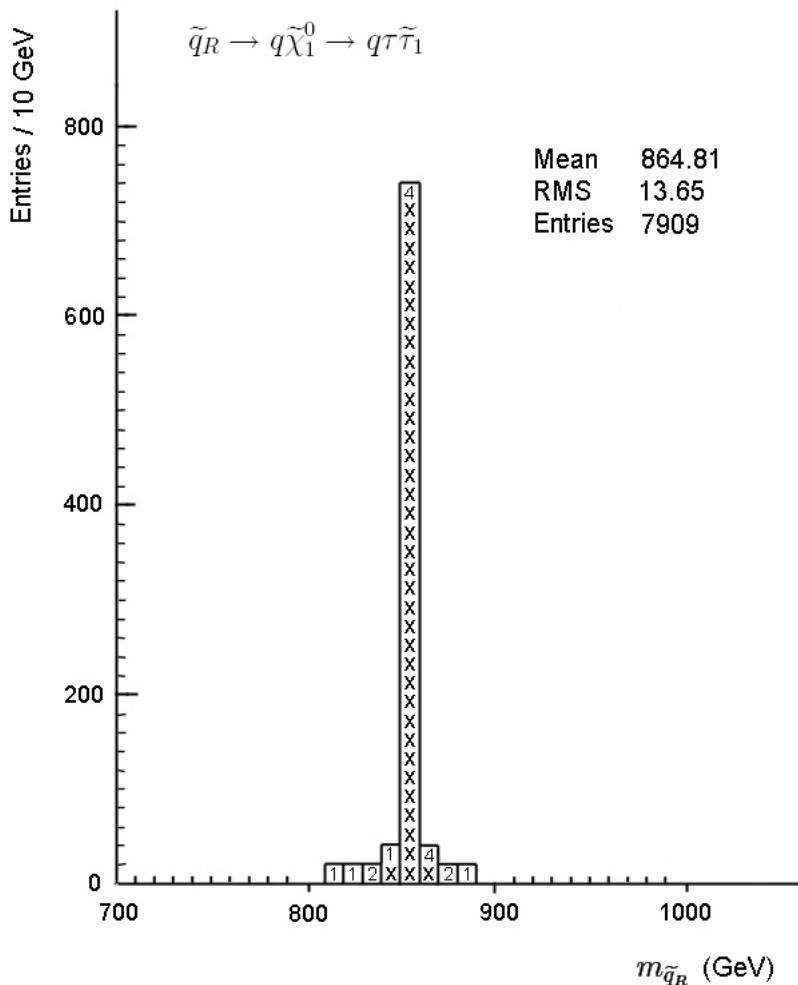


Рис. 1. Гистограмма распределения масс для \tilde{q}_R

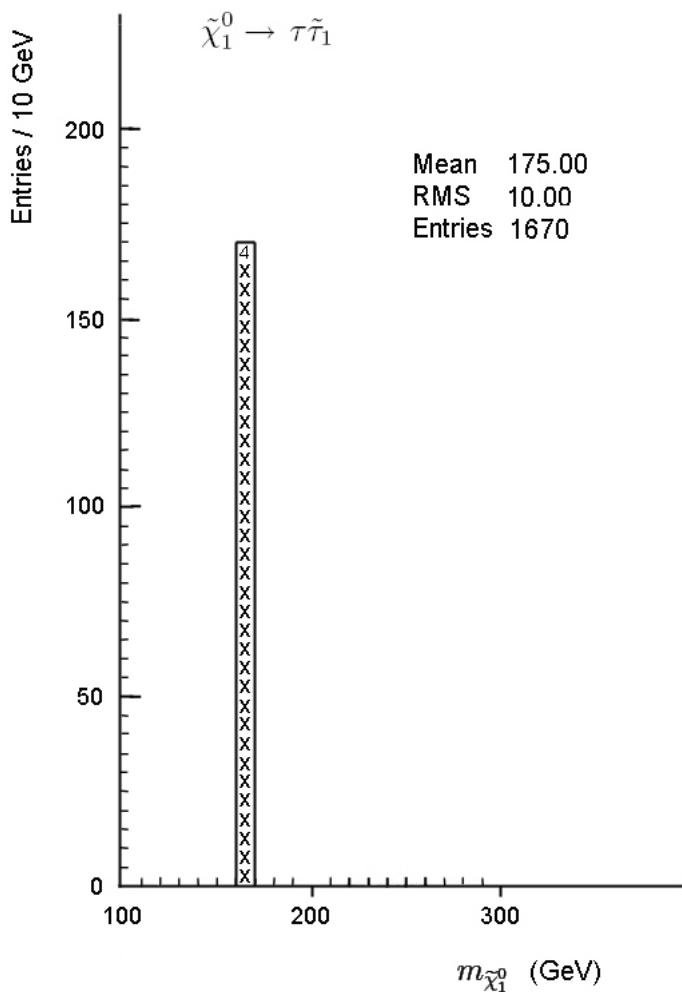


Рис.2. Гистограмма распределения масс для $\tilde{\chi}_1^0$

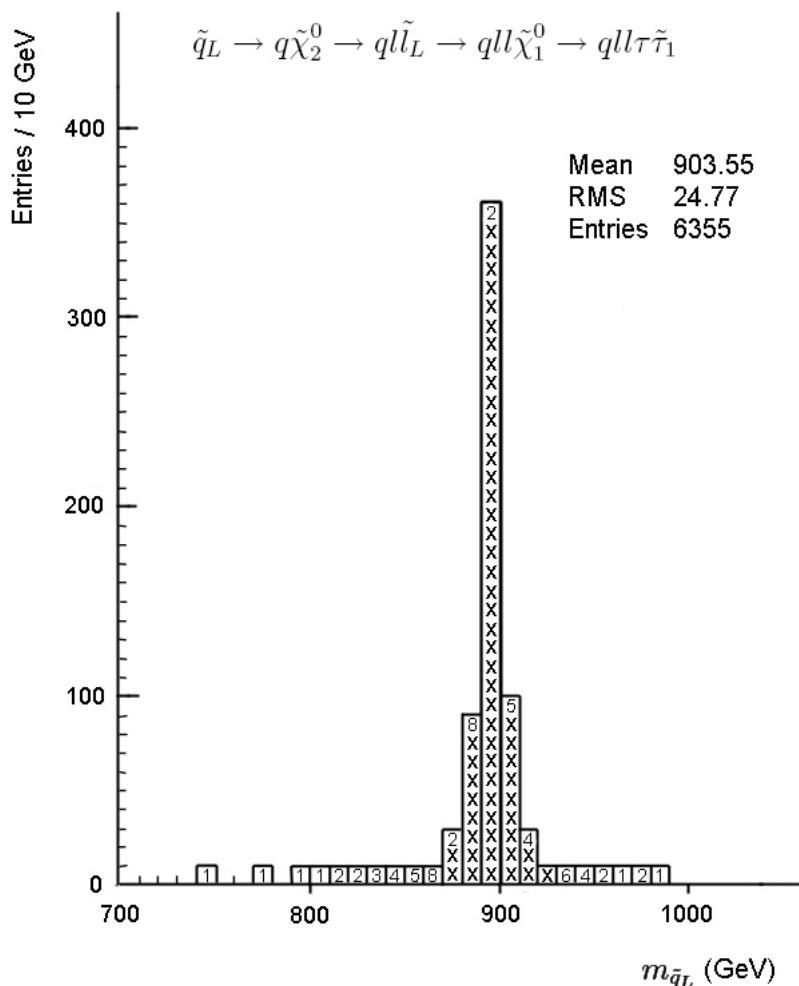


Рис.3. Гистограмма распределения масс для \tilde{q}_L

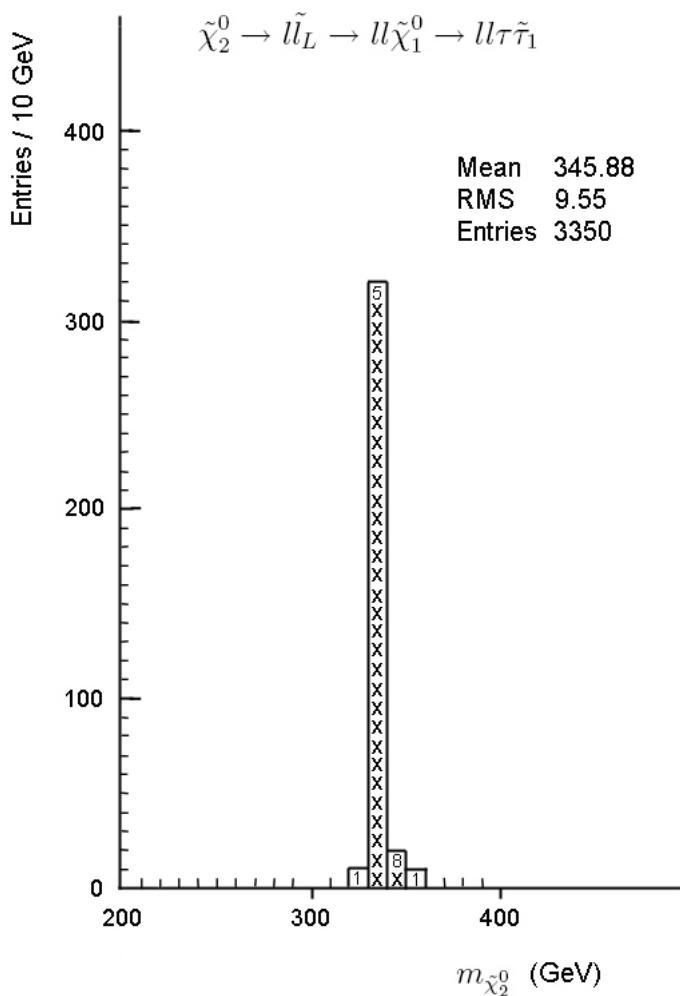


Рис.4. Гистограмма распределения масс для $\tilde{\chi}_2^0$

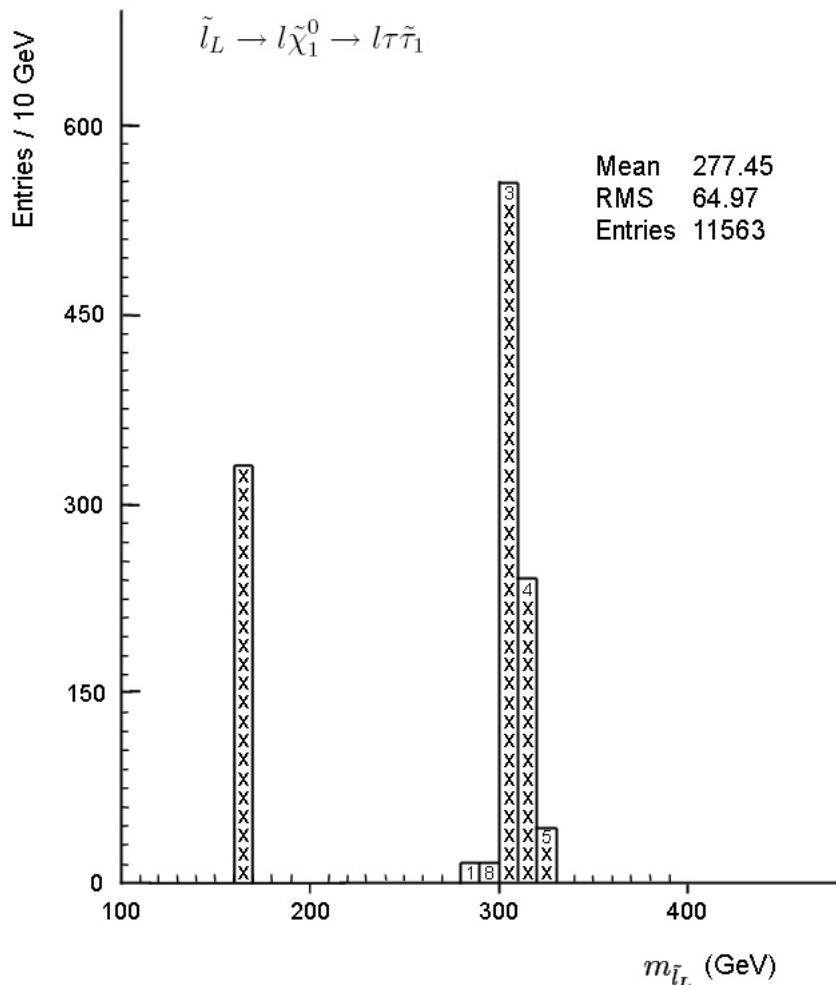


Рис. 5. Гистограмма распределения масс для \tilde{l}_L

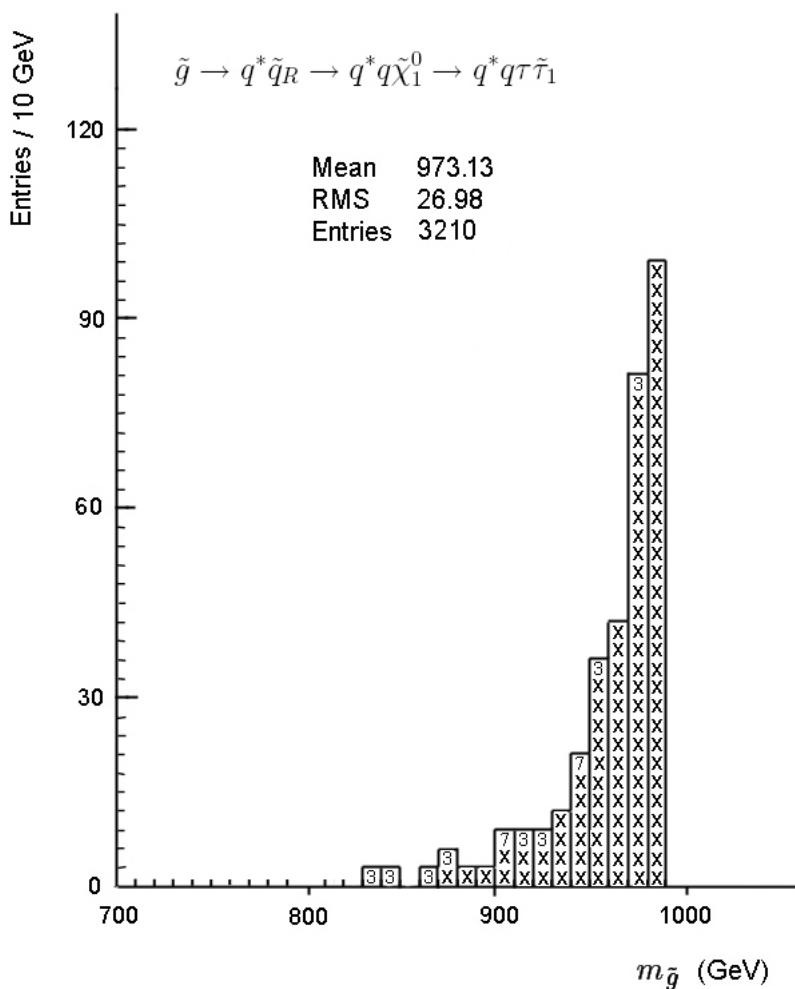


Рис.6. Гистограмма распределения масс для \tilde{g}

9 Заключение

Физика высоких энергий находится на пороге новых открытий. Большой Адронный Коллайдер (LHC) вступил в строй и превышает возможности прежних ускорителей в обнаружении новой физики за пределами Стандартной модели. Эту новую физику предсказывает Минимальная суперсимметричная стандартная модель, в которой каждая частица имеет супер搭档, спин которого отличается на $1/2$. Скварки и глюино

являются примерами таких суперпартнеров. Недавно на коллайдере LHC были выполнены первые поиски сквартков и глюино в конечных состояниях, содержащих струи [11,12]. Интерес к исследованию этих конечных состояний был мотивирован Минимальной суперсимметричной стандартной моделью, в которой сквартки и глюино рождаются парами ($\tilde{q}\tilde{q}$, $\tilde{g}\tilde{g}$, $\tilde{g}\tilde{g}$). Если рождение пары сквартков $\tilde{q}\tilde{q}$ является доминирующим, то возникают две струи из распада $\tilde{q} \rightarrow q\tilde{\chi}_1^0$. Если вместе с сквартками рождаются глюино ($\tilde{q}\tilde{g}$ и $\tilde{g}\tilde{g}$), то возникают три струи из распада $\tilde{g} \rightarrow qq^*\tilde{\chi}_1^0$. Анализ этих струй устанавливает нижние пределы на массы сквартков и глюино: $m_{\tilde{q}} > 775$ GeV , $m_{\tilde{g}} > 775$ GeV . В заключение отметим, что применение категорного подхода к построению Минимальной суперсимметричной стандартной модели из теории суперструн является нашим оригинальным методом на пути к современной реализации мечты Эйнштейна о Единой теории фундаментальных взаимодействий.

References

1. Haber, H.E.: Introductory low-energy supersymmetry. arXiv: hep-ph/9306207.
2. Vafa, C. et al.: Stringy reflections on LHC. <http://www.claymath.org/workshops/lhc/>.
3. Aspinwall, P.S.: D-branes on Calabi-Yau manifolds. arXiv: hep-th/0403166.
4. Douglas, M.R., Fiol, B. and Römelsberger, C.: The spectrum of BPS branes on a non-compact Calabi-Yau. arXiv: hep-th/0003263.
5. Katz, S., Pantev, T. and Sharpe, E.: D-branes, orbifolds, and Ext groups. arXiv: hep-th/0212218.
6. Schmid, W.: Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **69**, 56–59 (1968).
7. De Roeck, A. et al.: Supersymmetric benchmarks with nonuniversal scalar masses or gravitino dark matter. arXiv: hep-ph/0508198.
8. Allanach, B.C.: SOFTSUSY2.0: a program for calculating supersymmetric spectra. Comput. Phys. Commun., **143**, 305–331 (2002).
9. Muhlleitner, M., Djouadi, A. and Mambrini, Y.: SDECAY: a fortran code for the decays of the supersymmetric particles in the MSSM. Comput. Phys. Commun., **168**, 46–70 (2005).
10. Sjöstrand, T., Mrenna, S. and Skands, P.: PYTHIA 6.4 Physics and Manual. JHEP, **05**, 1–26 (2006).
11. CMS Collaboration: Search for Supersymmetry in pp Collisions at 7 TeV in Events with Jets and Missing Transverse Energy. e-print arXiv: 1101.1628 [hep-ex] (2011).
12. ATLAS Collaboration: Search for squarks and gluinos using final states with jets and missing transverse momentum with the ATLAS detector in $\sqrt{s} = 7$ TeV proton-proton collisions. e-print arXiv: 1102.5290 [hep-ex] (2011).

Ю.М. Малюта, Т.В. Обиход

Институт ядерных исследований

Национальная Академия Наук Украины

03680 Киев, Украина

E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

Yu.M. Malyuta, T.V. Obikhod

Superstring theory in the context of homological algebra

The theory of derived categories is applied to construct the Minimal Supersymmetric Standard Model from superstring theory. The spectra, partial widths, production cross sections and histograms of mass distributions for superpartners are calculated. This approach gives concrete predictions for purposeful superpartner searches at the LHC.

Ідемпотентні міри і K -ультраметричні простори

О.Г. Савченко

Abstract Означенено K -ультраметризацію множин ідемпотентних мір (мір Маслова) з компактними носіями на K -ультраметричному просторі. Показано, що конструкція ідемпотентних мір визначає коваріантний функтор на категорії K -ультраметричних просторів та K -нерозтягуючих відображень.

Keywords Ідемпотентна міра · K -ультраметричний простір

УДК 515.12

1 Вступ

Поняття K -ультраметрики є одночасним узагальненням метрики і ультраметрики. Воно розглядалося автором у зв'язку з дослідженням стаціонарних розмитих метричних просторів.

Природно розглядати задачу побудови K -ультраметрик на різних функторіальних конструкціях від метричних просторів. Зокрема, автор раніше розглядав гіперпростори (експоненти) та простори ймовірності мір. Доведено, наприклад, що конструкція метрики Гаусдорфа зберігає K -ультраметричні простори.

Метою цієї статті є запровадження K -ультраметризації множин ідемпотентних мір (мір Маслова) з компактними носіями на K -

ультраметричному просторі. Показано, що конструкція ідемпотентних мір визначає коваріантний функтор на категорії K -ультраметричних просторів та K -нерозтягуючих відображень.

2 Попередні відомості

Опишемо конструкцію простору мір Маслова (ідемпотентних мір) на компактних гаусдорфових просторах. Більш детально необхідну інформацію можна знайти, наприклад, в [1].

Нехай (X, d) — компактний метричний простір. Через $O_r(x)$ позначаємо відкриту кулю радіуса r в X з центром у точці x .

Для кожного компактного гаусдорфового простору X через $C(X)$ позначаємо банахів простір неперервних функцій на X , наділений супернормою.

Для кожного $c \in \mathbb{R}$ нехай c_X ($c \in \mathbb{R}$) — стала функція на X , що приймає значення c .

На множині $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ задамо метрику ϱ наступним чином: $\varrho(x, y) = |e^x - e^y|$. Приймемо, що $e^{-\infty} = 0$.

Через $\odot: \mathbb{R} \times C(X) \rightarrow C(X)$ позначимо відображення, що діє наступним чином: $(\lambda, \varphi) \mapsto \lambda_X + \varphi$, а через $\oplus: C(X) \times C(X) \rightarrow C(X)$ — відображення поточкового максимума, $(\varphi, \psi) \mapsto \max\{\varphi, \psi\}$.

Определение 1 Нехай X — компактний гаусдорфовий простір. Функціонал $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ називається ідемпотентною мірою (мірою Маслова), якщо

1. $\mu(c_X) = c$;
2. $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$.

З доведеного в [6] слідує, що довільна ідемпотентна ймовірнісна міра є неперервним функціоналом.

Значення $\mu(\varphi)$ називається *інтегралом Маслова* функції φ відносно міри μ .

Нехай $I(X)$ — множина всіх ідемпотентних ймовірнісних мір на X . Наділимо $I(X)$ слабкою* топологією. Базу цієї топології складають множини

$$O(\mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon) = \{\nu \in I(X) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

В [1] доведено, що $I(X)$ є компактним гаусдорфовим простором.

Розглянемо приклад ідемпотентної ймовірнісної міри на X . Нехай $x_1, \dots, x_n \in X$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ — набір чисел таких, що $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0$. Означимо

$\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ наступним чином: $\mu(\varphi) = \max\{\varphi(x_i) + \lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Для довільного $x \in X$ через δ_x означимо функціонал на $C(X)$ наступним чином: $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Тоді можна записати, що $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$.

Означимо відображення $I(f): I(X) \rightarrow I(Y)$ наступним чином: $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f)$, для усіх $\varphi \in C(Y)$. Як доведено в [1], це відображення є неперервним.

Легко бачити, що конструкція I визначає коваріантний функтор в категорії компактних гаусдорфових просторів та неперервних відображень. Про функтори в категоріях топологічних просторів див., наприклад, [2].

3 Метризація

Нехай (X, d) — компактний метричний простір. Через $\text{LIP}_n = \text{LIP}_n(X, d)$ позначаємо множину ліпшицевих функцій з ліпшицовою сталою $\leq n$ з простору $C(X)$. Іншими словами,

$$\text{LIP}_n(X, d) = \{f \in C(X) \mid |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n}d(x, y), x, y \in X\}.$$

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $\mu, \nu \in I(X)$, нехай

$$\hat{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \in \text{LIP}_n\}.$$

У [3] доведено такий факт.

Теорема 1 *Функція \hat{d}_n є неперервною псевдометрикою на просторі $I(X)$.*

Приймемо $\tilde{d}_n = (1/n)\hat{d}_n$.

Нехай (X, d) — компактний метричний простір. Означимо функцію $\tilde{d}: I(X) \times I(X) \rightarrow \mathbb{R}$ формулою:

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{d}_n(\mu, \nu)}{2^i}.$$

Тоді функція \tilde{d} є метрикою на просторі $I(X)$.

Для функтора F в категорії компактних гаусдорфових просторів та неперервних відображень, що зберігає клас вкладень і перетинів, можна означити поняття носія. А саме, для кожного $a \in F(X)$, множина

$$\text{supp}(a) = \cap\{Y \mid Y — замкнена підмножина в } X \text{ і } a \in F(Y)\}$$

називається *носієм* a . Якщо $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i}$, то $\text{supp}(\mu) = \{x_i \mid \lambda_i > -\infty\}$.

Для довільної замкненої підмножини A простору X і кожної $\mu \in I(X)$, виконується, що: $\text{supp}(\mu) \subset A$, тоді і тільки тоді, якщо для довільних двох функцій $\varphi, \psi \in C(X)$ таких, що $\varphi|A = \psi|A$, маємо, що $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$.

Стандартна процедура дозволяє одержати множину ідемпотентних мір з компактними носіями на кожному тихоновському (зокрема, метризовному) просторі X . Ми зберігаємо позначення $I(X)$ для такої множини.

4 K -улльтраметрика

Нехай $K \in [0, \infty]$. Метрику d на множині X називають K -улльтраметрикою, якщо виконано умову: для кожних $x, y, z \in X$ маємо

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\},$$

якщо $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \leq K$.

Зрозуміло, що при $K = 0$ одержуємо поняття метричного простору, а при $K = \infty$ — поняття ультраметричного простору. Зауважимо також, що кожен K -улльтраметричний простір є K' -улльтраметричним простором, якщо $K' \leq K$.

Назвемо K -улльтраметричний простір рівномірно K -улльтраметричним, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що кожна куля $B_K(x)$ є також кулею $B_{K+\varepsilon}(x)$, $x \in X$. Якщо виникає потреба явно вказати ε , то такий простір називаємо рівномірно (K, ε) -улльтраметричним.

Опишемо конструкцію, яка дозволяє будувати приклади K -улльтраметричних просторів. Обмежимося лише випадком $K \in (0, \infty)$.

Нехай $\{(X_\alpha, d_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ — сім'я ультраметричних просторів діаметра $\leq K$. Нехай також D — метрика на A така, що $D(\alpha, \beta) > K$ для кожних $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$. Означимо функцію $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ формулою:

$$d(x, y) = \begin{cases} d_\alpha(x, y), & \text{якщо } x, y \in \alpha \in A \\ D(\alpha, \beta), & \text{якщо } x \in \alpha, y \in \beta, \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Функція D є K -улльтраметрикою на множині X . Насправді, як показав автор, ця конструкція носить універсальний характер і кожна K -улльтраметрика може бути одержана такою процедурою.

На кожному K -улльтраметричному просторі можна означити відношення \sim_K такою умовою: $x \sim_K y$ тоді і лише тоді, коли $d(x, y) \leq K$. З описаних вище властивостей K -улльтраметрики випливає, що відношення \sim_K означене коректно.

Неперервне відображення $f: X \rightarrow Y$ метричного простору (X, d) у метричний простір (Y, ϱ) називається K -нерозтягуючим відображенням, якщо $\varrho(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ для кожних $x, y \in X$ таких, що $d(x, y) \leq K$.

Метричний простір (X, d) назовемо K -дискретним, якщо $d(x, y) \geq K$ для кожних $x, y \in X$, $x \neq y$. Зрозуміло, що кожний K -дискретний простір є K -ультраметричним.

5 K -ультраметрика на множині ідемпотентних мір

Позначимо через $\mathcal{F}_r(X)$ множину неперервних функцій на X , що сталі на всіх кулях радіуса r .

Якщо (X, d) — ультраметричний простір, то на множині $I(X)$ можна означити ультраметрику \hat{d} (див. [4]):

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \mid \mu(\varphi) = \nu(\varphi) \text{ для кожного } \varphi \in \mathcal{F}_r(X)\}.$$

Надалі (X, d) — рівномірно (K, ε) -ультраметричний простір.

Нехай $q_K: X \rightarrow X / \sim_K$ — факторвідображення. Приймемо:

$$d_K(\mu, \nu) = \begin{cases} \tilde{d}(\mu, \nu), & \text{якщо } I(q_K)(\mu) = I(q_K)(\nu), \\ \max\{\hat{d}(I(q_K)(\mu), I(q_K)(\nu)), K + \varepsilon\}, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Теорема 2 Функція d_K є рівномірною K -ультраметрикою на множині $I(X)$.

Proof Доведення цієї теореми проходить аналогічно до доведення відповідного результату для ймовірнісних мір. Ми встановимо тут лише умову з означення K -ультраметрики.

Нехай $\mu, \nu, \tau \in I(X)$ — попарно різні міри.

Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $\hat{d}(\mu, \nu) \leq K$. Якщо також $\hat{d}(\nu, \tau) \leq K$, то для кожного $\eta \in (K, K + \varepsilon)$ і кожного $f \in \mathcal{F}_\eta$ одержуємо $\mu(f) = \nu(f) = \tau(f)$, звідки $\hat{d}(\mu, \nu) \leq \max\{\hat{d}(\mu, \tau), \hat{d}(\tau, \nu)\}$.

Решта доведення відбувається як і для ймовірнісних мір. Подаємо ці міркування для повноти викладу. Якщо $\hat{d}(\mu, \nu) \leq K$ і $\hat{d}(\nu, \tau) \geq K + \varepsilon$, то також і $\hat{d}(\mu, \tau) \geq K + \varepsilon$, а отже

$$\begin{aligned} d_K(\mu, \tau) &= \tilde{d}(I(q_K)(\mu), I(q_K)(\tau)) = \tilde{d}(I(q_K)(\nu), I(q_K)(\tau)) = d_K(\nu, \tau) \\ &= \max\{d_K(\mu, \nu), d_K(\nu, \tau)\}. \end{aligned}$$

Якщо

$$\min\{d_K(\mu, \nu), d_K(\mu, \tau), d_K(\nu, \tau)\} \geq K + \varepsilon,$$

то

$$\begin{aligned} d_K(\mu, \nu) &= \max\{K + \varepsilon, \tilde{d}(\mu, \nu)\} \leq \max\{K + \varepsilon, \tilde{d}(\mu, \tau) + d_K(\tau, \nu)\} \\ &\leq \max\{K + \varepsilon, \tilde{d}(\mu, \tau)\} + \max\{K + \varepsilon, \tilde{d}(\tau, \nu)\} \\ &= d_K(\mu, \tau) + d_K(\tau, \nu). \end{aligned}$$

Метричний простір називається K -дискретним, якщо значення його метрики не лежать у множині $(0, K)$. Очевидно, що кожен K -дискретний простір є K -ультраметричним.

Описана вище конструкція метризації множини ідемпотентних мір дає таку формулу для K -дискретного метричного простору:

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \max\{K, \tilde{d}(\mu, \nu)\}, \text{ якщо } \mu \neq \nu.$$

Предложение 1 Нехай $f: X \rightarrow Y$ — K -нерозтягуюче відображення K -ультраметричних просторів. Тоді відображення $I(f): I(X) \rightarrow I(Y)$ теж K -нерозтягуюче.

Proof Нехай $\mu, \nu \in I(X)$ і $d_K(\mu, \nu) \leq \varepsilon$, де $\varepsilon \leq K$. Нехай також $y \in Y$ і $\eta > \varepsilon$. З K -нерозтягуваності відображення f випливає, що множина $f^{-1}(B_\eta(y))$ є об'єднанням куль вигляду $B_\varepsilon(x)$ в X . Звідси випливає, що для кожного $\varphi \in \mathcal{F}_\eta(Y)$ маємо $\varphi f \in \mathcal{F}_\varepsilon(X)$. Тому

$$I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f) = \nu(f\varphi) = I(f)(\nu)(\varphi),$$

звідки $d_K(I(f)(\mu), I(f)(\nu)) \leq \varepsilon$.

Одержано функтор I на категорії K -ультраметричних просторів та K -нерозтягуючих відображень.

Його звуження на категорію K -дискретних просторів та K -нерозтягуючих відображень є ендофунктором у цій категорії.

Позначимо через $I_\omega(X)$ множину ідемпотентних мір зі скінченими носіями в X .

Предложение 2 Для кожного K -ультраметричного простору X множина $I_\omega(X)$ єсюди щільна в X .

Proof Нехай $\mu \in I(X)$ і $r \in (0, K)$. Позначимо через $s: X/\sim_K \rightarrow X$ селекцію відображення q_K (тобто $q_K s = 1_{X/\sim_K}$). Приймемо $\nu = I(sq_K)(\mu) \in I(X)$. Тоді, очевидно, $\nu \in I_\omega(X)$ і $d_K(\mu, \nu) \leq r$.

Зазначимо, що відповідний результат для ультраметричних просторів доведено в [4].

6 Зауваження і відкриті питання

У статті [6] Т. Радул розглянув множину слабо адитивних функціоналів, що зберігають порядок на компактних гаусдорфових просторах.

Функціонал (не обов'язково лінійний чи неперервний) $\nu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ називається

1. *слабо адитивним*, якщо для кожного $c \in \mathbb{R}$ та $\varphi \in C(X)$ виконується, що $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c$;
2. *що зберігає порядок*, якщо для усіх $\varphi, \psi \in C(X)$ таких, що $\varphi \leq \psi$ виконується, що $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$;
3. *нормованим*, якщо $\nu(1_X) = 1$.

Через $O(X)$ (X — компактний гаусдорфовий простір) позначимо множину всіх слабо адитивних нормованих функціоналів в $C(X)$, що зберігають порядок. Множина $O(X)$ наділяється слабкою* топологією.

Виникає природне запитання: чи існує аналог результатів цієї статті для просторів $O(X)$?

Хоча поняття K -ультраметричного простору походить з теорії розмитих метричних просторів, воно дозволяє знову повернутися до цієї теорії у дещо іншій формі. За основними означеннями з теорії розмитих метричних просторів відсилаємо читача до [5].

Нехай $k \in (0, 1)$. Розмита метрику M на множині X назовемо розмитою k -ультраметрикою, якщо виконано умову:

$$M(x, z, \max\{t, s\}) \geq \min\{M(x, y, t), M(y, z, t)\},$$

якщо тільки

$$\max\{M(x, y, t), M(y, z, t)\} \geq k,$$

для всіх $x, y, z \in X, t, s \in (0, \infty)$.

Чи існує природна розмита k -ультраметризація просторів $I(X)$ для розмитих k -ультраметричних просторів?

Див. також [7], де розглянуто поняття розмитої ультраметрики.

References

1. М. М. Заричний, Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. матем., **74**:3 (2010), 45–64.
2. A. Teleiko, and M. Zarichnyi, Categorical topology of compact Hausdorff spaces.- Mathematical Studies: Monograph Series, Volume 5. - 200 pp.
3. L. Bazylevych, D. Repovš, M. Zarichnyi, Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topol. Appl., **157** (2010), 136–144.

4. O. Hubal, M. Zarichnyi, Idempotent probability measures on ultrametric spaces // J. Math. Anal. Appl. **343** (2008), no. 2, 1052–1060.
5. A. George, P.V. Veeramani, On some results in fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems **64** (1994) 395–399.
6. T. Radul, On the functor of order-preserving functionals // Comment.Math.Univ. of Carolinae. **39**:3 (1998) 609–615.
7. D. Miheţ, Fuzzy ψ -contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems, **159** (2008), Issue 6, 739–744.

О.Г. Савченко

**Херсонський державний аграрний університет, Херсон,
Україна.**

E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Aleksandr Savchenko

Kherson state agrarian university, Kherson, Ukraine

Idempotent measures and K -ultrametric spaces

We define a K -ultrametrization of the sets of idempotent measures (Maslov measures) with compact supports on a K -ultrametric space. It is shown that the construction of idempotent measures determines a covariant functor on the category of K -ultrametric spaces and K -nonexpanding maps.

Нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь

Юлія Степанівна Федченко

Аннотация В даній роботі проводяться дослідження нескінченно малих геодезичних деформацій поверхонь. Знайдено нову форму основних рівнянь для нескінченно малих геодезичних деформацій, яку представлено через тензорні поля похідної вектора зміщення. Для поверхонь обертання тензорні поля вписано в явному вигляді.

Ключові слова поверхні, нескінченно малі геодезичні деформації

УДК 514.764.258

1 Вступ

У диференціальній геометрії поверхонь теорія нескінченно малих деформацій займає одне з важливих місць. Дано теорія містить різні типи деформацій, які характеризуються певною геометричною властивістю.

Особливе місце в теорії деформацій поверхонь займають нескінченно малі геодезичні деформації, які вперше були введені М.С. Синюковим та М.Л. Гаврильченком у 1971 році [1]. У роботі [2] авторами встановлено зв’язок нетривіальних нескінченно малих геодезичних деформацій та нетривіальних геодезичних відображень, знайдено основні рівняння таких деформацій і показано, що в E_3 такі деформації допускають лише поверхні Ліувілля.

У даній статті досліджуємо поверхні евклідового простору при нескінченно малих геодезичних деформаціях. Знайдено нову форму основних рівнянь для нескінченно малих геодезичних деформацій поверхонь, яку представлено через тензорні поля похідної вектора зміщення. Виділено ознаку афінних деформацій. Для поверхонь обертання виписано тензорні поля в явному вигляді. Вказано геометричний зміст опорної функції ψ нескінченно малої геодезичної деформації.

2 Попередні відомості

Розглянемо поверхню S класу C^3 в евклідовому просторі E_3 з векторнопараметричним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$ та її деформацію S_ε :

$$\bar{r}_\varepsilon = \bar{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \bar{U}(x^1, x^2),$$

де

$$\bar{U}(x^1, x^2) = u_i \bar{r}^i + \overset{0}{u} \bar{n} \quad (1)$$

- вектор зміщення, ε - малий параметр, а u_i , $\overset{0}{u}$ - відповідно тангенціальні та нормальна компоненти вектора зміщення. Всі індекси тут і надалі незалежно набувають значень 1,2, якщо не вказано інше.

При нескінченно малій деформації всі об'єкти поверхні отримують певні варіації. Наведемо варіації деяких геометричних величин у тензорному вигляді для загальної деформації [3]:

$$\delta g_{ij} \equiv 2\varepsilon_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2 \overset{0}{u} b_{ij} \quad (2)$$

- варіація першого фундаментального тензора,

$$\delta \Gamma_{ij}^h = g^{\alpha h} (\nabla_j \varepsilon_{i\alpha} + \nabla_i \varepsilon_{j\alpha} - \nabla_\alpha \varepsilon_{ij}) \quad (3)$$

- варіація символів Кристоффеля. Величини $\delta \Gamma_{ij}^h = P_{ij}^h$ є компонентами тензора типу $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Продиференціюємо (1) коваріантно по x^i . Тоді на основі деридаційних рівнянь поверхні $\nabla_j \bar{r}_i = b_{ij} \bar{n}$, $\bar{n}_i = -b_i^\alpha \bar{r}_\alpha$ (b_{ij} - коефіцієнти другої фундаментальної форми поверхні, $b_\beta^\gamma = b_{\beta\alpha} g^{\alpha\gamma}$, ∇ - коваріантна похідна в рімановій зв'язності) матимемо, що

$$\bar{U}_i = T_i^\alpha \bar{r}_\alpha + T_i \bar{n}, \quad (4)$$

$$T_i^k = \nabla_i u^k - b_i^0 \overset{0}{u}, \quad (5)$$

$$T_i = \partial_i \overset{0}{u} + b_{ik} u^k. \quad (6)$$

Рівності (4) - система двох диференціальних рівнянь відносно однієї функції \bar{U} . Умови інтегровності для (4) мають наступний вигляд:

$$\nabla_j T_i^k - \nabla_i T_j^k = b_j^k T_i - b_i^k T_j, \quad (7)$$

$$T_i^k b_{kj} - T_j^k b_{ki} = \nabla_i T_j - \nabla_j T_i. \quad (8)$$

Через тензорні поля T_i^k перший тензор деформації набуде такого вигляду:

$$2\varepsilon_{ij} = T_i^\alpha g_{\alpha j} + T_j^\alpha g_{\alpha i}. \quad (9)$$

З представлення (3), враховуючи (9), (7), маємо наступний результат.

Лемма 1 Для будь-якої нескінченно малої деформації варіацію символів Кристоффеля можна подати через тензорні поля T_i^k , T_i у наступному вигляді:

$$\delta\Gamma_{ij}^h = \nabla_i T_j^h - T_j b_i^h + T_\alpha b_{ij} g^{\alpha h}. \quad (10)$$

Определение 1 Нескінченно мала деформація поверхні S , при якій кожна геодезична крива поверхні переходить у, у головному, в геодезичну криву деформованої поверхні S_ε називається геодезичною або проективною.

У подальшому в тексті для стисlosti нескінченно малої геодезичну деформацію позначаємо: н.м.Р-деформація.

Теорема 1 [2] Для того, щоб поверхня S допускала н.м.Р-деформації, необхідно і достатньо, щоб існував симетричний тензор δg_{ij} , який задовільняє рівняння

$$\nabla_k \delta g_{ij} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}, \quad (11)$$

де ψ_i - деякий градієнтний вектор.

Рівняння (11), враховуючи (3), можна подати у вигляді

$$P_{ij}^h = \delta\Gamma_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h. \quad (12)$$

Определение 2 Функцію ψ , що зустрічається в рівняннях (11), (12), називатимемо опорною функцією деформації.

Поверхні $S \in E_3$, перша форма яких у відповідних координатах може бути записаною у вигляді

$$ds^2 = (U(u) - V(v)) (du^2 + dv^2),$$

називаються поверхнями Ліувілля. Поверхнями Ліувілля є, наприклад, всі поверхні обертання, всі центральні поверхні другого порядку тощо.

В E_3 н.м.Р-деформації допускають поверхні Ліувілля і лише вони [2].

Теорема 2 [2] Якщо поверхня допускає нетривіальні н.м.Р-деформації, то вона допускає і нетривіальні геодезичні відображення. Вірно і навпаки.

3 Нова форма основних рівнянь

У даному пункті знайдено нову форму основних рівнянь для н.м.Р-деформацій поверхонь, яку надалі будемо досліджувати.

Теорема 3 Для того, щоб поверхня S класу C^3 допускала н.м.Р-деформацію, необхідно і достатньо, щоб тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^α та функція ψ , що представляють похідну вектора зміщення $\bar{U}_i = c_{i\alpha} \left(T^{0\alpha\beta} - \frac{3}{2}\psi c^{\alpha\beta} + c_1 c^{\alpha\beta} \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}$, задовільняли систему наступних рівнянь:

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta} T^{0\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0; \\ \nabla_i T^{0kh} - T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} = \frac{1}{2}\psi_i c^{kh} + \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h; \\ \psi_i = \partial_i \psi. \end{cases} \quad (13)$$

Доведення. Необхідність. Нехай поверхня S допускає н.м.Р-деформацію. З умови геодезичності (12) і виразу для варіації символів Кристоффеля (10) отримаємо, що

$$\nabla_i T_j^h - T_j b_i^h + T_\alpha b_{ij} g^{\alpha h} = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h.$$

Останнє рівняння разом з умовами (7), (8) утворюють наступну систему:

$$\begin{cases} \nabla_j T_i^k - \nabla_i T_j^k = b_j^k T_i - b_i^k T_j; \\ T_i^k b_{kj} - T_j^k b_{ki} = \nabla_i T_j - \nabla_j T_i; \\ \nabla_i T_j^h - T_j b_i^h + T_\alpha b_{ij} g^{\alpha h} = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h; \\ \psi_i = \partial_i \psi. \end{cases} \quad (14)$$

Введемо до розгляду двічі контраваріантний тензор T^{ij} і контраваріантний вектор T^i за формулами

$$T^{ij} = c^{\alpha i} T_\alpha^j, T^i = c^{\alpha i} T_\alpha. \quad (15)$$

Тоді

$$T_i^\beta = c_{i\alpha} T^{\alpha\beta}, T_i = c_{i\alpha} T^\alpha, \quad (16)$$

c_{ij} - дискримінантний тензор, $c^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} c_{\alpha\beta}$.

Скористаємося формулами (16) та подамо систему (14) у такому вигляді:

$$\begin{cases} \nabla_\alpha T^{\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = 0; \\ b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0; \\ c_{j\beta} \nabla_i T^{\beta h} + T^\beta \left(-b_i^h c_{j\beta} + c_{\alpha\beta} g^{\alpha h} b_{ij} \right) = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h; \\ \psi_i = \partial_i \psi. \end{cases} \quad (17)$$

Згорнемо третє рівняння системи з c^{jk} і врахуємо, що $c_{i\alpha}c^{j\beta} = \delta_i^j\delta_\alpha^\beta - \delta_i^\beta\delta_\alpha^j$.
Матимемо

$$\nabla_i T^{kh} - T^j b_{ij} g^{kh} = \psi_i c^{hk} + \psi_j c^{jk} \delta_i^h.$$

Тоді система рівнянь н.м. Р-деформацій має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \nabla_\alpha T^{\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = 0; \\ b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0; \\ \nabla_i T^{kh} - T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} = \psi_i c^{hk} + \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h; \\ \psi_i = \partial_i \psi. \end{cases} \quad (18)$$

У (18)₃ покладемо $h = i$, після згортки по цих індексах, отримаємо наслідок

$$\nabla_\alpha T^{k\alpha} - T^\alpha b_\alpha^k = 3\psi_\alpha c^{\alpha k}. \quad (19)$$

Запишемо систему (18) у більш зручному вигляді. Для цього подамо тензор T^{kh} як суму симетричної і кососиметричної частини

$$T^{kh} = \overset{0}{T}^{kh} + \mu c^{kh}, \quad (20)$$

де $\overset{0}{T}^{kh} = \overset{0}{T}^{hk}$ - симетрична частина, μ - деяка функція. Тоді систему (18) запишемо так:

$$\begin{cases} \nabla_\alpha \overset{0}{T}^{\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = -\mu_\alpha c^{\alpha k}; \\ b_{\alpha\beta} \overset{0}{T}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0; \\ \nabla_i \overset{0}{T}^{kh} - T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} + \mu_i c^{kh} = \psi_i c^{hk} + \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h; \\ \psi_i = \partial_i \psi. \end{cases} \quad (21)$$

Рівняння (19) на основі (20) набуде такого вигляду:

$$\nabla_\alpha \overset{0}{T}^{k\alpha} + \mu_\alpha c^{k\alpha} - b_\alpha^k T^\alpha = 3\psi_\alpha c^{\alpha k}. \quad (22)$$

Порівняємо (22) з (21)₁ і отримаємо, що $\mu_h = -\frac{3}{2}\psi_h$ або після інтегрування

$$\mu = -\frac{3}{2}\psi + c_1, \quad c_1 - const. \quad (23)$$

Таким чином, при н.м.Р-деформації поверхонь тензорне поле $T^{\alpha\beta}$ завжди можна подати у вигляді

$$T^{\alpha\beta} = \overset{0}{T}^{\alpha\beta} + \left(c_1 - \frac{3}{2}\psi \right) c^{\alpha\beta}.$$

Враховуючи рівність (23), система рівнянь (21) набуде такого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\alpha T^{0\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = \frac{3}{2} \psi_\alpha c^{\alpha k}; \\ b_{\alpha\beta} T^{0\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0; \\ \nabla_i T^{0kh} - T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} = \frac{1}{2} \psi_i c^{kh} + \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h; \\ \psi_i = \partial_i \psi. \end{array} \right. \quad (24)$$

Розглянемо останню систему. Поклавши в третьому рівнянні системи $k = i$, бачимо, що перше рівняння є його наслідком.

Отже, система рівнянь н.м.Р-деформацій має вигляд (13). Після таких перетворень похідна вектора зміщення матиме вигляд

$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n} = c_{i\alpha} \left(T^{0\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta} \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n} = \\ &= c_{i\alpha} \left(T^{0\alpha\beta} - \frac{3}{2} \psi c^{\alpha\beta} + c_1 c^{\alpha\beta} \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}. \end{aligned}$$

Достатність. Нехай на поверхні S існують тензорні поля $T^{0\alpha\beta}$, T^α і деяка функція ψ , які задовольняють систему рівнянь (13). Покажемо, що існує вектор зміщення геодезичної деформації.

Нехай

$$T^{0ij} = T^{ij} + \left(\frac{3}{2} \psi - c_1 \right) c^{ij}.$$

Підставимо в рівняння системи (13) та в рівняння $\nabla_\alpha T^{0\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = \frac{3}{2} \psi_\alpha c^{\alpha k}$, що є наслідком рівняння (13)₂, знайдений вираз для $T^{0\alpha\beta}$ і отримаємо систему (18).

Покажемо, що від системи (18) можна перейти до системи (14). Дійсно, згідно [3] рівняння (18)₁, (18)₂ еквівалентні рівнянням (14)₁, (14)₂. З рівняння (18)₃, використовуючи (15), отримаємо (14)₃. Таким чином, якщо на поверхні S існують тензорні поля $T^{0\alpha\beta}$, T^α , деяка функція ψ , що задовольняють рівняння системи (13), тоді існують на поверхні S тензорні поля T_i^k , T_i , що при даній функції ψ задовольняють систему рівнянь (14). Враховуючи представлення символів Кристоффеля (10), з рівняння (14)₃ отримуємо рівняння (12), яке свідчить про те, що деформація геодезична і вибрана функція є опорною. Виконання рівнянь (14)₁ та (14)₂ забезпечує існування вектора зміщення.

Теорема доведена.

4 Представлення тензорних полів $T^{0\alpha\beta}$, T^α в явному вигляді

В даному пункті знайдено представлення тензорних полів $T^{0\alpha\beta}$, T^α через деякі функції ψ , φ .

Теорема 4 Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S (ненульової повної кривини $K \neq 0$) класу C^3 була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції ψ , φ , які задовільняють наступні рівняння:

$$\frac{K_i}{3K^2} (3\nabla_h \psi_m + \lambda g_{mh}) - \frac{1}{3K} (3\nabla_{hi} \psi_m + \lambda_i g_{mh}) = \psi_h g_{im} - \psi_i g_{hm} + \psi_m g_{hi}, \quad (25)$$

$$-\frac{\psi_\alpha c^{\alpha\beta}}{K^2} (K_\gamma b_\beta^\gamma - 2K_\beta H) + \nabla_\beta (\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi = 0, \quad (26)$$

$$\text{де } \lambda = -\frac{3}{2}\nabla_\beta \psi_\alpha g^{\alpha\beta}, \lambda_i = \partial_i \lambda, \nabla_{hi} = \nabla_i \nabla_h.$$

Тоді тензорні поля $T^{0\alpha\beta}$, T^α , що представляють похідну вектора зміщення, мають вигляд

$$T^{0\alpha\beta} = \frac{1}{K} \left(\frac{\varphi K}{2} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \nabla_h \psi_k g^{h\beta} c^{k\alpha} - \frac{1}{4} \nabla_h \psi_k g^{h\alpha} c^{k\beta} \right), \quad (27)$$

$$T^\alpha = \frac{1}{2} (-\psi_h c^{hk} d_k^\alpha + \varphi_k d^{k\alpha}). \quad (28)$$

Тут $K_i = \partial_i K$, H - середня кривина поверхні, $d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}$, $d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta_j^i$.

Доведення. Необхідність. Нехай деформація поверхні S є геодезичною деформацією з вектором зміщення \bar{U} . Тоді тензорні поля $T^{0\alpha\beta}$, T^α , що є компонентами \bar{U}_i , та опорна функція деформації ψ задовільняють рівняння системи (13). Покажемо, що $T^{0\alpha\beta}$, T^α мають представлення (27), (28). Знайдемо умову інтегровності для (13₂). Для цього продиференціюємо (13₂) коваріантно по x^m :

$$\nabla_{im} T^{0\alpha\beta} = \nabla_m T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} + T^\alpha g^{kh} \nabla_m b_{i\alpha} + \frac{1}{2} \nabla_m \psi_i c^{kh} + \nabla_m \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h.$$

Зміною індексів i на m , а m на i , отримаємо, що

$$\nabla_{mi} T^{0\alpha\beta} = \nabla_i T^\alpha b_{m\alpha} g^{kh} + T^\alpha g^{kh} \nabla_i b_{m\alpha} + \frac{1}{2} \nabla_i \psi_m c^{kh} + \nabla_i \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_m^h.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \nabla_{im} \frac{{}^0{}^{kh}}{T} - \nabla_{mi} \frac{{}^0{}^{kh}}{T} &= - \frac{{}^0{}^{sh}}{T} R_{sim}^k - \frac{{}^0{}^{ks}}{T} R_{sim}^h = \\ &= - \frac{{}^0{}^{sh}}{T} K (\delta_i^k g_{sm} - \delta_m^k g_{si}) - \frac{{}^0{}^{ks}}{T} K (\delta_i^h g_{sm} - \delta_m^h g_{si}) = \\ &= K \left(- \frac{{}^0{}^{sh}}{T} \delta_i^k g_{sm} + \frac{{}^0{}^{sh}}{T} \delta_m^k g_{si} - \frac{{}^0{}^{ks}}{T} \delta_i^h g_{sm} + \frac{{}^0{}^{ks}}{T} \delta_m^h g_{si} \right), \end{aligned}$$

умови інтегровності мають наступний вигляд:

$$K \left(- \frac{{}^0{}^{sh}}{T} \delta_i^k g_{sm} + \frac{{}^0{}^{sh}}{T} \delta_m^k g_{si} - \frac{{}^0{}^{ks}}{T} \delta_i^h g_{sm} + \frac{{}^0{}^{ks}}{T} \delta_m^h g_{si} \right) =$$

$$= \nabla_m T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} - \nabla_i T^\alpha b_{m\alpha} g^{kh} + \nabla_m \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h - \nabla_i \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_m^h. \quad (29)$$

У рівнянні (13₂) зробимо згортку з g_{kh} . Маємо, що

$$\varphi_i - 2T^\alpha b_{i\alpha} = \psi_\alpha c^{\alpha\beta} g_{\beta i}, \varphi_i = \partial_i \varphi, \varphi = \frac{{}^0{}^{\alpha i}}{T} g_{\alpha i}. \quad (30)$$

Тоді з (30), після згортки з d^{il} , отримаємо $T^l = \frac{1}{2} (-\psi_\alpha c^{\alpha\beta} d_\beta^l + \varphi_\alpha d^{\alpha l})$. При відповідній заміні індексів l на α , α на h , β на k отримаємо представлення (28).

Умови інтегровності (29), враховуючи (28), мають такий вигляд:

$$K \left(- \frac{{}^0{}^{\alpha h}}{T} \delta_i^k g_{\alpha m} + \frac{{}^0{}^{\alpha h}}{T} \delta_m^k g_{\alpha i} - \frac{{}^0{}^{k\alpha}}{T} \delta_i^h g_{\alpha m} + \frac{{}^0{}^{k\alpha}}{T} \delta_m^h g_{\alpha i} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla_m \psi_\alpha c^{\alpha\beta} g_{i\beta} g^{kh} + \frac{1}{2} \nabla_i \psi_\alpha c^{\alpha\beta} g_{m\beta} g^{kh} + \nabla_m \psi_\alpha \delta_i^h c^{\alpha k} - \nabla_i \psi_\alpha \delta_m^h c^{\alpha k}.$$

Покладемо в останньому рівнянні $k = i$. Матимемо наслідок

$$K \left(-2 \frac{{}^0{}^{\alpha h}}{T} g_{\alpha m} + \varphi \delta_m^h \right) = -\frac{1}{2} \nabla_m \psi_\alpha c^{\alpha\beta} \delta_\beta^h + \frac{1}{2} \nabla_i \psi_\alpha c^{\alpha\beta} g_{m\beta} g^{ih} + \nabla_m \psi_\alpha c^{\alpha h}.$$

Згорнемо останню рівність з g^{sm} . Отримаємо, що

$$\frac{{}^0{}^{sh}}{T} = \frac{1}{K} \left(\frac{\varphi K}{2} g^{sh} - \frac{1}{4} \nabla_\beta \psi_\alpha g^{\beta s} c^{\alpha h} - \frac{1}{4} \nabla_\beta \psi_\alpha g^{\beta h} c^{\alpha s} \right).$$

При відповідній заміні індексів s на α , h на β , α на k , β на h отримаємо представлення (27). Тоді рівняння (13₁), враховуючи (27), (28), набуде вигляду (26), а рівняння (13₂)

$$-\frac{K_i}{K^2} \left(-\frac{1}{4} \nabla_\beta \psi_\alpha c^{\alpha h} g^{\beta k} - \frac{1}{4} \nabla_\beta \psi_\alpha c^{\alpha k} g^{\beta h} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{K} \left(\frac{\varphi_i K}{2} g^{kh} - \frac{1}{4} \nabla_{\beta i} \psi_{\alpha} c^{\alpha h} g^{\beta k} - \frac{1}{4} \nabla_{\beta i} \psi_{\alpha} c^{\alpha k} g^{\beta h} \right) - \\
& - b_{i\alpha} g^{kh} \left(-\frac{1}{2} \psi_{\gamma} c^{\gamma\beta} d_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{2} \varphi_{\gamma} d^{\gamma\alpha} \right) = \frac{1}{2} \psi_i c^{kh} + \psi_{\alpha} c^{\alpha k} \delta_i^h. \quad (31)
\end{aligned}$$

Згорнемо (31) з c_{km} та опустимо h . Як результат матимемо рівняння (25).

Достатність. Нехай на поверхні S існують деякі функції ψ , φ , які задовольняють рівняння (25), (26). Тоді візьмемо тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^{α} у вигляді (27), (28) і покажемо, що за даного представлення системи (13) задовольняється. Дійсно, підстановкою (27), (28) в (13) переконуємося, що система (13) виконується в результаті використання (25), (26). Тобто, на поверхні існують тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^{α} , що задовольняють (13). Тоді, на основі теореми 3, існує вектор зміщення геодезичної деформації поверхні.

Теорема доведена.

Определение 3 *Функції ψ та φ , що задовольняють систему (25), (26), називатимемо опорною та характеристичною функцією поверхні.*

Перша функція ψ , як розв'язок цієї системи, може слугувати опорною функцією н.м.Р-деформації.

У випадку $\psi_i = 0$ характеристична функція φ є класичною характеристичною функцією Вейнгартена.

5 Тривіальні н.м. Р-деформації

Н.м.Р-деформації, для яких

$$\psi_i = 0, \quad (32)$$

називають афінними (н.м.РА-деформації); вважатимемо їх тривіальними нескінченно малими геодезичними деформаціями. Вони зберігають "у головному" афінну зв'язність поверхні: $\delta\Gamma_{ij}^h = 0$. З рівняння (11) випливає, що за умови (32), $\nabla_k \delta g_{ij} = 0$. Остання умова рівносильна рівнянню

$$\delta g_{ij} = 2c g_{ij}, c = const. \quad (33)$$

Таким чином, (33) показують, що н.м.РА-деформації є нескінченно малими гомотетіями. У випадку $c = 0$ з (33) бачимо, що варіація метричного тензора $\delta g_{ij} = 0$, а деформація є згинанням. Отже, згинання є тривіальним випадком н.м.РА-деформації.

Теорема 5 Для того, щоб деформація поверхні S ($K \neq 0$) класу C^3 була н.м.РА-деформацією, необхідно і достатньо, щоб існували стала опорна функція ψ та характеристична функція Вейнгартена φ . Тоді відповідні тензорні поля $\overset{0}{T}^{\alpha\beta}$, T^α мають представлення

$$\overset{0}{T}^{\alpha\beta} = \frac{\varphi}{2} g^{\alpha\beta}, T^\alpha = \frac{\varphi_k}{2} d^{k\alpha}. \quad (34)$$

Доведення. Необхідність. Нехай поверхня допускає н.м. РА-деформацію. Тоді на таких поверхнях, в силу геодезичності деформації, тензорні поля $\overset{0}{T}^{\alpha\beta}$, T^α мають представлення (27), (28). Для афінних деформацій опорна функція $\psi = const$ і представлення (27), (28) матимуть вигляд (34). Підставимо значення ψ в (25), (26). Бачимо, що (25) виконується тотожно, а з (26) отримаємо рівняння для знаходження функції φ :

$$\nabla_\beta(\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi = 0.$$

Останнє рівняння є характеристичним рівнянням Вейнгартена [4].

Достатність. Нехай на поверхні S існують стала функція ψ та характеристична функція Вейнгартена φ . Дані функції задовільняють рівняння (25), (26). Отже, за теоремою 4, існує вектор геодезичної деформації. Оскільки $\psi = const$, то н.м.Р-деформація є афінною.

Теорема доведена.

6 Нескінченно малі геодезичні деформації спеціальних поверхонь

У даному пункті досліджуються н.м.Р-деформації поверхонь сталої гауссової кривини та поверхонь обертання.

Теорема 6 Для того, щоб поверхня S класу C^3 ненульової сталої гауссової кривини допускала н.м.Р-деформацію, необхідно і достатньо, щоб існували функції ψ , φ , що задовільняють наступні рівняння:

$$\nabla_{hi}\psi_m = -K(2\psi_ig_{mh} + \psi_hg_{im} + \psi_mg_{hi}), \quad (35)$$

$$\nabla_\beta(\varphi_\alpha d^{\alpha\beta}) + 2H\varphi = 0. \quad (36)$$

Тоді тензорні поля $\overset{0}{T}^{\alpha\beta}$, T^α мають представлення (27), (28).

Доведення. Необхідність. Нехай поверхня зі сталою гауссовою кривиною $K = const \neq 0$ допускає н.м.Р-деформацію. Згідно теореми 4 тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^α мають представлення (27), (28), де опорна функція ψ і характеристична функція φ задовольняють (25), (26). Рівняння (36), за умови $K = const \neq 0$, відразу випливає з рівняння (26). Для поверхонь сталої гауссової кривини рівняння (25) набувають наступного вигляду:

$$-\frac{1}{3K}(3\nabla_{hi}\psi_m + \lambda_ig_{mh}) = \psi_hg_{mi} - \psi_ig_{mh} + \psi_mg_{hi}.$$

Звідси маємо, що

$$3\nabla_{hi}\psi_m = -\lambda_ig_{mh} - 3K(\psi_hg_{mi} - \psi_ig_{mh} + \psi_mg_{hi}).$$

В останньому рівнянні, змінюючи h на i , а i на h , знаходимо

$$3\nabla_{ih}\psi_m = -\lambda_hg_{mi} - 3K(\psi_ig_{mh} - \psi_hg_{mi} + \psi_mg_{hi}).$$

Віднявши два останніх рівняння та скориставшись тим, що $\nabla_{hi}\psi_m - \nabla_{ih}\psi_m = \psi_s R^s_{mhi} = K(\psi_hg_{mi} - \psi_ig_{mh})$ маємо

$$\frac{1}{3K}(\lambda_hg_{mi} - \lambda_ig_{mh}) = -3\psi_ig_{mh} + 3\psi_hg_{mi}.$$

Згорнемо дане рівняння з g^{mh} і проінтегруємо результат. Отримаємо, що

$$\psi = \frac{1}{9K}\lambda + c_4, c_4 - const$$

Тоді, враховуючи останню рівність, рівняння (25) набуває вигляду (35).

Достатність. Нехай на поверхні S існують функції ψ , φ , що задовольняють рівняння (35), (36). Для поверхонь сталої кривини такі функції задовольняють і рівняння (25), (26). Тоді, за теоремою 4, існує вектор зміщення геодезичної деформації даної поверхні.

Теорема доведена.

Теорема 7 Поверхні обертання

$$\bar{r} = (ucosv, usinv, f(u)), (K \neq const)$$

допускають нетривіальні н.м.Р-деформації при нульовій характеристичній функції. При цьому

$$T^0{}^{11} = T^0{}^{22} = 0, T^0{}^{12} = \frac{c_5 u}{4\sqrt{1+f'^2}},$$

$$T^1 = 0, T^2 = -\frac{c_5 u}{2f'},$$

$$\psi = c_5 \frac{u^2}{2} + c_6, c_5, c_6 - const$$

Доведення. Згідно критерію н.м.Р-деформацій (теорема 4), для доведення існування н.м.Р-деформацій поверхонь обертання треба знайти функції φ та ψ , що задовільняють умови (25), (26). Для поверхонь обертання в даній параметризації

$$g_{11} = 1 + f'^2, g_{12} = 0, g_{22} = u^2,$$

$$b_{11} = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}}, b_{12} = 0, b_{22} = \frac{uf'}{\sqrt{1 + f'^2}},$$

$$b_1^1 = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}, b_2^1 = b_1^2 = 0, b_2^2 = \frac{f'}{u\sqrt{1 + f'^2}},$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f''}{1 + f'^2}, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}, \Gamma_{22}^1 = \frac{-u}{1 + f'^2},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$K = \frac{f'f''}{u(1 + f'^2)^2}.$$

Нехай $\varphi = 0$. Враховуючи, що $c_{11} = c_{22} = 0$, $b_2^1 = b_1^2 = 0$ для поверхонь обертання з (26) маємо одне суттєве рівняння:

$$-\psi_1 K_2 b_1^1 + \psi_2 K_1 b_2^2 = 0. \quad (37)$$

Тут $\psi_1 = \partial_1 \psi = \partial_u \psi$, $K_1 = \partial_1 K = \partial_u K$ і т.д.

Оскільки $K_2 = 0$, тому з (37), за умов $K_1 \neq 0$, $b_2^2 \neq 0$, маємо, що $\psi = \psi(u)$.

Скористаємося тим, що

$$\nabla_1 \psi_1 = \psi_{11} = \partial_1 \psi_1 - \Gamma_{11}^1 \psi_1, \nabla_2 \psi_1 = \psi_{12} = 0, \nabla_2 \psi_2 = \psi_{22} = -\Gamma_{22}^1 \psi_1,$$

$$\nabla_1 \psi_{11} = \partial_1 \psi_{11} - 2\Gamma_{11}^1 \psi_{11}, \nabla_1 \psi_{12} = 0, \nabla_2 \psi_{11} = 0,$$

$$\nabla_2 \psi_{21} = -\Gamma_{22}^1 \psi_{11} - \Gamma_{12}^2 \psi_{22}, \nabla_1 \psi_{22} = \partial_1 \psi_{22} - 2\Gamma_{21}^2 \psi_{22}, \nabla_2 \psi_{22} = 0$$

і запишемо систему (25) у розгорнутому вигляді. Отримали, що

$$\frac{K_1}{3K^2} (3\nabla_1 \psi_1 + \lambda g_{11}) - \frac{1}{3K} (3\nabla_1 \psi_{11} + \nabla_1 \lambda g_{11}) = \psi_1 g_{11}; \quad (38)$$

$$\frac{K_1}{3K^2} (3\nabla_2 \psi_2 + \lambda g_{22}) - \frac{1}{3K} (3\nabla_1 \psi_{22} + \nabla_1 \lambda g_{22}) = -\psi_1 g_{22}; \quad (39)$$

$$-\frac{1}{K} \nabla_2 \psi_{12} = \psi_1 g_{22}; \quad (40)$$

$$\nabla_2 \lambda = 0. \quad (41)$$

Рівняння (41) показує, що λ є функцією від u . З рівняння (40) маємо, що

$$\Gamma_{22}^1 \partial_1 \psi_1 = \psi_1 (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + g_{22} K)$$

або

$$\frac{\partial_1 \psi_1}{\psi_1} = \frac{1}{u}.$$

З останнього рівняння після інтегрування знаходимо

$$\psi_1 = c_5 u$$

або

$$\psi = c_5 \frac{u^2}{2} + c_6, c_5, c_6 - const \quad (42)$$

Враховуючи рівність (42), з (39) знаходимо таке рівняння на λ :

$$\lambda_1 - \lambda \frac{K_1}{K} = 2c_5 \left(\frac{K_1}{K(1+f'^2)} + \frac{2f'f''}{(1+f'^2)^2} + Ku \right).$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку з загальним розв'язком

$$\lambda = 3c_5 K \left(\frac{3}{2} u^2 + \int \frac{K_1}{K^2(1+f'^2)} du \right).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що на основі (42) та виразу для λ , рівняння (38) виконується тотожно. Отже, для поверхонь обертання, за умови $\varphi = 0$, ми знайшли функцію ψ . Таким чином, за теоремою 4, поверхні обертання допускають н.м.Р-деформації. З представлення (42) маємо, що н.м.Р-деформація є нетривіальною. У випадку $c_5 = 0$ н.м.Р-деформація поверхні обертання є афінною. З виразів (27), (28), знаходимо, що

$$\overset{0}{T}{}^{11} = \overset{0}{T}{}^{22} = 0, \overset{0}{T}{}^{12} = \frac{c_5 u}{4\sqrt{1+f'^2}},$$

$$T^1 = 0, T^2 = -\frac{c_5 u}{2f'},$$

$$\psi = c_5 \frac{u^2}{2} + c_6, c_5, c_6 - const$$

Теорема доведена.

7 Геометричний зміст опорної функції деформації ψ

У роботі [5] показано, що для довільної деформації поверхонь функція μ , яка введена в представленні (20) тензорного поля $T^{0\alpha\beta}$, має наступний геометричний зміст:

$$\mu = -\frac{\delta d\sigma}{2d\sigma},$$

де $\delta d\sigma$ - варіація елемента площини $d\sigma$.

Тоді, враховуючи (23), геометричний зміст опорної функції ψ , яка визначає варіацію символів Кристоффеля, випливає з наступної формули:

$$\psi = \frac{\delta d\sigma}{3d\sigma} + c_7, c_7 - const. \quad (43)$$

З (43) бачимо, що н.м.РА-деформації (тривіальні геодезичні деформації) будуть еквіареальними:

$$\delta d\sigma = c_8 d\sigma, c_8 - const$$

Коли ж $c_8 = 0$, то матимемо ареальні [3] деформації поверхонь.

References

1. Н. С. Синюков *Бесконечно малые геодезические деформации поверхности*. Синюков Н.С., Гаврильченко М.Л. // Третья респ. конференция математиков Белоруссии, Минск. – 1971.
2. М. Л. Гаврильченко *Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств*.// Гаврильченко М. Л., Киосак В.А., Микеш Й. //Известия высших учебных заведений, - 2004, №11(510).- С.23-29.
3. Л. Л. Безкоровайна *Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки*./ Безкоровайна Л. Л. - Одеса : Астропrint, 1999 - 168 с.
4. И. Н. Векуа *Обобщенные аналитические функции*. / Векуа И.Н. - М. : Наука, 1988. - 509 с.
5. Л. Л. Безкоровайна *Структура множини розв'язків системи рівнянь для загальної нескінченно малої деформації*./ Безкоровайна Л. Л. // Геометрія в Одесі - 2004 : міжнародна конференція, 17 - 29 травня 2004 р.: - Одеса, 2004. - С. 7 - 8.